



Dr. Turóczi Antal

PILÓTANÉLKÜLI REPÜLŐGÉPEK: NEMLINEÁRIS SZABÁLYOZÁSI RENDSZEREK

BEVEZETÉS

A pilótanélküli légi és szárazföldi járművek a mai modern hadseregekben egyre fontosabb szerepet kapnak főként információszerző, támogató és – ma már egyre gyakrabban – harci feladatok ellátásában is. Ennek legfőbb oka az emberi élet védelme. A hatékonyság növelése érdekében a robottechnikai eszközök alkalmazásának igénye és lehetősége mára a polgári életben is egyre több helyen jelentkezik. Ezeknek a nagymértékben automatizált berendezéseknek az elterjedéséhez azonban szembe kell nézni számos – főként a biztonságos üzemeltetést érintő – műszaki és technikai problémával.

A civil légtérben üzemelő pilótanélküli repülőgépek (UAV¹-k) szükségszerűen hatást gyakorolnak a légi közlekedés biztonságára. Az UAV-nak érzékelnie kell a közelében lévő többi légi járművet és egyéb akadályt, így a fedélzeti automatika önállóan, vagy az UAV-t irányító személyzet közreműködésével elkerülheti a veszélyes forgalmi szituációkat. Hasonlóan fontos az is, hogy az UAV környezetében lévő pilótanélküli és pilóta vezette repülőgépek – még rossz látási körülmények esetén is – időben észleljék annak jelenlétét. Az észleléshez megfelelő térinformatikai, távérzékelő és helyzet-meghatározó eszközökre, a veszélyhelyzetek felismeréséhez, elkerüléséhez és az esetleges vészleszállás automatikus végrehajtásához pedig intelligens fedélzeti repülésszabályozó berendezésekre van szükség [2].

A pilótanélküli repülőgépek repülésszabályozó rendszerei a konstrukció és a fedélzeti szenzorok fizikai modelljének, a szenzorok által a környezetről és az UAV saját állapotáról szolgáltatott információk, valamint a repülési feladat ismeretében irányítja a repülőgép mozgását. A fizikai modelleket általában matematikai egyenletek formájában adják meg, melyek az ismeretlen paraméterek valamint a rendszert érő külső és belső zavarok hatásai miatt csak közelítőleg írják le a valóságban lejátszódó folyamatokat. A modellek minden határon túl történő pontosítása azonban nem is cél, a zavarok és bizonytalanságok kompenzálása a szabályzó-tervezési módszer megfelelő kiválasztásával biztosítható [2][3].

¹ UAV: Unmanned Aerial Vehicles

NEMLINEÁRIS RENDSZEREK

Tágabb értelemben véve szabályozási rendszernek tekinthetünk minden olyan folyamatot, amelyben egy rendszer egy másik rendszert valamilyen irányítási cél elérése érdekében befolyásol. Ezért a tudományágak szinte mindegyikében találkozhatunk irányítási mechanizmusokkal. Gondoljunk csak az élőlényekben lezajló bonyolult biokémiai, a közgazdaság területén végbemenő pénzügyi vagy egy autógyárban lejátszódó műszaki folyamatok sokaságára. E rendszerek egy része önszervező másik része mesterséges, az ember által előre megtervezett módon valósul meg.

A mesterséges irányítási folyamatok tervezésével az irányítástechnika tudománya foglalkozik, melynek az utóbbi évtizedekben számos, a klasszikus irányításelmélettől merőben eltérő irányzata alakult ki. A digitális számítógépek rohamos fejlődésének köszönhetően a gyakorlatban is alkalmazhatóvá váltak az optimális, adaptív, robosztus irányítások, a különböző soft-computing technikák és nemlineáris szabályzó-tervezési módszerek.

A lineáris rendszerek szabályozás elmélete több mint fél évszázados múltra tekint vissza. Az ezen a területen kidolgozott tervezési módszerek létjogosultságát számtalan sikeres gyakorlati alkalmazás bizonyítja. Az automatizálás, a robotika térhódítása, a szigorodó minőségi követelmények azonban egyre bonyolultabb matematikai modelleket igényelnek, amelyeknél a lineáris közelítés gyakran nem fed le megfelelően a valós rendszer teljes működési tartományát. Ez fokozottan igaz az olyan mechatronikai rendszerekben – mint például a robotok – amelyek nem csak egy nominális munkapont környezetében üzemelnek. Az utóbbi években ezért egyre hangsúlyosabbá vált a nemlineáris szabályzó tervezési eljárások, módszerek kutatása és gyakorlati alkalmazása [2][3][4][5][6][7].

A dinamikus rendszerek matematikai modelljét differenciál egyenletek formájában szokták megadni, melyek az állapotváltozók – a rendszerre jellemző, megfelelően kiválasztott tulajdonságok – időfüggését határozzák meg. Az állapotváltozós és kimeneti egyenlet általános alakja:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)\end{aligned}\tag{1}$$

ahol $\mathbf{x}$ az állapotváltozók, $\mathbf{u}$ a bemenetek, $\mathbf{y}$ a kimenetek vektorai, t az idő, $\mathbf{f}$ és $\mathbf{h}$ pedig általános esetben nemlineáris vektor-vektor függvények (vektorterek)[2][3][4][5]:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ g_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \vdots \\ g_m(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{bmatrix}\tag{2}$$

A szabályzótervezésnek az a feladata, hogy az (1) egyenlettel jellemzett nyitott rendszerből olyan zárt, visszacsatolt rendszert kapjunk, amely:

- stabil;

- az alapjelet megfelelően követi;
- a külső zavaró jelek hatásait minimalizálja;
- a belső zajokat megfelelő minőséggel szűri;
- a paraméterváltozásokra kellően érzéketlen;
- megfelel az egyéb követelmények.

