

Inerciális navigációs rendszerek II.

A Repüléstudományi Közlemények 2008/2 számában megjelent Inerciális navigációs rendszerek I. folytatásaként a cikkben a gyorsulásmérők alapegyenleteit vizsgálom meg a forgó és nem forgó koordináta rendszerben, valamint a Schuler-ingát.

1. A gyorsulásmérők egyenletei. A Schuler-inga.

1.1 Az ideális gyorsulásmérők egyenletei a nem forgó koordináta rendszerben

Az $\bar{a}(t)$ vektor abszolút gyorsulása egyenlő az $\bar{R}(t)$ rádiusz vektor második deriváltjával az idő szerint¹ az inerciális rendszerhez képest

$$\bar{a}(t) = \frac{d^2 \bar{R}(t)}{dt^2} \quad (1 \text{ sz. egyenlet})$$

Ha valamely előre kiválasztott inerciális koordináta rendszer egységvektorai x_i, y_i, z_i az x, y, z nem forgó koordináta rendszer egységvektoraira kollineárisak, akkor

$$\begin{aligned} R_{x_i}(t) &= R_x(t) \\ R_{y_i}(t) &= R_y(t) \\ R_{z_i}(t) &= R_z(t) \end{aligned}$$

Az előzőből következik

$$\bar{a}(t) = \frac{d^2 \bar{R}(t)}{dt^2} = \frac{\bar{d}^2 \bar{R}(t)}{dt^2} \quad (2 \text{ sz. egyenlet})$$

ahol:

$\frac{\bar{d}^2 \bar{R}(t)}{dt^2}$ - az $\bar{R}(t)$ második deriváltja az x, y, z koordináta rendszerhez képest

Világos, hogy az (2) egyenletnek van értelme az x_i, y_i, z_i és $Oxyz$ koordináta rendszerek tengelyeinek bármilyen elhelyezkedése esetén, mivel az (2) értelme abból következik, hogy az x, y, z koordináta rendszer $\bar{\omega}^{(0)}(t)$ szögsebessége egyenlő nullával.

Így az axelerométerek mozgásegyenlete megegyezik alakilag az inerciális koordináta rendszerben felírt egyenletrendszerrel a nem forgó koordináta rendszerben.

$$\bar{w}(t) = \bar{R}(t) - \bar{g}(t) \quad (1 \text{ sz. egyenlet})$$

vagy koordinátás alakban

$$w_x(t) = \frac{d^2 R_x(t)}{dt^2} - g_x(t)$$

$$w_y(t) = \frac{d^2 R_y(t)}{dt^2} - g_y(t)$$

$$w_z(t) = \frac{d^2 R_z(t)}{dt^2} - g_z(t) \quad (4 \text{ sz. egyenlet})$$

Tehát, ha az axelerométerek valamilyen berendezés segítségével az x, y, z nem forgó koordináta rendszer tengelyei mentén lennének elhelyezve, akkor az ő jelzéseik $w_x(t), w_y(t)$ és $w_z(t)$ a (4) egyenlettel lenne egyenlő (vagy másképpen a (4) egyenletrendszer megadja az axelerométerek jelzéseit abban az esetben, ha azok tengelyeit a nem forgó koordináta rendszer tengelyei szerint állítjuk be).

Az axelerométerek stabilitása az x, y, z nem forgó koordináta rendszer tengelyei mentén elérhető,

például úgy, hogy elhelyezzük őket egy alapra, a térben teleszkópok segítségével stabilizálva, amelyek a csillagokra vannak orientálva vagy szabad giroszkópok (pörgettyűk) segítségével. Világos, hogy az objektum $\vec{R}(t)$ rádiusz-vektorának, vagyis az ő három vetületének, $R_{x_i}(t) = R_x(t)$, $R_{y_i}(t) = R_y(t)$, $R_{z_i}(t) = R_z(t)$ teljes egészében megoldja a navigációs feladatot az objektum koordinátáinak meghatározását a Földhöz képest. (Később majd bemutatjuk, hogyan lehet a rádiusz-vektortól $\vec{R}(t) = iR_x(t) + jR_y(t) + kR_z(t)$ áttérni az objektum földrajzi koordinátáihoz: a szélességéhez és a hosszúságához, valamint a többi koordinátához).

