REPÜLÉSTUDOMÁNYI KONFERENCIA 2008 SZOLNOK
70 ÉVES A LÉGIERŐ
REPÜLÉSTUDOMÁNYI KÖZLEMÉNYEK KÜLÖNSZÁM 2008. ÁPRILIS 11.

Turóczi Antal

NÉGYROTOROS PILÓTANÉLKÜLI HELIKOPTER FEDÉLZETI REPÜLÉSSZABÁLYZÓJÁNAK ELŐZETES TERVEZÉSE LQG MÓDSZERREL

BEVEZETÉS

Az utóbbi időben a négyrotoros elrendezésű helikopter – a szabályozástechnika és a mikroelektronika fejlődésének köszönhetően – újból a kutatások és fejlesztések tárgyává vált. A kisméretű, elektromotoros meghajtású, fix állásszögű rotorokkal rendelkező géptípusokkal, egyszerű mechanikai felépítésű, robusztus, ezáltal megbízható pilóta nélküli repülő eszköz valósítható meg. A robusztusság mellet azonban szükség van olyan fedélzeti elektronikai berendezésre, robotpilótára is, amely lehetővé teszi az egyébként manuálisan nehezen irányítható helikopter egyszerű működtetését. A cikk egy kísérleti négyrotoros rendszer fedélzeti repülésszabályozójának számítógéppel segített előzetes tervezését mutatja be.

A NÉGYROTOROS HELIKOPTER MATEMATIKAI MODELLJE

A négyrotoros helikoptert több bemenetű több kimenetű rendszerként fogható fel. A pilóta vagy robotpilóta irányító jelei és a helikopter irányító jelekre adott válaszai közötti összefüggés – felhasználva a fizika elfogadott tapasztalati törvényszerűségeit – matematikai egyenletek formájában írható le. A későbbi szabályozástechnikai tervezésben ezen egyenletrendszerből származtathatók a különböző repülési üzemmódok leírásához legmegfelelőbb, egyszerűsített matematikai modellek. Bár a teljes rendszer „valódi” bemenetei a motorok kapocsfeszültségei lesznek, első lépésben tekintsük formális bemeneti jeleknek a rotorlapátokon ébredő eredő felhajtó erőket. A későbbiekben természetesen figyelembe kell venni az elektromotorokat is, mint közbenső dinamikus rendszereket.

A merev testnek tekintett helikopter[1] mozgásállapotának időbeli változási sebességét a következő differenciál-egyenletrendszerrel írhatjuk le:

$$\dot{\underline{\mathbf{r}}}(t) = \underline{\mathbf{v}}(t) \tag{1a}$$

$$\dot{\underline{\mathbf{v}}}(t) = -\underline{\mathbf{g}} + \frac{1}{m_0}\underline{\underline{\mathbf{R}}}(t)\cdot\underline{\mathbf{F}}_{f\,(K)}(t) \tag{1b}$$

$$\dot{\underline{\underline{\mathbf{R}}}}(t) = \underline{\underline{\mathbf{R}}}(t)\underline{\underline{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}}_{(K)}(t) \tag{1c}$$

[1] A helikopter valójában rugalmas alkotóelemekből épül fel melyek elasztikus mozgással jellemezhetők. A tervezés során azonban az ebből adódó hatásokat elhanyagolhatónak tekintem.

$$\underline{\dot{\boldsymbol{\omega}}}_{(\mathrm{K})}(t) = \underline{\underline{\mathbf{J}}}_{(\mathrm{K})}^{-1}(-\underline{\underline{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}}_{(\mathrm{K})}(t)\cdot\underline{\underline{\mathbf{J}}}_{(\mathrm{K})}\underline{\boldsymbol{\omega}}_{(\mathrm{K})}(t) + \underline{\mathbf{M}}_{\mathrm{aero}\,(\mathrm{K})}(t) - \underline{\mathbf{M}}_{\mathrm{G}\,(\mathrm{K})}(t)) \tag{1d}$$

- $\underline{\mathbf{r}}$: a tömegközéppont helyvektora, pozíciója
- $\underline{\mathbf{v}}$: a tömegközéppont sebességvektora,
- $\underline{\mathbf{g}}$: gravitációs gyorsulás vektora
- $\underline{\mathbf{F}}_{\mathrm{f}}$: A rotorok által keltett felhajtóerő eredője

$$\underline{\mathbf{F}}_{\mathrm{f}\,(\mathrm{K})} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{C_f}\,(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \end{bmatrix} \tag{2}$$

- $\underline{\mathbf{R}}$: a forgatási vagy rotáció mátrix,
- $\underline{\boldsymbol{\omega}}$: a szögsebesség-vektor,
- $\underline{\underline{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}}$: a szögsebesség-mátrix,

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}(t) = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