Dinamikus rendszerek vizsgálatakor az (1) egyenletben sokszor nem tüntetjük fel explicit módon az $\mathbf{u}$ bemenetet, mert az visszacsatoláson keresztül az állapotváltozók és az idő függvényében adott: $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Ez az eset egy zárt szabályzási kör vizsgálatakor is. Így egy gerjesztés nélküli rendszert kapunk:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, t)\end{aligned}\tag{3}$$

Egyszerűbb esetben a (1) egyenlet $\mathbf{f}$ és $\mathbf{h}$ függvényei nem függenek az időtől, ilyenkor autonóm rendszerről beszélünk:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u})\end{aligned}\tag{4}$$

Ha $\mathbf{f}$ és $\mathbf{h}$ függvények lineárisak, az (1) egyenlet az alábbi speciális formában írható fel [4][5]:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}\end{aligned}\tag{5}$$

A repülőgépek – mint dinamikus rendszerek – mozgásegyenleteit is fel lehet írni az (1) egyenletrendszerhez hasonló alakban a Lagrange egyenletek vagy a Newton törvények felhasználásával. A merev testek általános mozgása például az alábbi egyenletrendszerrel adható meg²:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}(t) &= \mathbf{v}(t) \\ \dot{\mathbf{\Phi}}(t) &= \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{\Phi}(t) \\ \dot{\mathbf{P}}(t) &= \mathbf{F}(t) \\ \dot{\mathbf{L}}(t) &= \mathbf{M}(t)\end{aligned}\tag{6}$$

ahol:

- $\mathbf{r}(t)$: a tömegközéppont helyvektora, pozíciója;
- $\mathbf{v}(t)$: a tömegközéppont sebességvektora;
- $\mathbf{\Phi}(t)$: a forgatási vagy rotáció mátrix;
- $\boldsymbol{\omega}(t)$: a szögsebesség-vektor;

² Mivel a repülőgépek rugalmas alkotóelemekből épülnek fel, a (6) egyenletrendszer mellett sok esetben szükséges lehet további, az elasztikus viselkedést leíró egyenletekre is.

- $\mathbf{P}(t)$: a test impulzus- vagy lendületvektora;
- $\mathbf{F}(t)$: a testre ható erők eredőjének vektora;
- $\mathbf{L}(t)$: a test impulzusmomentum- vagy perdületvektora;
- $\mathbf{M}(t)$: a nyomatékok eredőjének vektora.

Hagyományos merevszárnyú repülőgépnél a pilóta a rendszer bemeneti jeleit a gázkar, a botkormány és a pedálok kitérítésével határozza meg, melyek a hajtóműveken és a kormányfelületeken keresztül befolyásolják a gépre ható erőket és nyomatékokat. A pilóta szerepét UAV-knál a fedélzeti automatika veszi át [9].

Ha egy kísérletet képesek vagyunk teljesen azonos körülmények között többször megismételni, determinisztikus rendszereknél az állapotváltozók mozgására mindig ugyan azt az eredményt kapjuk. Ezért, ha az $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ differenciálegyenlet megfelelően reprezentálja az adott fizikai rendszer valós működését, akkor $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ kezdeti feltétel esetén egyetlen megoldása létezik. Ehhez $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ -nek teljesítenie kell a Lipschitz feltételt [4]:

1. Definíció: Ha a t -ben folytonos $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ függvény bármely két pontja között húzott egyenes szakasz meredeksége véges, vagyis

$$\text{minden } \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\text{-re} \quad \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(0)\| \leq r \quad \text{és a} \quad 0 \leq t \leq T \quad \text{tartományban}$$

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_2, t)\| \leq L \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$$

$\mathbf{f}$ teljesíti a Lipschitz feltételt. A Lipschitz tulajdonság adott $\mathbf{x}$ pont meghatározott környezetében lokálisan is értelmezhető.

Egy matematikai modell használhatóságának másik fontos feltétele, hogy az $\mathbf{x}_0, t_0$ kezdeti feltételek és $\mathbf{f}$ paramétereinek kis megváltozása a megoldásban is csak kis változást eredményezzen.

Stabilitás

2. Definíció: Egy

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \tag{7}$$

rendszer egyensúlyi állapotának nevezzük azt az $\mathbf{x}_e$ pontot, melyből t_0 pillanatban indítva, majd magára, az minden további $t \geq t_0$ időpillanatban $\mathbf{x}_e$ állapotban marad. Ilyenkor az állapotváltozók változási sebessége zérus:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = 0; \quad t \geq t_0; \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_e; \tag{8}$$

3. Definíció: Az $\mathbf{x}_e$ egyensúlyi állapot

- *stabilis, ha minden $t_0 \geq 0$, $t \geq t_0$ és $\varepsilon \geq 0$ esetén létezik $\delta(\varepsilon, t_0)$ úgy, hogy*

$$\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_e\| < \delta(\varepsilon, t_0) \Rightarrow \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e\| < \varepsilon \quad (9)$$

ahol $\mathbf{x}(t)$ a (7) egyenlet megoldása³ $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ kezdeti feltétel esetén. Vagyis ha létezik olyan kitérítés, ahonnan a magára hagyott rendszer az egyensúlyi helyzetének környezetébe tér vissza, az egyensúlyi pontot Ljapunov értelemben stabilisnak nevezzük;

- *instabil vagy labilis, ha nem stabil.*
- *aszimptotikusan stabilis, ha minden $t_0 \geq 0$ létezik $\delta(t_0)$ úgy, hogy*

$$\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_e\| < \delta(t_0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = \mathbf{x}_e \quad (10)$$

Vagyis, ha a kitérített rendszer egyensúlyi helyzetébe – nem csupán annak környezetébe – tér vissza, az egyensúlyi pontot aszimptotikusan stabilisnak nevezzük;