Az $\vec{R}(t)$ illetve annak tengely vetületeit meghatározva megkapjuk a repülőgép tartózkodási helyének koordinátáit. Az $\vec{R}(t)$ meghatározható az axelerométerek $\vec{w}(t)$ jelzése alapján (amely az axelerométerektől jön, nem forgó alapon van elhelyezve) két módszer szerint lehet végrehajtani. Az első megoldásnál abból indulnak ki, hogy valamilyen műszerek segítségével, amelyek a mozgó objektum fedélzetén vannak elhelyezve, az axelerométereken kívül a fedélzeten ellenőrző műszerek segítségével meghatározható $\vec{g}(t)$ vektor. Így például a $\vec{g}(t)$ vektor a repülőgép fedélzetén megállapítható, az iránya valamilyen műszer szerinti függőleges segítségével, értéke szerint pedig ezt a vektort a földközeli repüléseknél állandónak vehetjük és egyenlő $9,81 \text{ m/s}^2$.

A Földtől nagyobb távolságban a $\vec{g}(t)$ vektor értékét tekintve a magasságmérő segítségével számíthatjuk ki az ismert formula alapján $g = \frac{\mu}{R^2}$, ahol μ - a Föld tömegvonzásának állandója.

Ebben az esetben a repülőgép rádiusz-vektora $\vec{R}(t) = iR_x(t) + jR_y(t) + kR_z(t)$ és a repülőgép fedélzetén a gravitációs mező intenzitása esetében $\vec{g}(t) = ig_x(t) + jg_y(t) + kg_z(t)$ és az ismert kezdeti feltételekből $\vec{R}(t_0)$ és $\dot{\vec{R}}(t_0)$ megkaphatjuk, ha az (4) egyenletből kiindulunk, tehát:

$$\begin{aligned} R_x(t) &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_1} [a_x(\tau) - g_x(\tau)] d\tau d\tau_1 + \dot{R}_x(t_0)(t - t_0) + R_x(t_0) \\ R_y(t) &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_1} [a_y(\tau) - g_y(\tau)] d\tau d\tau_1 + \dot{R}_y(t_0)(t - t_0) + R_y(t_0) \\ R_z(t) &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_1} [a_z(\tau) - g_z(\tau)] d\tau d\tau_1 + \dot{R}_z(t_0)(t - t_0) + R_z(t_0) \end{aligned} \quad (5 \text{ sz. egyenlet})$$

Az inerciális navigációs rendszerek amelyben a mozgó objektum koordinátái (az $\vec{R}(t)$ rádiusz vektora), az axelerométerek mutatása alapján lehet meghatározni, amely stabilizált alapon van elhelyezve más ismert műszerektől, kivéve az axelerométereket, a gravitációs mező intenzitásának $\vec{g}(t)$ vektorával, nyitott navigációs rendszernek nevezzük. Áttérünk a második módszer tárgyalására.

Megállapítható-e az $\vec{R}(t)$ rádiusz vektor a mozgó objektum axelerométereinek mutatása alapján, amelyek a nem mozgó alapon vannak elhelyezve, ha az objektum tartózkodási pontjában a gravitációs mező $\vec{g}(t)$ intenzitásáról nincs semmilyen információnk. Valóban ha feltételezzük, hogy a repülőgép a centrális (központi) gravitációs mezőben mozog, akkor a $\vec{g}(t)$ vektort az $\vec{R}(t)$ -n keresztül kaphatjuk meg.

$$\vec{g}(t) = -\frac{g}{R}\vec{R}(t) \quad (6 \text{ sz. egyenlet})$$

Ebben az esetben az axelerométerek egyenlete, amely nem forgó alapon van elhelyezve a következő képpen írható fel:

$$\vec{w}(t) = \vec{a}(t) - \vec{g}(t) = \frac{d^2\vec{R}(t)}{dt^2} + \frac{g}{R}\vec{R}(t) \quad (7 \text{ sz. egyenlet})$$

Az (7) egyenletből amely vektoriális alakban van felírva kapjuk, hogy a keresett objektum $\vec{R}(t)$ rádiusz vektora a következő integrális alak formájában írható fel:

$$\vec{R}(t) = \vec{R}(t_0) + \dot{\vec{R}}(t_0)(t - t_0) + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_1} \left[\vec{w}(\tau) - \frac{g}{R}\vec{R}(\tau) \right] d\tau d\tau_1 \quad (8 \text{ sz. egyenlet})$$

Az (8) egyenlet koordinátás alakban a következő:

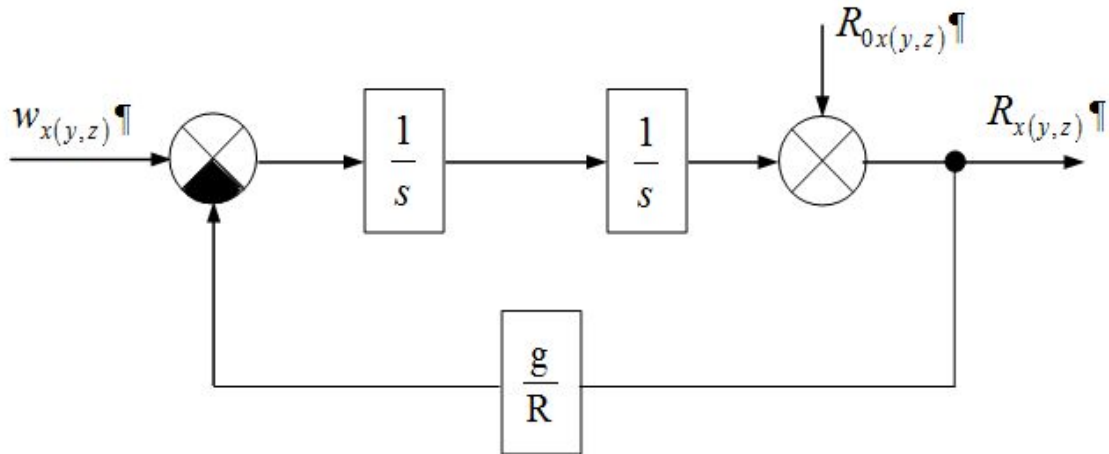
$$R_x(t) = R_x(t_0) + \dot{R}_x(t_0)(t - t_0) + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_1} \left[w_x(\tau) - \frac{g}{R} R_x(\tau) \right] d\tau d\tau_1$$

$$R_y(t) = R_y(t_0) + \dot{R}_y(t_0)(t - t_0) + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_1} \left[w_y(\tau) - \frac{g}{R} R_y(\tau) \right] d\tau d\tau_1$$

$$R_z(t) = R_z(t_0) + \dot{R}_z(t_0)(t - t_0) + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_1} \left[w_z(\tau) - \frac{g}{R} R_z(\tau) \right] d\tau d\tau_1$$

(9 sz. egyenlet)

Az $\bar{R}(t)$ meghatározására a (9) egyenletből a következő hatásvázlat rajzolható fel (1. ábra), ahol $R_{0x(y,z)} = R_{x(y,z)}(t_0) + \dot{R}_{x(y,z)}(t_0)(t - t_0)$



1. ábra. Hatásvázlat az $\bar{R}(t)$ meghatározására

Ez a hatásvázlat három csatornával rendelkezik, amely az $\bar{R}(t)$ rádiusz vektor minden egyes vetületének a kiszámítására megfelel. Ha csak a földközeli navigációt vizsgáljuk, amikor az objektum repülési magassága a Föld R_F rádiuszához (sugarához) képest annyira kicsi, hogy a $\frac{H}{R_F}$ érték változása $\frac{g_F}{R_F}$ nem haladja meg az 1-3%-ot, akkor az 1. ábra visszacsatolási állandója (tényezője), amely egyenlő $\frac{g_F}{R_F}$, ahol g_F - a gravitációs mező intenzivitása a Föld közelében.

Figyelembe véve, hogy a

$$\frac{g}{R} = \frac{\mu}{R^3} = \frac{\mu}{(R_F + H)^3} \approx \frac{\mu}{R_F^3} \left[1 - \frac{3H}{R_F} \right] = \frac{g_F}{R_F} \left[1 - \frac{3H}{R_F} \right]$$

akkor kapjuk, hogy ha a $\frac{3H}{R_F} < 1 \div 3\%$ vagy $H < 21 \div 63 \text{ km}$ akkor a $\frac{g}{R}$ érték nem változik több mint 1-3%-kal.

Ebben az esetben az objektum $\bar{R}(t)$ rádiusz vektorának a kiszámítása, csak az axelerométerek $\bar{w}(t)$ mutatása (jelzése) alapján történik, amelyek a nem forgó alapon vannak elhelyezve, más műszerek mutatásának bevonása nélkül a számító egység segítségével, amelynek a hatásvázlata az 1. ábrán $\frac{g_F}{R_F} = \text{Const}$

látható állandó visszacsatolási tényezője esetén, amely egyenlő $\frac{g_F}{R_F}$.