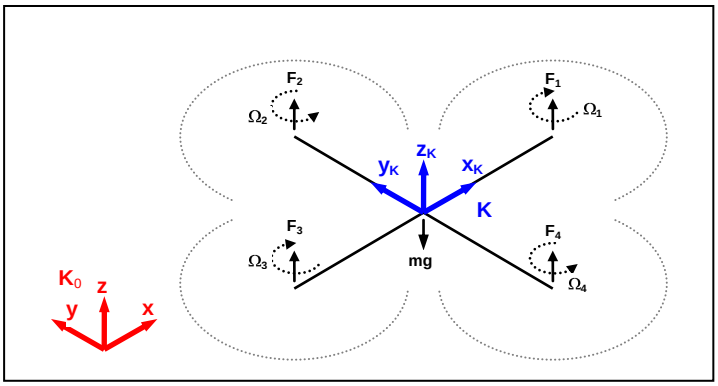
- $\underline{\underline{\mathbf{J}}}$: a test tehetetlenségi tenzora,
- $\underline{\mathbf{M}}_{\mathrm{aero}}$: a testre ható aerodinamikai forgatónyomatékok eredőjének vektora,

$$\underline{\mathbf{M}}_{\mathrm{aero}\,(\mathrm{K})} = \begin{bmatrix} \mathrm{d}\cdot\mathrm{C_f}\,(\Omega_2^2 - \Omega_4^2) \\ \mathrm{d}\cdot\mathrm{C_f}\,(\Omega_3^2 - \Omega_1^2) \\ \mathrm{C_r}\,(\Omega_1^2 + \Omega_3^2 - \Omega_2^2 - \Omega_4^2) \end{bmatrix} \tag{4}$$

- $\underline{\mathbf{M}}_{\mathrm{G}}$: a pörgettyű- vagy giroszkóp-hatásból adódó forgatónyomatékok eredőjének vektora.

$$\underline{\mathbf{M}}_{\mathrm{G(K)}} = \mathrm{J_{rez}} \begin{bmatrix} \omega_y(\Omega_2 + \Omega_4 - \Omega_1 - \Omega_3) \\ -\omega_x(\Omega_2 + \Omega_4 - \Omega_1 - \Omega_3) \\ 0 \end{bmatrix}_{(\mathrm{K})} \tag{5}$$

A $\mathbf{K_0}$ inerciarendszerben felvett mennyiségek külön jelölés nélkül, a **K** test-koordinátarendszerben értendőket $_{(\mathrm{K})}$ alsóindexszel láthatók (1. ábra). Az idő szerinti differenciálás az (1a-b) egyenletekben $\mathbf{K_0}$-ban, az (1c-d) egyenletekben **K**-ban értendő. A C_f és C_r konstansok a rotorok geometriai méreteitől valamint a levegő aktuális fizikai jellemzőitől (nyomás, hőmérséklet stb.) függenek, d a rotorok forgástengelyének tömegközépponttól mért távolsága, Ω_i az i-edik rotor szögsebessége [1][2][3].



1. ábra. A $\mathbf{K}_0$ és $\mathbf{K}$ koordináta rendszerek definíciója [Szerk.: Turóczi A. - MS Word]

LQG SZABÁLYZÓTERVEZÉSI MÓDSZER

Az LQR[2] módszer

A többváltozós modern szabályzó-tervezési eljárások egyike az LQR módszer, amely a

$$J = \frac{1}{2}\int_{t=0}^{\infty}\left(\underline{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\underline{\underline{\mathbf{Q}}}\ \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{u}}^{\mathrm{T}}\underline{\underline{\mathbf{R}}}\ \underline{\mathbf{u}}\right)dt \tag{6}$$

négyzetes integrálkritérium minimálásával optimális állapot-visszacsatolási mátrixot ad eredményül. Az optimális vezérlési törvény zérusértékű bemeneti jel esetén:

$$\underline{\mathbf{u}} = -\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{opt}\underline{\mathbf{x}} \tag{7}$$

lesz, melyből a 2. ábra hatásvázlata következik. A $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{\mathrm{opt}}$ visszacsatolási mátrixot $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$, és $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$ ismeretében az

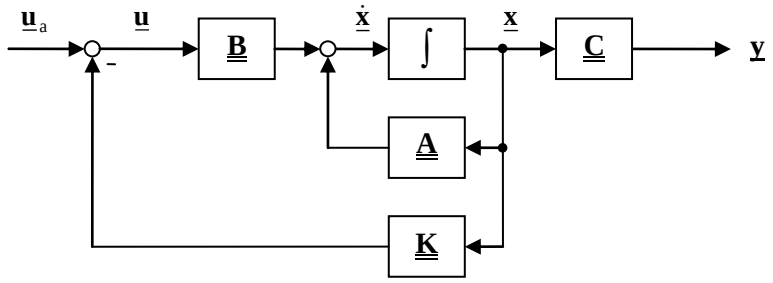
$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\mathrm{T}}\underline{\underline{\mathbf{P}}} + \underline{\underline{\mathbf{P}}}^{\mathrm{T}}\underline{\underline{\mathbf{A}}} + \underline{\underline{\mathbf{Q}}} - \underline{\underline{\mathbf{P}}}\underline{\underline{\mathbf{B}}}\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{B}}}^{\mathrm{T}}\underline{\underline{\mathbf{P}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}} \tag{8}$$