- *uniform stabilis, ha δ választása független t_0 -tól, vagyis ha az egyensúlyi pont stabilitási jellemzői függetlenek t_0 -tól;*
- *globális uniform aszimptotikusan stabilis, ha minden $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ kezdeti értékre aszimptotikusan stabilis, vagyis ha (7) egyenlet minden $\mathbf{x}(t)$ megoldása, kezdeti értéktől függetlenül az $\mathbf{x}_e$ egyensúlyi ponthoz konvergál. Ez utolsó a szabályozási rendszerektől ideálisan elvárt tulajdonság.*

A nemlineáris rendszereknek – lineáris társaiktól eltérően – egynél több egyensúlyi helyzete is lehet, melyek stabilitását külön-külön meg kell vizsgálni. Ezért általában az adott egyensúlyi helyzet környezetében értendő lokális stabilitásról vagy instabilitásról beszélünk. Az állapotváltozók $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_e$ újradefiniálásával a vizsgált egyensúlyi pont áthelyezhető az origóba, így általánosságban mindig a rendszer $\mathbf{z}_e = 0$ pontját vizsgáljuk. Ekkor

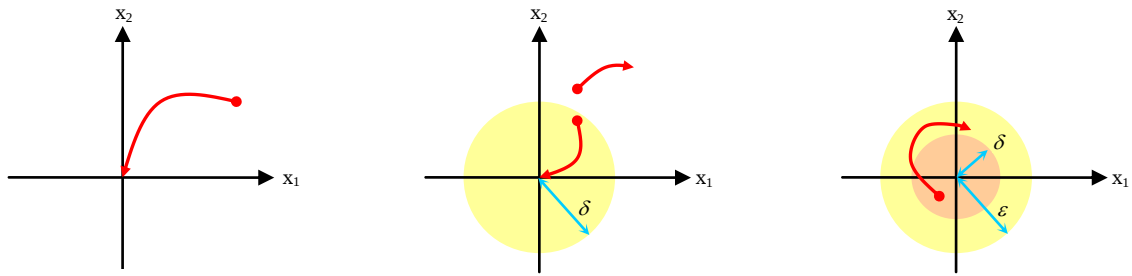
$$f(\mathbf{x}, t) \rightarrow f^*(\mathbf{z}, t) \text{ és } f^*(0, t) = 0 \quad (11)$$

A stabilitás különböző fajtáit másodrendű rendszer esetén az 1/a-c. ábrák szemléltetik az állapotváltozók által kifeszített állapotsíkon [4][5][6].

Ljapunov-féle stabilitás vizsgálati módszerek

Egy egyensúlyi pont stabilitási tulajdonságait a (7) egyenlet $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$ megoldásából meg lehet határozni, az analitikus megoldás azonban nemlineáris rendszerek esetén általában nem lehetséges.

³ Az $\mathbf{x}(t)$ megoldást más néven állapottrajektóriának nevezzük



1. ábra. a, globálisan aszimptotikusan; b, lokálisan aszimptotikusan; és c, Ljapunov értelemben stabilis másodrendű rendszerek trajektóriái

Ljapunov első stabilitás vizsgálati módszere szerint:

1. Tétel: A nemlineáris rendszert az egyensúlyi pontjában

$$\Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} \quad \text{ahol} \quad \mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_e}$$

lineáris rendszerrel közelítve, az egyensúlyi pont

- stabil, ha az $\mathbf{A}$ mátrix λ_i sajátértékeire $\text{Re}(\lambda_i) < 0$;
- labilis, ha az $\mathbf{A}$ mátrix λ_i sajátértékeinek valamelyikére $\text{Re}(\lambda_i) > 0$.

A fenti közvetett módszer hátránya, hogy $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$ esetén nem alkalmazható, és csak a munkapont körüli kis értékekre igaz.

Ljapunov második, közvetlen módszerével a stabilitási tulajdonságokat a (7) differenciál-egyenlet megoldása nélkül, az $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ és a $V(\mathbf{x})$ skalár Ljapunov függvény közötti viszony alapján határozhatjuk meg. $V(\mathbf{x})$ egyfajta energia függvényként fogható fel, melynek értéke az egyensúlyi ponttól távolodva növekszik. A stabilitási tételek megfogalmazása előtt azonban szükség van a következő definíciókra:

4. Definíció: A $V(\mathbf{x})$ függvény:

- pozitív definit (határozottan pozitív értékkészletű) ha, $V(0) = 0$ és $V(\mathbf{x}) > 0$, $\mathbf{x} \neq 0$;
- pozitív szemidefinit (félig határozott pozitív értékkészletű) ha, $V(0) = 0$ és $V(\mathbf{x}) \geq 0$, $\mathbf{x} \neq 0$;
- negatív (szemi-)definit ha, $-V(\mathbf{x})$ pozitív (szemi-)definit;
- radiálisan korlátlan, ha $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ ha $\mathbf{x} \rightarrow \infty$.

Ezek alapján Ljapunov autonóm rendszerekre érvényes stabilitási és instabilitási tétele a következő:

2. Tétel: Legyen az $\mathbf{x} = 0$ pont az

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (12)$$

rendszer egyensúlyi pontja, ahol $\mathbf{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokálisan kielégíti a Lipschitz feltételt és $U \subset \mathbb{R}^n$ tartomány tartalmazza az origót. Ha létezik $V: U \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható pozitív definit függvény az U tartományon, melyre

1. $\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ negatív szemidefinit, akkor az $\mathbf{x} = 0$ egyensúlyi pont stabil.
2. Ha $\dot{V}(\mathbf{x})$ negatív definit, akkor az $\mathbf{x} = 0$ egyensúlyi pont aszimptotikusan stabilis.