Ez a számító egység három csatornával rendelkezik, amelyek közül mindegyik egy lengő tag amely a stabilitás határán van.

A lengések körfrekvenciája:

$$\omega = \sqrt{\frac{g_F}{R_F}}$$

Ezen lengések periódus ideje:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R_F}{g_F}} = 84,4 \text{ perc}$$

amelyet Schuler-periódusnak szokás nevezni.

Az inerciális navigációs rendszerek, amelyekben a mozgó objektum koordinátái (az $\bar{R}(t)$ rádiusz vektora) csak az axelerométerek mutatása alapján lehet meghatározni, amely stabilizált alapon van elhelyezve, ekkor a gravitációs mező $\bar{g}(t)$ vektorának intenzitása kompenzálódik az objektum koordinátáinak a kiszámított axelerométerek mutatásának segítségével.

A

$$\bar{g}(t) = -\frac{g_F}{R_F} \bar{R}(t)$$

zárt inerciális navigációs rendszernek nevezzük.

Tehát a következő eredményt kaptuk:

A zárt inerciális navigációs rendszerben az objektum pillanatnyi koordinátáinak meghatározása az axelerométerek jelei alapján történik, amelyek stabilizált alapon vannak elhelyezve az inerciális térhez

képest, a lengő tagok bemenetére, amelyek saját lengéseinek periódusa $2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$.

Ekkor ezen tagok kimenetén a jelek a mozgó objektum $\bar{R}(t)$ rádiusz vektorának vetületeivel lesznek egyenlők $R_x(t), R_y(t), R_z(t)$. Ez az utóbbi állítás a Schuler-tétel elnevezést viseli.

Megjegyzés:

Az inerciális navigációs rendszer mint a nyitott, úgy a zárt típusa három alapvető elemet tartalmaz:

- axelerométer egységet;
- koordináta rendszert realizáló berendezést a repülőgép fedélzetén (ebben az esetben nem forgó koordinátarendszert);
- számító egységet.

A zárt inerciális koordináta rendszer számító egysége egy dinamikai rendszert mutat be (lengő tag), amely a stabilitás határán helyezkedik el. Ez nem a számító egység technikai megvalósításával van kapcsolatban, hanem a zárt inerciális rendszer munkájának létezésével. Ez az axelerométer alapvető egyenletéből következik. Később majd lesz róla szó, hogy ez a helyzet a reális inerciális navigációs rendszerek munkájának minőségére nincs nagy hatással.

Végül megemlíjtjük, hogy mint a nyitott, úgy a zárt inerciális navigációs rendszerek esetében az axelerométerek, nem feltétlenül szükséges, hogy stabilizált alapon legyenek elhelyezve. Bármilyen alapon el lehet őket helyezni, amelyek az objektumon vannak, bármilyen térbeli mozgást feltételezve, tehát akár az objektumon is elhelyezhetők.

Ekkor a mutatások (jelzések) vektorai², bármilyen elhelyezési módszer alapján egyenlők lesznek és $\bar{w} = \bar{a} - \bar{g}$.

De ebben az esetben szükség van egy berendezésre, amely az axelerométerek mutatása $\bar{w}(t)$ alapján, ha az objektum fedélzetén a nem mozgó koordináta rendszer megvalósításával kiszámolnánk a $\bar{w}(t)$ vektor $w_x(t), w_y(t), w_z(t)$ vetületeit ezen koordinátarendszer x, y és z tengelyeire.

A további vizsgálódásaink során, nem fogjuk mindig megbeszélni ezt a helyzetet és figyelembe kell venni, hogy a kifejezés: "az axelerométerek, amelyek az alapon vannak elhelyezve és az x, y, z koordináta rendszerhez képest stabilizálva vannak" nem szó szerint kell értelmezni, hanem azon értelmezés alapján, hogy az axelerométerek az alaptól külön is elhelyezhetők. Elsősorban a számító egység segítségével határozzuk meg a $\bar{w}(t)$ vektor $w_x(t), w_y(t), w_z(t)$ vetületeit.