Riccati-egyenlet $\underline{\underline{\mathbf{P}}}$ megoldásából határozhatjuk meg:

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{opt} = \underline{\underline{\mathbf{R}}}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{B}}}^{\mathrm{T}}\underline{\underline{\mathbf{P}}} \tag{9}$$

A feladat megoldását a MATLAB programcsalád Control System Toolbox csomagjának `lqr.m` függvénye támogatja. A J = *minimum* tervezési kritériumnak nincs olyan szemléletes fizikai jelentése, mint a klasszikus módszereknél megszokott fázistöbblet, túllendülés, szabályzási idő stb. kifejezéseknek. Ezért a hagyományos értelemben vett minőségi jellemzők $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$ és $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$ súlyozó mátrixokkal történő beállítása némi tervezési tapasztalatot igényel. [4][5][6][7][8].

[2] LQR: **L**inear **Q**uadratic **R**egulator



2. ábra. Teljes állapot-visszacsatolású szabályozási rendszer hatásvázlata

[Szerk.: Turóczi A. - MS Word]

Az LQE[3] módszer

Az LQR feladatnál feltételeztük, hogy a rendszer összes állapotváltozója hozzáférhető, így a teljes-állapotvisszacsatolás megvalósítható. A gyakorlatban azonban nem minden esetben lehetséges vagy gazdaságos minden állapotváltozó mérése, ráadásul a mérési eredményeket tökéletlen, zajos, és korlátozott sávszélességű szenzorok szolgáltatják. Ezért az állapotváltozókat a mérési eredményekből, a zajok statisztikai jellemzőinek és a rendszer dinamikus modelljének ismeretében kell megbecsülni, az állapot-visszacsatolást pedig a becsült állapotváltozókról kell megvalósítani. Erre a problémára, kvadratikus kritérium szerint optimális megoldást ad az LQG[4] tervezési módszer. Az LQG feladat a szeparációs elv alapján szétbontható egy optimális LQE állapotbecslési és egy LQR optimális szabályzó-tervezési feladatra [4][5][6][8].

Az állapotbecsléshez az irányított szakasz lineáris állapotteres leírásából és a rendszert terhelő zajok statisztikai tulajdonságaiból indulunk ki:

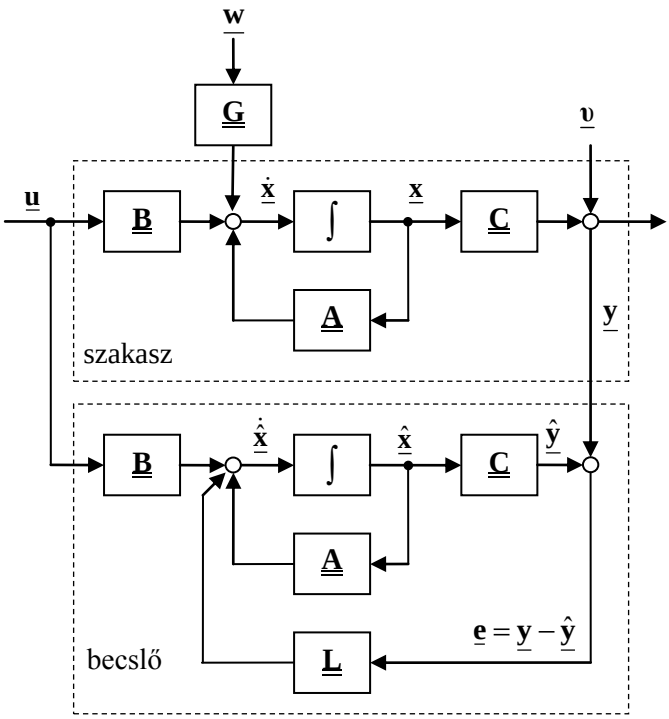
$$\begin{aligned} \dot{\underline{\mathbf{x}}} &= \underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{\mathbf{x}} + \underline{\underline{\mathbf{B}}}\underline{\mathbf{u}} + \underline{\underline{\mathbf{G}}}\underline{\mathbf{w}} \\ \underline{\mathbf{y}} &= \underline{\underline{\mathbf{C}}}\underline{\mathbf{x}} + \underline{\upsilon} \end{aligned} \tag{10}$$

ahol a $\underline{\mathbf{w}}(t)$ rendszerzaj és a $\underline{\upsilon}(t)$ szenzorzaj korrelálatlan, normális eloszlású, zérus várható értékű, $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}_w$ és $\underline{\underline{\mathbf{R}}}_\upsilon$ kovarianciájú sztochasztikus mennyiségek melyekre:

$$\begin{aligned} &E\left\{\underline{\mathbf{w}}(t)\right\} = 0 && E\left\{\underline{\upsilon}(t)\right\} = 0 \\ &E\left\{\underline{\mathbf{w}}(t)\underline{\mathbf{w}}^{\mathrm{T}}(t+\tau)\right\} = \underline{\underline{\mathbf{Q}}}_w\delta(\tau) && E\left\{\underline{\upsilon}(t)\underline{\upsilon}^{\mathrm{T}}(t+\tau)\right\} = \underline{\underline{\mathbf{R}}}_\upsilon\delta(\tau) \\ &E\left\{\underline{\mathbf{w}}(t)\underline{\upsilon}^{\mathrm{T}}(t+\tau)\right\} = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