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right] \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (13)$$

Ha a $V(\mathbf{x})$ Ljapunov függvény radiálisan korlátlan, az egyensúlyi pont 1. esetben globálisan, 2. esetben globálisan aszimptotikusan stabilis.

3. Tétel: Legyen az $\mathbf{x} = 0$ pont a (12) rendszer egyensúlyi pontja, valamint $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható valós függvény, melynek $\dot{V}(\mathbf{x})$ idő szerinti deriváltja negatív (pozitív) definit. Az egyensúlyi pont instabil abban a tartományban, ahol $V(\mathbf{x})$ nem pozitív (negatív) definit vagy szemidefinit.

A kritériumok elégséges, de nem szükséges feltételei a rendszer stabilitásának vagy instabilitásának. Ha egy adott függvényre a feltétel nem teljesül, létezhet másik, amelyikre igen. A megfelelő Ljapunov függvény megtalálására – néhány egyszerűbb rendszertípustól eltekintve – nincsen általános recept.

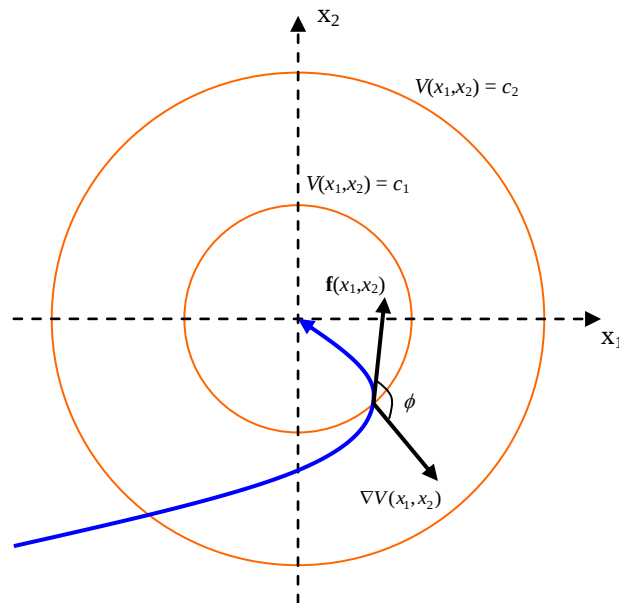
A 2. Tétel szerint, a (12) rendszer akkor stabilis az adott U tartományban, ha bármely U -beli $\mathbf{x}_0$ kezdeti állapotból indítva azt, a megfelelően választott $V(\mathbf{x})$ Ljapunov függvény az $\mathbf{x}(t)$ megoldás mentén csökkenő. Egy mechanikai rendszer esetén ez azt jelenti, hogy teljes energiája – mozgási és az egyensúlyi ponthoz viszonyított potenciális energiájának összege – az idő előrehaladtával csökken, disszipálódik, vagyis az $\mathbf{x}(t)$ állapotváltozók, a nulla energiaszintű stabil egyensúlyi ponthoz közelítenek[4][5][6].

Ljapunov közvetlen módszerének geometriai értelmezése

A 2. Tételnek geometriai jelentést is adhatunk, ha egy másodrendű nemlineáris dinamikus rendszer $\mathbf{x}(t)$ trajektóriáját és a $V(x_1, x_2)$ függvényt szintvonalai segítségével az x_1 - x_2 állapotsíkon együtt ábrázoljuk. Tekintsük az $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(x_1, x_2)$ rendszert. Ekkor (13) szerint

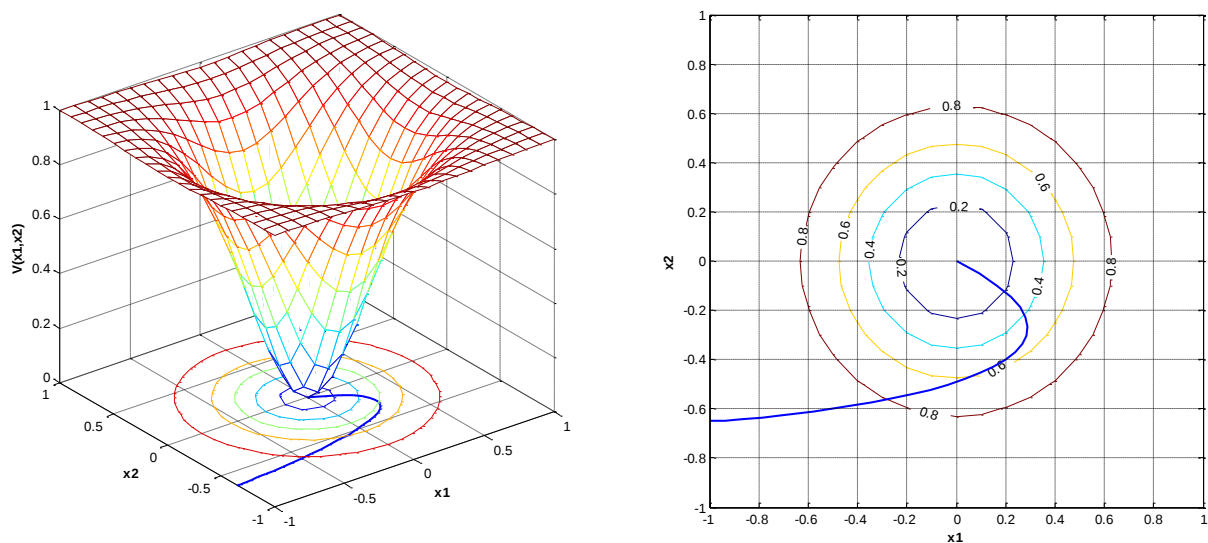
$$\dot{V}(x_1, x_2) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{f}(x_1, x_2) \quad (14)$$

ahol $\partial V / \partial \mathbf{x} = \nabla V(x_1, x_2)$ a $V(x_1, x_2)$ Ljapunov függvény gradiens-vektora, $\mathbf{f}(x_1, x_2)$ pedig az $\mathbf{x}(t)$ trajektória tangenciális-vektora. A 2. ábra a választott Ljapunov függvény $V(x_1, x_2) = c_1$ és $V(x_1, x_2) = c_2$ szintvonalát valamint a $\nabla V(x_1, x_2)$, $\mathbf{f}(x_1, x_2)$ vektorokat és az általuk bezárt ϕ szöget mutatja. A 3. ábra a szintvonalak származtatását szemlélteti. Az egyensúlyi pont az origóban van.