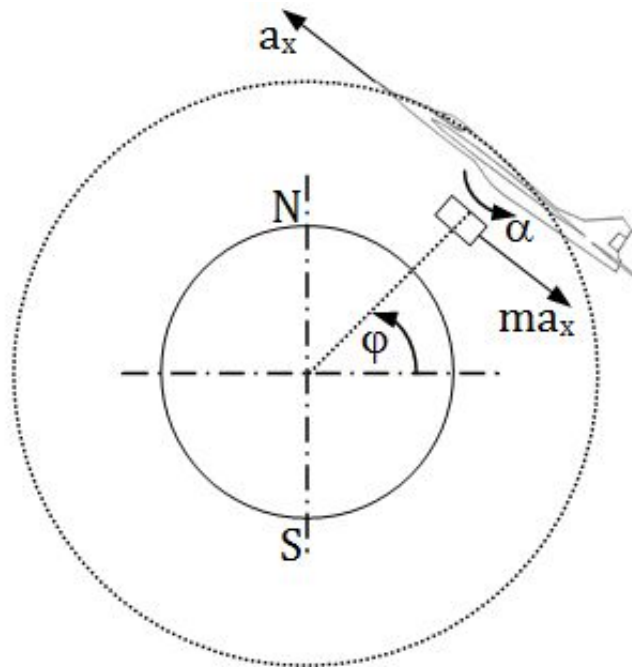
1.2 A Schuler-inga

A zárt inerciális navigációs rendszerek hibája az alap pontatlan stabilizálásából ered. Ez arra vezethető vissza, hogy a függőleges irányt megadó inga nem a valódi, hanem a látszólagos függőleges irányába áll be. Szükségessé vált olyan inga alkalmazása, amelyet az alapa ható gyorsulások nem zavarnak. Ezt először Max Schuler 1923-ban fogalmazta meg.

Az ilyen inga egyensúlyi helyzetbe beállítva, attól akkor sem tér el, ha a felfüggesztési pontra gyorsulások hatnak, így ez az inga mindig a valódi függőleges irányt adja meg. A 2. ábrán az α - az inga elfordulása a tengely felfüggesztése körül. Az egyszerűsítések feltételezése végett:

- a felfüggesztési pont α_x gyorsulással mozog a nagy kör mentén;

- a földet gömb alakúnak fogjuk fel, és a vonzásmezejét központiak (centrikusnak) vagyis a \vec{g} a Föld középpontja felé mutat;
- feltételezzük, hogy a Föld nem forog;
- az inga lengési síkja egybeesik a mozgás síkjával.



2. ábra

Az inga mozgását leíró differenciál egyenlet:

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = mla \quad (10 \text{ sz. egyenlet})$$

ahol:

m - az inga tömege

l - a felfüggesztés tengelye és az inga tömegközéppontjának távolsága

$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = \alpha_2$ - az inga elfordulásának szöggyorsulása

J - az inga inerciális nyomatéka a felfüggesztési tengelyhez képest

Az inga elfordulásának szöggyorsulása:

$$\alpha_2 = \frac{mla}{J} \quad (11 \text{ sz. egyenlet})$$

A felfüggesztési pont mozgása során a pontot a föld középpontjával összekötő függőleges irány szöggyorsulása

$$\varphi_2 = \frac{a}{R_F} \quad (12 \text{ sz. egyenlet})$$

hányszorosával határozható meg, ha a repülési magasságot a Föld sugarához képest elhanyagoljuk ($R_F + h \approx R_F$).

Ahhoz, hogy a gyorsuló mozgások esetén a felfüggesztés tengelye mindig megegyezzen a függőleges iránnyal, az inga elfordulásának szöggyorsulása meg kell hogy egyezzen a függőleges elfordulásának szöggyorsulásával $\alpha_2 = \varphi_2$

Ebben az esetben

$$\frac{mla}{J} = \frac{a}{R_F} \Rightarrow \frac{ml}{J} = \frac{1}{R_F} \quad (13 \text{ sz. egyenlet})$$

A (13) egyenlet független a felfüggesztési pontra ható gyorsulástól. A fizikai inga lengési ideje:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgFl}} \quad (14 \text{ sz. egyenlet})$$

Mivel a (13) egyenletből $R_F = \frac{J}{ml}$ ezért

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R_F}{gF}} = 2 \cdot 3,14 \cdot \sqrt{\frac{6371 \cdot 10^5}{9,81}} \approx 84,4 \text{ perc} \quad (15 \text{ sz. egyenlet})$$

Ha $l = R_F$ akkor az inga lengési periódusideje 84,4 perc.