[3] LQE: **L**inear **Qu**adratic **E**stimator
[4] LQG: **L**inear **Q**uadratic **G**aussian

A 3. ábraán a szakasz, és annak állapotváltozóit becslő Kalman-Bucy szűrő hatásvázlata látható. A mért $\underline{\mathbf{y}}(t)$ kimenet és a becsült $\hat{\underline{\mathbf{y}}}(t)$ kimenet közötti különbség, az $\underline{\mathbf{e}}(t) = \underline{\mathbf{y}}(t) - \hat{\underline{\mathbf{y}}}(t)$ kimeneti hibajel, a megfelelően választott $\underline{\underline{\mathbf{L}}}$ súlyozó mátrixon keresztül vissza van csatolva a becslő integrátorának bemenetére.



3. ábra. Kálmán-Bucy szűrő hatásvázlata [Szerk.: Turóczi A. - MS Word]

A becslés akkor lesz optimális, ha a valós $\underline{\mathbf{x}}(t)$ és a becsült $\hat{\underline{\mathbf{x}}}(t)$ állapotvektorok $\tilde{\underline{\mathbf{x}}}(t) = \underline{\mathbf{x}}(t) - \hat{\underline{\mathbf{x}}}(t)$ különbségének varianciája minimális értékű, vagyis:

$$E\left\{\tilde{\underline{\mathbf{x}}}(t)\tilde{\underline{\mathbf{x}}}^{\mathrm{T}}(t)\right\} \to \min \tag{12}$$

A (12) kritériumnak megfelelő $t \to \infty$ statikus $\underline{\underline{\mathbf{L}}}$ visszacsatolási mátrixot a

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{\underline{\mathbf{P}}} + \underline{\underline{\mathbf{P}}}\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}} + \underline{\underline{\mathbf{G}}}\underline{\underline{\mathbf{Q}}}_{w}\underline{\underline{\mathbf{G}}}^{\mathbf{T}} - \underline{\underline{\mathbf{P}}}\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{\mathbf{T}}\underline{\underline{\mathbf{R}}}_{\upsilon}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{C}}}\underline{\underline{\mathbf{P}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}} \tag{13}$$

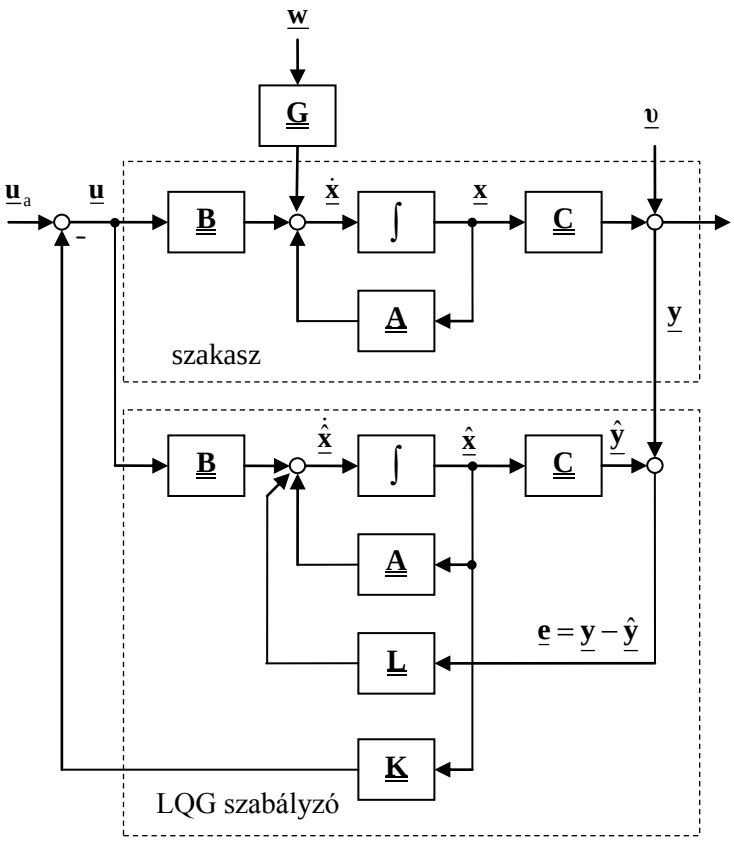
Riccati egyenlet $\underline{\underline{\mathbf{P}}}$ megoldásából kaphatjuk meg:

$$\underline{\underline{\mathbf{L}}}_{opt} = \underline{\underline{\mathbf{P}}}\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{\mathbf{T}}\underline{\underline{\mathbf{R}}}_{\upsilon}^{-1} \tag{14}$$