2. ábra. Ljapunov közvetlen módszerének grafikus értelmezése

Ahhoz, hogy a két vektor (14) szerinti skaláris szorzatára $\dot{V}(x_1, x_2) \leq 0$ teljesüljön, a ϕ szögnek a $[\pi/2, 3\pi/2]$ intervallumban kell maradnia. Egy jól megválasztott Ljapunov függvény gradiense tehát az origóval ellentétes irányba ($0 < c_1 < c_2$), a trajektória tangenciálisa pedig az adott szintvonaltól befelé, vagy legrosszabb esetben a szintvonal érintőjének irányába mutat. Ha a trajektória tangenciálisa mindig a szintvonaltól befelé mutat, $\mathbf{x}(t)$ eléri az origót, vagyis az egyensúlyi pont aszimptotikusan stabilis[6].



3. ábra. A Ljapunov függvény szintvonalainak származtatása

Vonzódási környezet

5. Definíció: Az állapottér $M_d = \{\mathbf{x} : V(\mathbf{x}) < d\}$ tartománya az $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ rendszer $\mathbf{x} = 0$ egyensúlyi pontjának vonzódási környezete⁴, ha létezik $V(\mathbf{x})$ és d úgy, hogy az egyensúlyi pont a 2. Tétel értelmében stabilis.

Egy egyensúlyi ponttal kapcsolatban gyakran felmerül a kérdés, hogy mekkora az a környezete, ahonnan a rendszert indítva, annak minden trajektóriája az origóhoz tart. Ez főleg olyan esetekben lehet fontos, ahol nem cél, vagy az adott eljárással nem biztosítható az egyensúlyi pont globális stabilitása. Ha például egy rendszerről tudjuk, hogy az állapotváltozók az állapottér csak egy korlátozott részében vehetnek fel értéket, a zárt rendszer stabilitáshoz elegendő, ha az egyensúlyi pont vonzódási környezete csak ezt a régiót tartalmazza. Így a szabályozóval szemben támasztott követelmények enyhíthetők. Például a munkaponti linearizálással tervezett szabályzó működési tartományáról, alkalmazhatóságának korlátairól is a vonzódási környezet segítségével kaphatunk információt [4][5][6].

NEMLINEÁRIS SZABÁLYOZÁSI RENDSZEREK

Az előző fejezetben ismertetett elvek alkalmasak adott zárt rendszer stabilitási tulajdonságainak vizsgálatára. A szabályozásméletben azonban legtöbbször az a kérdés, hogyan alakítsuk ki a visszacsatolt szabályozási rendszert, hogy az megfeleljen az előzetesen megfogalmazott elvárásoknak. A feladat tehát, autonóm esetben megtalálni az

⁴ Az angol nyelvű szakirodalomban „basin of attraction” vagy „region of attraction” kifejezésekkel találkozhatunk

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (15)$$

rendszerhez azt az $\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$ statikus, vagy $\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{z}, \mathbf{x})$ dinamikus visszacsatolást, amellyel az

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) \quad (16)$$

zárt rendszer $\mathbf{x} = 0$ egyensúlyi pontja globálisan aszimptotikusan stabilis. A dinamikus visszacsatolásra példa az integráló szabályozás vagy az állapotbecslő alkalmazása. Ilyenkor $\mathbf{z}$, az $\mathbf{x}$ -el gerjesztett szabályzó

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{g}(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \quad (17)$$

állapotegyenletének a megoldása.

Felmerülhet a kérdés, hogy létezik-e egyáltalán olyan $\boldsymbol{\alpha}$ visszacsatolást, amellyel (15) stabilis. Egy nemlineáris rendszer globális asszimptotikus stabilizálhatóságának szükséges és elégséges feltételét, Ljapunov közvetlen stabilitásvizsgálati módszerének felhasználásával fogalmazhatjuk meg:

4. Tétel: Ha (15)-höz létezik sima⁵, pozitív definit, radiálisan korlátlan $V : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ függvény amelyre

$$\inf_{\mathbf{u} \in \mathfrak{R}} \left\{ \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \right\} < 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq 0 \quad (18)$$

akkor $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ globálisan, aszimptotikusan stabilizálható, $V(\mathbf{x})$ -et pedig (15) kontrol Ljapunov függvényének (CLF⁶) nevezzük. Ekkor létezik olyan $\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$ visszacsatolás, mellyel a visszacsatolt rendszerre

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})) \leq -W(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n \quad (19)$$

ahol $W(\mathbf{x})$ pozitív definit.

A megfelelő visszacsatolás megtervezése, és a 4. Tételt kielégítő $V(\mathbf{x})$, $W(\mathbf{x})$ függvények megtalálása nemlineáris rendszerek esetén általában nehéz feladat. Szerencsére skaláris rendszereknél a $V(x) = \frac{1}{2}x^2$ választással a (19) feltétel viszonylag könnyen teljesíthető.