Az inga helyzetét a felfüggesztésre ható gyorsulások az inga helyzetét nem fogják befolyásolni. Ez a Schuler-inga. Gyakorlatilag ilyen létrehozni nem lehet (ezért módszereket dolgoztak ki például: pörgettyűs berendezések segítségével lehet őket modellezni).

2. Az axelerométerek alapegyenletei a forgó koordináta rendszerben

Valamilyen x, y, z koordináta rendszer forogjon $\bar{\omega}^{(0)}$ szögsebességgel az inerciális térben. Mint ismeretes, bármely vektor $\bar{A}(t)$ abszolút deriváltja, ugyanezen vektor végének abszolút sebességével reprezentálható. Ez a sebesség áll a relatív sebességből $\frac{d\bar{A}(t)}{dt}$ és az átvitt sebességből $\bar{\omega}^{(0)} \times \bar{A}(t)$.

Következésképpen az $\bar{A}(t)$ vektor abszolút deriváltja, amelyet a továbbiakban $\frac{d\bar{A}(t)}{dt}$ -vel jelölünk, felírhatjuk a következő alakban:

$$\frac{d\bar{A}(t)}{dt} = \frac{d\bar{A}(t)}{dt} + \bar{\omega}^{(0)} \times \bar{A}(t) \quad (16 \text{ sz. egyenlet})$$

ahol: $\frac{d\bar{A}(t)}{dt}$ - az $\bar{A}(t)$ deriváltja az x, y, z koordináta rendszerhez képest

Ebben az esetben a $\frac{d\bar{R}(t)}{dt}$ abszolút deriváltjára az $\bar{R}(t)$ rádiusz vektorból kapjuk:

$$\frac{d\bar{R}(t)}{dt} = \frac{d\bar{R}(t)}{dt} + \bar{\omega}^{(0)} \times \bar{R}(t) \quad (17 \text{ sz. egyenlet})$$

Még egyszer felhasználva a (15) egyenletet a $\frac{d\bar{R}}{dt}$ vektorhoz, kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\bar{R}(t)}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \cdot \left[\frac{d\bar{R}(t)}{dt} \right] = \frac{d}{dt} \cdot \left[\frac{d\bar{R}(t)}{dt} \right] + \bar{\omega}^{(0)} \times \frac{d\bar{R}(t)}{dt} = \\ &= \frac{d}{dt} \cdot \left[\frac{d\bar{R}(t)}{dt} + \bar{\omega}^{(0)} \times \bar{R}(t) \right] + \bar{\omega}^{(0)} \times \left[\frac{d\bar{R}(t)}{dt} + \bar{\omega}^{(0)} \times \bar{R}(t) \right] \end{aligned} \quad (18 \text{ sz. egyenlet})$$

A (18) egyenletet elementáris átalakítások után a következő alakban írható fel

$$\frac{d^2\bar{R}}{dt^2} = \frac{d^2\bar{R}(t)}{dt^2} + 2\bar{\omega}^{(0)} \frac{d\bar{R}(t)}{dt} + \bar{\varepsilon} \times \bar{R} + \bar{\omega}^{(0)} \times (\bar{\omega}^{(0)} \times \bar{R}) \quad (19 \text{ sz. egyenlet})$$

ahol:

$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}^{(0)}}{dt} = \frac{d\bar{\omega}^{(0)}}{dt} - \bar{\omega}^{(0)} \times \bar{\omega}^{(0)} = \frac{d\bar{\omega}^{(0)}}{dt}$ - pillanatnyi forgó gyorsulásvektor az xyz koordináta

rendszerhez képest.

A (19) egyenletben a $\frac{d}{dt}$ differenciálási szimbólum a viszonylagos xyz koordináta rendszer deriváltját jelenti.

A (19) egyenletet Coriolis elvnek hívják. Az egyenlet jobb oldalán minden vektor deriváltját az xyz viszonylagos koordináta rendszerhez képest vizsgáljuk.