Az optimális állapotbbecslő állapotegyenlete:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\underline{\mathbf{x}}}} &= \left(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \underline{\underline{\mathbf{L}}}\underline{\underline{\mathbf{C}}}\right)\hat{\underline{\mathbf{x}}} + \left[\underline{\underline{\mathbf{B}}} \quad \underline{\underline{\mathbf{L}}}\right]\begin{bmatrix}\underline{\mathbf{u}} \\ \underline{\mathbf{y}}\end{bmatrix} \\ \hat{\underline{\mathbf{y}}} &= \underline{\underline{\mathbf{C}}}\hat{\underline{\mathbf{x}}} \end{aligned} \tag{15}$$

A teljes LQG szabályzó hatásvázlatát a 4. ábra szemlélteti [7][8][9][10].



4. ábra. LQG szabályozási rendszer hatásvázlata [Szerk.: Turóczi A. - MS Word]

Fedélzeti LQG repülésszabályzó tervezése

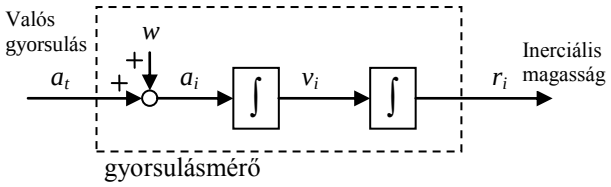
Optimális állapotbecslő tervezése

A repülésirányító automatikának az a feladata, hogy a test koordináta rendszer origójának sebessége valamint a tengelyek szögsebessége a repülési feladatnak megfelelően változzon a navigációs koordináta rendszerhez képest. Ha útvonalrepülésről van szó, ez azt jelenti, hogy a repülőgép tömegközéppontja előre definiált térbeli pontokon keresztül halad. A szabályzó algoritmusnak tehát „ismernie” kell a helikopter aktuális mozgásállapotát. Az állapotváltozóknak azonban csak egy részét lehet közvetlenül mérni, a többit becsülni kell. A kísérleti rendszerben lévő inerciális szenzormodul a beépített gyorsulásmérők, giroszkópok – melyek a $\dot{\underline{\mathbf{v}}}_{(K)}(t)$ gyorsulás és $\underline{\boldsymbol{\omega}}_{(K)}(t)$ szögsebességet közvetlenül mérik – és mágneses szenzorok kalibrált mérési eredményeit felhasználva, adott pontossággal képes meghatározni a ϕ, θ, és ψ Euler-szögeket, vagyis a helikopter orientációját. Az $\underline{\mathbf{r}}(t)$ pozíciót és a $\underline{\mathbf{v}}(t)$ sebességet a gyorsulás adatokból csak integrálással lehet számolni. Ez a gyorsulásmérő mérési pontatlansága (zaj, nemlinearitás, tengelyszög eltérés stb.) miatt a pozíció és sebesség adatokban akkumulálódó hibát eredményez. A problémát a gyakorlatban további szenzorok alkalmazásával szokták orvosolni [8][11][12].

- Magasságmérés abszolút nyomásmérővel
- Szélsebesség mérés differenciális nyomásmérővel
- Ultrahangos magasságmérés kis magasságokban
- Lézeres távolságmérés
- Rádiónavigáció (ILS[5], VOR[6], ADF[7]…).
- Globális helyzet-meghatározás (GPS[8])
- Képfeldolgozáson alapuló helyzet-meghatározás

A beltéri alkalmazású kísérleti rendszer számára a felsorolt megoldások közül csak az ultrahangos magasságmérés és a képfeldolgozáson alapuló helyzet-meghatározás jöhet számításba, de ez utóbbit bonyolultsága, számítási teljesítményigénye és költségei miatt el kellett vetni. Az ultrahangos magasságmérővel az r_z pozíciót és a v_z sebességet akkumulálódó hiba nélkül lehet mérni, az r_x, r_y, v_x és v_y állapotváltozók azonban továbbra is csak integrálással számíthatók. Ebből következik, hogy a repülésszabályzó csak növekvő hibával lesz képes követni, az ezekre a bemenetekre adott alapjelet.

Az r_z állapotváltozót, a magasságot, az ultrahangos magasságmérővel közvetlenül, az inerciális mérőegység z_k irányú gyorsulásmérőjével közvetve, a gyorsulás adat kétszeres idő szerinti integrálásával határozhatjuk meg. Az ultrahangos magasságmérő kis térbeli és időbeli felbontással, de időben állandó mérési hibával rendelkezik. Ennek komplementereként, a gyorsulásmérővel viszonylag nagy térbeli és időbeli felbontás érhető el, de a gyorsulásmérés hibájának kétszeri integrálása a magasság adatban akkumulálódó hibát eredményez. Érdemes tehát mindkét mérési módszert felhasználva megbecsülni a magasság adatot, így pontosabb eredményt kaphatunk, mint az egyes mérésekkel külön-külön.