A következőekben a cikk – a teljesség igénye nélkül – röviden bemutat néhány ismertebb, linearizáláson alapuló tervezési módszert, majd két olyan nemlineáris szabályzó-tervezési eljárást, melyekkel az utóbbi időben egyre gyakrabban találkozhatunk a pilóta nélküli légi járművek automatizálásával foglalkozó szakirodalmakban és kutatásokban [5].

⁵ Az f sima függvény, ha tetszőleges rendű parciális deriváltjai folytonosak.

⁶ CLF: Control Lyapunov Function

Linearizálás

Kézenfekvő és egyben gyakori megoldás, a Ljapunov első stabilitási kritériumában (1. Tétel) is alkalmazott munkaponti linearizálás, melynél az egyensúlyi pont környezetében lineárisan közelített rendszerre valamilyen hagyományos lineáris szabályzó-tervezési eljárást alkalmazunk. A módszer hátránya, hogy globális stabilitást általánosságban nem biztosít és az egyensúlyi pont vonzódási környezetéről sem ad információt.

Ezt a módszert továbbfejleszthetjük és egyben a szabályzó működési tartományát kiterjeszthetjük, ha a linearizálást és lineáris szabályzótervezést a rendszer több működési pontjában is elvégezzük, majd üzem közben tartományról-tartományra haladva a különböző szabályzó paraméterek között folyamatosan interpolálunk vagy egyszerűen kapcsolgatunk. Ezt a módszert „gain-scheduling” technikának nevezzük.

A nemlineáris rendszerek bizonyos típusainál, egy másik, visszacsatoláson alapuló linearizálási módszert is alkalmazhatunk. A rendszert ebben az esetben koordináta transzformációval és algebrai átalakításokkal a visszacsatoláson keresztül, a bemenet-állapotváltozók vagy a bemenet-kimenet viszonylatában részlegesen vagy teljesen lineárisá alakítjuk, a további kompenzációt pedig már valamilyen lineáris szabályzó-tervezési eljárással (pólus áthelyezés, LQR, stb...) folytatjuk. A visszacsatolás történhet az állapotváltozókról közvetlenül vagy a rendszer kimenetéről. Az első esetben a teljes állapotegyenletet lineárisá válik, a másodikban viszont csak a bemenet és a kimenet közötti lineáris kapcsolat biztosított, így előfordulhat, hogy az állapotegyenlet részlegesen nemlineáris marad. Ez stabilitási problémákat okozhat. A módszer további hátránya, hogy érzékeny a paraméterbizonytalanságokra, mivel feltételezi az állapotegyenlet pontos ismeretét [4][5][7][8][10].

Backstepping

A visszalépéses (Backstepping) szabályzó-tervezési eljárás alapötlete, hogy az adott kiindulási rendszert kisebb alrendszerekre bontva, majd az egyes alrendszerekhez virtuális szabályzó bemeneteket és kontrol Ljapunov függvényeket definiálva, rekurzív módszerrel megtalálható az a vezérlési törvény, amely biztosítja a teljes rendszer stabilitását. A technika egy egyszerű példával szemléltethető. Tekintsük az

$$\dot{x}_1 = \cos x_1 - x_1^3 + x_2 \quad (20a)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (20b)$$

másodrendű rendszert, melynek blokkvázlata a 4a. ábrán látható. Ha a (20a) alrendszerben x_2 lenne a bemenet, és találnánk egy olyan $x_2 = \phi(x_1)$ visszacsatolást valamint $V(x_1)$ és $W(x_1)$ függvényeket, amelyekkel teljesül a (19) feltétel, az

$$\dot{x}_1 = \cos x_1 - x_1^3 + \phi(x_1) \quad (21)$$

alrendszer egyensúlyi pontja aszimptotikusan stabilis lesz. Például a $\phi(x_1) = -\cos x_1 - c_1 x_1$ vezérlési törvénnyel, ahol c_1 konstans, és a $V(x) = \frac{1}{2}x^2$ CLF választással a visszacsatolt (20a) rendszer állapotegyenlete

$$\dot{x}_1 = f(x_1) = \cos x_1 - x_1^3 - \cos x_1 - c_1 x_1 = -x_1^3 - c_1 x_1 \quad (22)$$

lenne, amivel

$$\dot{V}(x_1) = \frac{\partial V}{\partial x_1} f(x_1) = x_1(-x_1^3 - c_1 x_1) = -x_1^4 - c_1 x_1^2. \quad (23)$$

$W(x_1) = x_1^4 + c_1 x_1^2$ választással a $\dot{V}(x_1) \leq -W(x_1)$ feltétel teljesül, így az $x_1 = 0$ stabil egyensúlyi pont.

Természetesen x_2 nem valódi bemenet, hanem a (20) rendszer egy állapotváltozója, azonban az x_1 stabilizálásához szükséges értékét már ismerjük. $\alpha(x_1)$ -et hozzáadva és kivonva a (20a) alrendszer állapotegyenletéből, az eredetivel ekvivalens rendszert kapunk (4b. ábra), melyet a

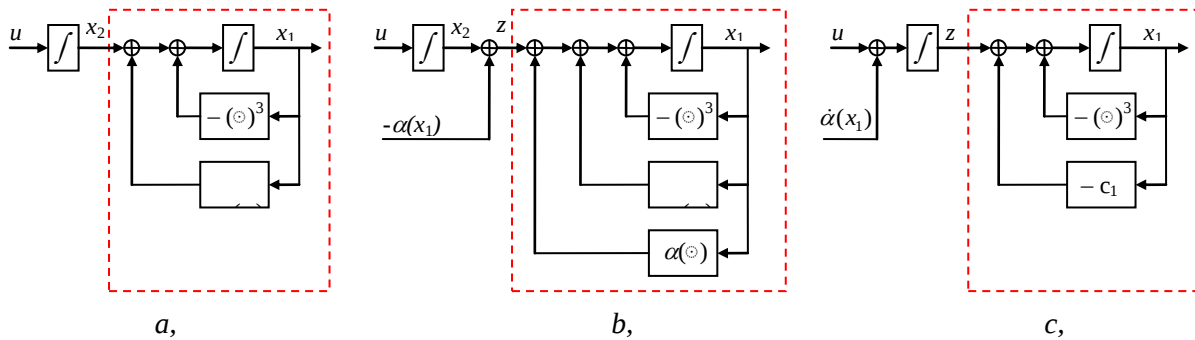
$$z = x_2 - \hat{x}_2 = x_2 - \alpha(x_1) = x_2 - c_1 x_1 + \cos x_1 \quad (24)$$