A (19) egyenlet alapján megkapjuk az axelerométer alapegyenletét a viszonylagos koordináta rendszerben, amely az inerciális térben $\bar{\omega}^{(0)}$ szögsebességgel forog.

$$\begin{aligned} \bar{w}(t) &= \bar{a}(t) - \bar{g}(t) = \frac{d^2 \bar{R}}{dt^2} + \frac{g}{R} \bar{R}(t) = \\ &= \frac{d^2 \bar{R}}{dt^2} + 2 \cdot \bar{\omega}^{(0)} \times \frac{d\bar{R}(t)}{dt} + \bar{\varepsilon} \times \bar{R}(t) + \bar{\omega}^{(0)} \times [\bar{\omega}^{(0)} \times \bar{R}(t)] + \frac{g}{R} \bar{R} \end{aligned} \quad (20 \text{ sz. egyenlet})$$

A (20) egyenletben úgy, mint a (19) egyenletben, minden deriváltat az x, y, z viszonylagos koordináta rendszerhez képest vizsgáljuk, ezért az axelerométerek egyenletét (20) az axelerométerek egyenletének nevezik a viszonylagos (forgó) koordináta rendszerben.

Megjegyezzük, hogy az elméleti mechanikában a $\frac{d^2 \bar{R}}{dt^2}$ tagot viszonylagos gyorsulásvektornak, a $2\bar{\omega}^{(0)} \times \frac{d\bar{R}}{dt}$ tagot a Coriolis gyorsulásvektornak és az $\bar{\varepsilon}(t) \times \bar{R}(t) + \bar{\omega}^{(0)} \times [\bar{\omega}^{(0)}(t) \times \bar{R}(t)]$ tagot átvitt gyorsulásvektornak hívják.

A továbbiakban áttérünk az axelerométerek egyenleteire a konkrét koordináta rendszerekben.

3. A gyorsulásmérők egyenletei a vízszintes földrajzi koordináta rendszerben

Tételezzük fel az egyszerűség kedvéért, hogy a repülőgép mozgása közel állandó magasságon történik, vagyis $|\bar{R}(t)| \approx \text{Const.}$, amelyen egy vízszintes földrajzi alap és axelerométer van elhelyezve.

Ebben az esetben figyelembe véve, hogy az $\bar{R}(t)$ mindig megegyezik az xyz vízszintes földrajzi koordináta rendszer z tengelyével. Ekkor az $\bar{R}(t)$ deriváltja a kiválasztott koordináta rendszerben

$$\frac{d\bar{R}}{dt} = 0, \quad \frac{d^2 \bar{R}}{dt^2} = 0$$

A (20) egyenletből akkor következik:

$$\bar{w} = \bar{\varepsilon} \times \bar{R} + \bar{\omega}^{(0)} \times (\bar{\omega}^{(0)} \times \bar{R}) + \frac{g}{R} \bar{R}(t) \quad (21 \text{ sz. egyenlet})$$

A 4. ábrából³ megkaphatjuk, hogy az az xyz forgó vízszintes földrajzi koordináta rendszer pillanatnyi sebességének vetülete egyenlő:

$$\omega_x^{(0)} = -\frac{V_y}{R} = \frac{V_E}{R}$$

$$\omega_y^{(0)} = -\frac{V_x}{R} = \frac{V_N}{R} \quad (22 \text{ sz. egyenlet})$$

$$\omega_z^{(0)} = -\frac{V_y}{R \cos \varphi} \sin \varphi = \frac{V_E}{R} \operatorname{tg} \varphi$$

ahol:

V_E - a repülőgép abszolút sebessége, amely a keleti irányba mutat;

V_N - a repülőgép abszolút sebessége, amely az északi irányba mutat;

φ - a repülőgép tartózkodási helyének szélessége.

$$V_E = V_{EU} + R\omega_F \cos \varphi$$

ahol:

V_{EU} - a keleti útsebesség;

$R\omega_F \cos \varphi$ - a Föld (perifériás) kerületi sebessége.

Mivel $\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}^{(0)}}{dt}$, akkor a (22) egyenletből következik:

$$\varepsilon_x = \frac{V_E}{R}, \varepsilon_y = \frac{V_N}{R}, \varepsilon_z = \dot{\omega}_z \quad (23 \text{ sz. egyenlet})$$