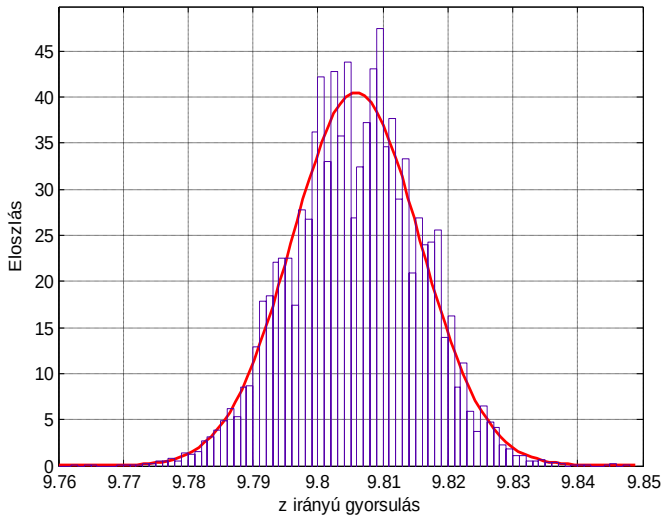
5. ábra. A gyorsulásmérő modellje [Készítette.: Turóczi A. - MS Word]

Az inerciális mérőegység z_k irányú gyorsulásmérőjének zajtulajdonságait méréssorozattal lehet meghatározni, felhasználva a szenzor 5. ábra szerinti modelljét [8]. A mérés során a modult közel vízszintes helyzetben kell rögzíteni, így biztosítható, hogy a z_k irányú gyorsulásmérőre csak az állandó $a_t = g$ értékű nehézségi gyorsulás hasson. A 5. ábra jelöléseit használva:

$$\begin{aligned} a_i &= a_t + w \\ a_t &= g = áll. \end{aligned} \tag{16}$$

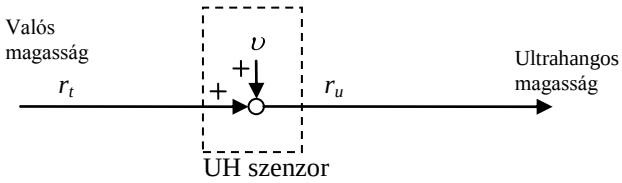
[5] ILS: **I**nstrumental **L**anding **S**ystem
[6] VOR: **V**HF **O**mni **R**ange
[7] ADF: **A**utomatic **D**irection **F**inder
[8] GPS: **G**lobal **P**ositioning **S**ystem

A kapott a_i adatsort így normális eloszlású, m = 9.805 várható értékű, σ = 0,01 szórású normális eloszlással lehet közelíteni. Az eloszlás paramétereit a MATLAB Statistical Toolbox `normfit.m` függvényének segítségével határozható meg. A mérési eredmények és az azt közelítő normális eloszlás sűrűségfüggvényét a 6. ábra szemlélteti.



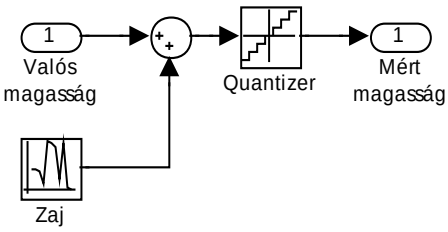
6. ábra. A Xsens modul z_k irányú gyorsulás jelének eloszlása m = 9,805 várható értékű, σ = 0,01 szórású normális eloszlással közelítve [Készítette.: Turóczi A. - MATLAB]

A (16) összefüggések alapján a w szenzor-zaj eloszlása ugyancsak σ_w = 0,01 szórású, de m_w = 0 várható értékű normális eloszlás lesz.



7. ábra. Az ultrahangos magasságmérő modellje [Készítette.: Turóczi A. - MS Word]

Az ultrahangos magasságmérő zajmodelljének meghatározásához a 7. ábra hatásvázlata MATLAB Simulink környezetben kiegészül egy kvantáló egységgel, amely a szenzor 1cm-es felbontását hivatott modellezni.



8. ábra. Az ultrahangos magasságmérő Simulink modellje [Készítette.: Turóczi A. - Simulink]

A szimuláció és az ultrahangos szenzorral végzett mérések tapasztalataira támaszkodva arra a következtetésre jutothatunk, hogy a 8. ábra Simulink modellje a zajforrás σ_υ = 0,01 szórású, m_υ = 0 várható értékű normális eloszlású kimeneti jele esetén megfelelő pontossággal közelíti a valóságban lejátszódó folyamatokat. A fentiek alapján definiálhatjuk az

$$\begin{aligned} Q_w &= \sigma_w^2 \\ R_\upsilon &= \sigma_\upsilon^2 \end{aligned} \tag{17}$$

kovarianciákat. A Kálmán-szűrő tervezéshez írjuk fel a magasságmérésre vonatkozó (10) szerinti

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \dot{v}_i \\ \dot{r}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ r_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} a_t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} w \\ &(\underline{\dot{\mathbf{x}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \quad \underline{\mathbf{x}} + \underline{\underline{\mathbf{B}}}\ \underline{\mathbf{u}} + \underline{\underline{\mathbf{G}}}\underline{\mathbf{w}}) \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} &r_u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ r_i \end{bmatrix} + \upsilon \\ &(\underline{\mathbf{y}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}} \quad \underline{\mathbf{x}} + \underline{\upsilon}) \end{aligned} \tag{19}$$