hibajel bevezetésével felírunk az (x_1, z) koordináta rendszerben:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_{x_1}(x_1, z, u) = \cos x_1 - x_1^3 + [x_2 + \cos x_1 + c_1 x_1] - \cos x_1 - c_1 x_1 = -x_1^3 - c_1 x_1 + z \\ \dot{z} &= f_z(x_1, z, u) = \dot{x}_2 - \dot{\alpha}(x_1) = u + (c_1 - \sin x_1)(-c_1 x_1 - x_1^3 + z) \end{aligned} \quad (25)$$

Itt felhasználtuk, hogy $\dot{\alpha}(x_1)$ könnyen számolható, mivel $\alpha(x_1)$ ismert függvény:

$$\dot{\alpha}(x_1) = \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \dot{x}_1 = -(c_1 - \sin x_1)(c_1 x_1 - x_1^3 + z) \quad (26)$$



4. ábra. a., A (17) rendszer blokkvázlata; b., az $\alpha(x_1)$ visszacsatolás és a z hibajel bevezetésével; c., visszalépés az integrátor elé, $\dot{\alpha}(x_1)$ bevezetése

$\dot{\alpha}(x_1)$ bevezetésével tulajdonképpen a 4b. ábra $-\alpha(x_1)$ jelét fejezzük ki az integrátoron „visszalépve” (4c. ábra), ami a backstepping technika egyik fő mozzanata. A következő lépés, megkonstruálni azt a

$V(x_1, x_2)$ függvényt és $u = \alpha(x_1, x_2)$ vezérlési törvényt, amelyre teljesül a (19) feltétel. $V(x_1)$ -et kiegészítve a z hibajel négyzetével

$$V(x_1, x_2) = V(x_1) + \frac{1}{2} z^2 = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} (x_2 + c_1 x_1 + \cos x_1)^2 \quad (27)$$

lesz, melynek idő szerinti deriváltja a (25) rendszer megoldásai mentén a következőképpen adódik:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, z, u) &= \frac{\partial V}{\partial x_1} f_{x_1}(x_1, z, u) + \frac{\partial V}{\partial x_1} f_z(x_1, z, u) = \\ &= x[-x_1^3 - c_1 x_1 + z] + z[u + (c_1 - \sin x_1)(-c_1 x_1 - x_1^3 + z)] \end{aligned} \quad (28)$$

Ezek után már csak az u bemenetet kell úgy megválasztani, hogy a $\dot{V}(x_1, z)$ függvény negatív definit legyen. Ennek egy lehetséges módja, ha

$$u = -x_1 - c_2 z - (c_1 - \sin x_1)(-c_1 x_1 - x_1^3) \quad c_2 > c_1 + 1 \quad (29)$$

amivel

$$\dot{V}(x_1, z) = -x_1^4 - c_1 x_1^2 - (c_2 - c_1 - \sin x_1) z^2 \quad (30)$$

A (30) kifejezés alapján az (x_1, z) koordináta rendszerben a $(0, 0)$, valamint ennek megfelelően az (x_1, x_2) koordináta rendszerben a $(0, -1)$ egyensúlyi pont globálisan aszimptotikusan stabilis.

A visszalépéses tervezés megfelelő szabadsági fokot biztosít a szabályozás minőségi jellemzőinek hangolásához valamint a paraméterbizonytalanságokkal szembeni robosztus viselkedés is biztosítható. A fenti példában bemutatott iteratív módszer magasabb foksámú rendszerekre is hasonlóan alkalmazható, bár a visszalépések számával együtt a visszacsatolásban szereplő tagok száma rohamosan nő. További hátránya, hogy csak adott struktúrával rendelkező, ún. szigorú visszacsatolásos (strict-feedback) alakban felírható rendszerekre alkalmazható [3][10][12][13].

Állapotfüggő Riccati egyenlet (SDRE⁷)

Az állapotfüggő Riccati egyenlet megoldásán alapuló szabályzó tervezési eljárás az LQR⁸ módszer nemlineáris rendszerekre történő kiterjesztéseként fogható fel. A

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}(\mathbf{x}) \mathbf{u}) dt \quad (31)$$

célfüggvény minimalizálását ebben az esetben az

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (32)$$

⁷ SDRE: State Dependent Riccati Equation

⁸ LQR: Linear Quadratic Regulator

nemlineáris rendszert tekintve kell megoldani. Ehhez (32)-at lineáris, állapotfüggő együtthatós (SDC⁹) formában adjuk meg

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (33)$$

majd minden egyes mintavételi pillanatban a kapott $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$, valamint a szabályozási kritériumoknak megfelelően megválasztott $\mathbf{Q}$ és $\mathbf{R}$ súlyozó mátrixokkal megoldjuk az így szintén állapotfüggő

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{x})\mathbf{P}(\mathbf{x}) + \mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}) - \mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}^T(\mathbf{x})\mathbf{P}(\mathbf{x}) + \mathbf{Q}(\mathbf{x}) = 0 \quad (34)$$