Behelyettesítve az $\bar{\omega}^{(0)}$ vektor értékét a (22) és az $\bar{\varepsilon}$ vektor értékét a (23) egyenletekből a (21) egyenletbe és végrehajtva a vektoriális szorzásokat, kapjuk:

$$w_x = \dot{V}_N + \omega_z V_E = \dot{V}_N + \frac{V_E^2}{R} \operatorname{tg} \varphi$$

$$w_y = -\dot{V}_E + \omega_z V_N = -\dot{V}_E + \frac{V_E V_N}{R} \operatorname{tg} \varphi$$

$$w_z = g - \frac{v^2}{R} = g' \quad (24 \text{ sz. egyenlet})$$

Az axelerométerek ezen mutatóinak akkor lesz értelmük, ha az alap x, y és z tengelyei mentén lesznek elhelyezve, pontosan orientálva a vízszintes földrajzi koordináta rendszer xyz tengelyei mentén valamilyen eszközökkel. A w_x, w_y és w_z értékek (24), mint látható megkaphatjuk más módon is. Legyen az axelerométerek hármasa az objektum bármilyen alapján elhelyezve és tetszőlegesen forogjon az inerciális térhez képest. Ha a vektor mutatót $\bar{w} = \bar{a} - \bar{g}$ levetítjük a vízszintes földrajzi koordináta rendszer tengelyeire, akkor a vetületek értékei egyenlőek a (24) egyenletben leírtakkal.

4. A vízszintesen azimutálisan szabad alapra rögzített axelerométerek egyenletei

Az adott esetben a 4. ábrából kapjuk:

$$\omega_x^{(0)} = -\frac{V_y}{R}, \omega_y^{(0)} = \frac{V_x}{R}, \omega_z^{(0)} = 0 \quad (25 \text{ sz. egyenlet})$$

$$\varepsilon_x = -\frac{\dot{V}_y}{R}, \varepsilon_y = \frac{\dot{V}_x}{R}, \varepsilon_z = 0 \quad (26 \text{ sz. egyenlet})$$

Ha feltételezzük $|\bar{R}(t)| \approx \text{Const.}$, akkor $\dot{H} = 0$ és az (25), (26) egyenleteket behelyettesítve az (21) egyenletbe ($\dot{H} \neq 0$ esetén a (20) egyenletbe), kapjuk:

$$w_x = \dot{V}_x; w_y = \dot{V}_y; w_z = g - \frac{v^2}{R} = g' \quad (27 \text{ sz. egyenlet})$$

Nem nehéz megérteni, hogy ebben az esetben is (w_x, w_y, w_z) értékeket megkaphatjuk a mozgó objektum fedélzetén az axelerométer hármass mutatójának $\bar{w} = \bar{a} - \bar{g}$ levetítésével a vízszintesen azimutálisan szabad koordináta rendszer tengelyeire.

Abban az esetben, ha az axelerométerek az xyz vízszintesen azimutálisan szabad koordináta rendszer tengelyei stabilizáltak és az ő tengelyeinek érzékenysége egybeesik az x, y és z tengelyekkel, akkor az axelerométerek mutatója a (27) egyenlettel lesz egyenlő.

Megjegyezzük, hogy a gyakorlatban a fedélzetén az axelerométerek w_x, w_y, w_z vetületeinek mutatójának mérése bármilyen xyz koordináta rendszerben, általában ezeket az axelerométereket az alapon helyezik el, amelyet a kiválasztott koordináta rendszer tengelyi mentén irányítanak. Az axelerométer hármass mutatójának levetítési módszere, akárhogy is van elhelyezve az objektumon, az adott koordináta rendszer tengelyei mentén ritkán alkalmazzák.

Felhasznált irodalom

- [1] Tóth János: Automatizált nagytávolságú léginavigáció. LRI Repülésoktatási Központ, 1994.
- [2] В. А. Вериге, Ф. С. Гергель: Пилотажно-навигационные приборы и измерительные системы. Ленинградская Краснознаменная военно-воздушная инженерная академия имени А. Ф. Можайского, Ленинград, 1959.
- [3] О. А. Бабич, В. А. Боднер, М. С. Козлов, М. Д. Потапов, В. П. Селезнев: Авиационные приборы и навигационные системы. ВВИА им. проф. Н.Е.Жуковского, Москва, 1969.

1. A repüléstudományi Közlemények 2008/2 számában megjelent Inerciális navigációs rendszerek I. cikk 4. ábrája alapján.
2. A repüléstudományi Közlemények 2008/2 számában megjelent Inerciális navigációs rendszerek I. cikk (1) egyenletéből következik.
3. A repüléstudományi Közlemények 2008/2 számában megjelent Inerciális navigációs rendszerek I. cikk.

[Vissza a tartalomhoz >>>](#)