állapotegyenlet, amelyből (17-19) összefüggéseket felhasználva, a MATLAB `kalman.m` függvényének segítségével kiszámolható az állapotbecslő optimális $\underline{\underline{\mathbf{L}}}$ visszacsatoló mátrixa:

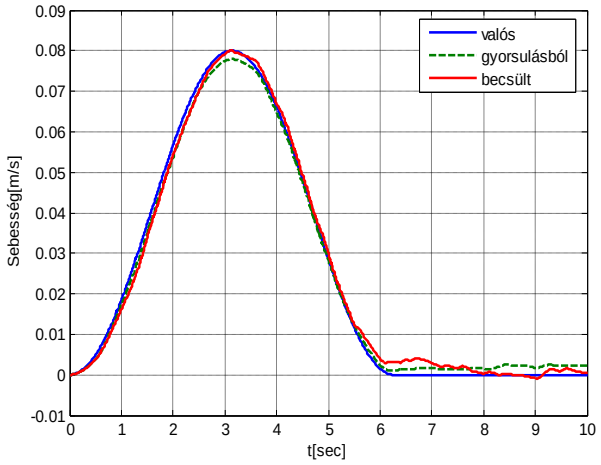
$$\underline{\underline{\mathbf{L}}} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \tag{20}$$

Felhasználva a (15) és (18-20) összefüggéseket az optimális állapotbecslő állapotegyenlete:

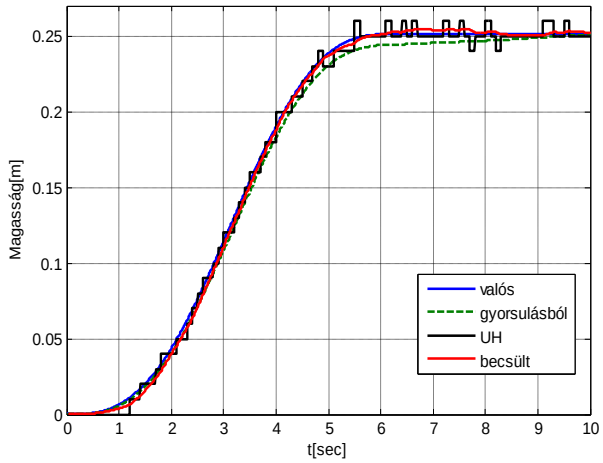
$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \dot{\hat{v}}_i \\ \dot{\hat{r}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_i \\ \hat{r}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ r_u \end{bmatrix} \\ &(\underline{\dot{\hat{\mathbf{x}}}} = (\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \underline{\underline{\mathbf{L}}}\underline{\underline{\mathbf{C}}})\ \underline{\hat{\mathbf{x}}} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{B}}} & \underline{\underline{\mathbf{L}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{u}} \\ \underline{\mathbf{y}} \end{bmatrix}) \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_i \\ \hat{r}_i \end{bmatrix} \\ &(\underline{\hat{\mathbf{y}}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}} \quad \underline{\hat{\mathbf{x}}}) \end{aligned} \tag{22}$$

A megtervezett Kálmán-szűrő működésének ellenőrzésére MATLAB Simulink környezetben elvégzett mérések eredményeit a 9. ábra-10. ábraák szemléltetik.



9. ábra. Sebesség időfüggvények [Készítette.: Turóczi A. - MATLAB]



10. ábra. Magasság időfüggvények [Készítette.: Turóczi A. - MATLAB]

LQR szabályzó tervezése

Lineáris szabályzó tervezéséhez a kísérleti rendszer (1) nemlineáris modelljét az adott repülési üzemmódnak megfelelő munkapont közelében linearizálni kell. A lebegéshez közeli, kis szögkitérésekkel járó üzemmódokban a rendszer a következő lineáris állapotegyenlettel közelíthető:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{r}_x \\ \dot{r}_y \\ \dot{r}_z \\ \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix}}_{\dot{\underline{\mathbf{x}}}_{[1x12]}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9{,}7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9{,}7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{[12x12]}} \underbrace{\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ \phi \\ \theta \\ \psi \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{x}}_{[1x12]}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 28{,}6 & 0 & -28{,}6 \\ -28{,}4 & 0 & 28{,}4 & 0 \\ 0{,}13 & -0{,}13 & 0{,}13 & -0{,}13 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\mathbf{B}}}_{[4x12]}} \cdot 10^{-3} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{u}}_{[1x4]}} \tag{23}$$

$$\underline{\mathbf{y}}_{[1x12]} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{[12x12]} \underline{\mathbf{x}}_{[1x12]} + \underline{\underline{\mathbf{D}}}_{[4x12]} \underline{\mathbf{u}}_{[1x4]} \qquad \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{[12x12]} = \underline{\underline{\mathbf{I}}} \qquad \underline{\underline{\mathbf{D}}}_{[4x12]} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$$