Riccati egyenletet. A kapott $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ megoldásból már felírható a (31) (32) tekintetében általában szuboptimális vezérlési törvény:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{x} = -\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}^T(\mathbf{x})\mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{x} \quad (35)$$

A (32) nemlineáris rendszernek számos (33) szerinti formája létezhet, a megfelelő SDC alak kiválasztása azonban az optimalitás és szabályzó minőségi jellemzőinek szempontjából kulcsfontosságú. Tekintsük a következő másodrendű rendszert:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_1 x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_1 u \end{aligned} \quad (36)$$

A költségfüggvény legyen $\mathbf{R} = 2\mathbf{I}$ és $\mathbf{Q} = 0,2$ súlyozó mátrixokkal (31) szerint definiálva ($\mathbf{I}$ 2x2-es egységmátrix). A (36) rendszer egy lehetséges SDC faktorizációja az

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -1 + x_2^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (37)$$

mátrixokkal adott. Az SDRE módszer ezzel a felbontással nem vezet eredményre, a (33) egyenletet nem lehet megoldani, mivel az $[\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{B}(\mathbf{x})]$ páros nem irányítható semmilyen $\mathbf{x}$ értékre sem. Egy másik lehetséges SDC alak az

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -1 & x_1 x_2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

Az ezzel a felbontással kapott $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ visszacsatolás bár stabil zárt rendszert eredményez, a vezérlés nem optimális. A valóban optimális megoldás a kevésbé kézenfekvő

⁹ SDC: State-Dependent Coefficient

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -1 & x_1 x_2 \\ -x_1 x_2 & -1 + x_1^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (39)$$

felbontással adódik. Általánosságban is elmondható, hogy az optimális visszacsatolást eredményező SDC faktorizáció megtalálása az egyszerűbb esetek kivételével nehéz feladat.

Az SDRE szabályzó-tervezési módszer előnye, hogy a nemlineáris rendszerek tekintetében széleskörűen alkalmazható, szisztematikus eljárás. A számos lehetséges SDC felbontás a tervező számára elegendő szabadságfokot biztosít, az optimális megoldás azonban általában nem kézenfekvő. Bár számos kérdés még nyitott a módszer globális stabilitásvizsgálatának és robosztus viselkedésének elméletével kapcsolatban, a gyakorlati alkalmazások, kísérletek és szimulációk az LQR szabályzókra jellemző kedvező viselkedést mutatnak. További előnyös tulajdonság a súlyozó mátrixok állapotfüggő hangolásának lehetősége, amivel az állapottér különböző tartományaiban lehetőség van eltérő szabályzójellemzők kialakítására [7][8][10].

ÖSSZEFOGLALÁS

A pilótánélküli légi járművek egyre nagyobb teret hódítanak maguknak mindennapi életünkben. Ezekről a bonyolult, nemlineáris mechanikai rendszerektől elvárjuk a biztonságos üzemelést valamint a számos automatikus repülési és egyéb funkció pontos és hatékony végrehajtását. Az UAV-k fedélzeti szabályzó rendszereinek tehát egyre szigorodó minőségi követelményeknek kell megfelelniük, amit gyakran csak nemlineáris rendszeranalízis és nemlineáris szabályzó-tervezési eljárások alkalmazásával lehet teljesíteni. Bár e terület a több évtizedes gyakorlati tapasztalattal rendelkező lineáris szabályzóelmélethez képest kevesebb alkalmazással és kiforrottabb elméleti háttérrel rendelkezik, a szakirodalom az utóbbi időben egyre több kutatási eredményről számol be.

FELHASZNÁLT IRODALOM

- [1] **PALIK M.:** *Pilóta nélküli repülés - Légi közlekedésbiztonság*, Repüléstudományi közlemények különszám, 2008.
- [2] **SZABOLCSI R.:** *Modern szabályozástechnika*, Egyetemi Jegyzet, Budapest 2004.
- [3] **LANTOS B.:** *Irányítási rendszerek elmélete és tervezése II.*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 2001.
- [4] **H. K. KHALIL:** *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, New Jersey, 2002.
- [5] **M. KRISTIC, I. KANELLAKOPOULIS, P. KOKOTOVIC:** *Nonlinear and Adaptive Control Design*, Wiley & Sons, New York, 1995.
- [6] **J. DAHLGREN:** *Robust nonlinear control design for a missile using backstepping*, Thesis, Institutionen för Systemteknik Linköping, 27th January 2003.
- [7] **E. B ERDEM:** *Analysis and Real-time Implementation of State-dependent Riccati Equation Controlled Systems*, Thesis, University of Illinois, 2001.
- [8] **S. KATSEV:** *Streamlining of the State Dependent Riccati Equation Controller Algorithm for an Embedded Implementation*, Thesis, Rochester Institute of Technology, 2006.
- [9] **TURÓCZI A.:** *Négyszoros pilóta nélküli helikopter fedélzeti automatikus repülésszabályzó rendszerének tervezése*, Hadmérnök, Különszám: Robothadviselés 6, <http://zrinyi.zmne.hu/hadmernok/>
- [10] **K. D. HAMMET:** *Control of Nonlinear Systems via State Feedback State-Dependent Riccati Equation Techniques*, Dissertation, Air Force Institute of Technology, 1997.
- [11] **C. KRAVARIS:** *Input /Output Linearization: A Nonlinear Analog of Placing Poles at Process Zeros*, AIChE Journal November 1988 Vol. 34, No. 11.
- [12] **Y. ZHANG, S. LI:** *Backstepping-based Decentralized PID Controller Design for MIMO Processes*, Acta Automatica Sinica Vol. 31, No. 5, September 2005.
- [13] **A. JADBABAIE:** *Receding Horizon Control of Nonlinear Systems: A Control Lyapunov Function Approach*, Thesis, California Institute of Technology Pasadena, California 2000.