A lineáris matematikai modelljéből kiindulva, a megfelelő súlyozó mátrixok meghatározása után az LQR szabályzó $\underline{\mathbf{K}}$ visszacsatolási mátrixa a MATLAB `lqr.m` függvényének segítségével egyszerűen számolható. Az így létrejövő szabályozási rendszer statikus viselkedését azonban nagyban befolyásolja a rendszerparaméterek ismeretének pontossága, valamint a rendszer kimenetét érő zavarok hatása. A statikus hiba elhárítása érdekében ezért a külső visszacsatolási hurokba integrátort célszerű beiktatni. Ezt a módszert tulajdonképpen az állapotváltozók számának bővítésére lehet visszavezetni, bár az új állapotváltozók valójában a szabályzóban keletkeznek.

Az r_x, és r_y állapotváltozóknál nincs értelme integrátor beiktatásának, mivel a jelek a zajos gyorsulásmérésből kerülnek meghatározásra, és ebből adódóan akkumulálódó hibát tartalmaznak. A v_x, v_y, v_z, ϕ, θ, ω_x, ω_y és ω_z állapotváltozóknál szintén nincs szükség integrátorra, mivel az integrál jelek az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ mátrixon történő belső visszacsatolás következtében más állapotváltozókon keresztül hozzáférhetők.

A fenti megfontolások alapján a (23) szerinti modell kiegészült két további állapotváltozóval melyekre:

$$\begin{aligned} \dot{r}_{iz} &= r_z \\ \dot{\psi}_i &= \psi \end{aligned} \tag{24}$$

Ezzel a rendszer paramétermátrixai, felhasználva (23-24)-ben alkalmazott jelöléseket, az alábbiak lesznek:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{r}_{iz} \\ \dot{\psi}_i \\ \dot{r}_x \\ \dot{r}_y \\ \dot{r}_z \\ \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix}}_{\dot{\underline{\mathbf{x}}}_{[1x14]}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9{,}7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9{,}7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{[14x14]}} \underbrace{\begin{bmatrix} r_{iz} \\ \psi_i \\ r_x \\ r_y \\ r_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ \phi \\ \theta \\ \psi \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{x}}_{[1x14]}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 28{,}6 & 0 & -28{,}6 \\ -28{,}4 & 0 & 28{,}4 & 0 \\ 0{,}13 & 0{,}13 & 0{,}13 & 0{,}13 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\mathbf{B}}}_{[4x14]}} \cdot 10^{-3} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{u}}_{[1x4]}}$$

$$\underline{\mathbf{y}}_{[1x14]} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{[14x14]} \underline{\mathbf{x}}_{[1x14]} + \underline{\underline{\mathbf{D}}}_{[4x14]} \underline{\mathbf{u}}_{[1x4]} \qquad \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{[14x14]} = \underline{\underline{\mathbf{I}}} \qquad \underline{\underline{\mathbf{D}}}_{[4x14]} = \underline{\underline{\mathbf{0}}} \tag{25}$$

Az LQR tervezési feladat megoldásához a $\underline{\mathbf{Q}}$ és $\underline{\mathbf{R}}$ súlyozó-mátrixokat is meg kell határozni. Első közelítésben a reciprok négyzetes szabályt alkalmazhatjuk [5][8]. Sorozatos szimuláció és paraméterhangolás után végül az alábbi súlyozó-mátrixok adódtak megfelelőnek:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{Q}}} &= \mathrm{diag}(0.01,\ 0.11,\ 100,\ 100,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 3.64,\ 3.64,\ 0.02,\ 0.04,\ 0.04,\ 0.1) \\ \underline{\underline{\mathbf{R}}} &= \mathrm{diag}(8.93,\ 8.93,\ 8.93,\ 8.93) \cdot 10^{-8} \end{aligned} \tag{26}$$

A MATLAB `lqr.m` program futtatásának eredménye a (25-26) egyenletekből származó **A**, **B**, **Q** és **R** mátrixok megadásával a

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} = \begin{bmatrix} 0{,}16 & 0{,}55 & 23{,}6 & 0 & 1{,}85 & 9{,}7 & 0 & 1{,}92 & 0 & -18{,}3 & 1{,}72 & 0 & -1{,}7 & 2{,}61 \\ 0{,}16 & -0{,}55 & 0 & 23{,}6 & 1{,}85 & 0 & 9{,}7 & 1{,}92 & 18{,}3 & 0 & -1{,}72 & 1{,}7 & 0 & -2{,}61 \\ 0{,}16 & 0{,}55 & -23{,}6 & 0 & 1{,}85 & -9{,}7 & 0 & 1{,}92 & 0 & 18{,}3 & 1{,}72 & 0 & 1{,}7 & 2{,}61 \\ 0{,}16 & -0{,}55 & 0 & -23{,}6 & 1{,}85 & 0 & -9{,}7 & 1{,}92 & -18{,}3 & 0 & -1{,}72 & -1{,}7 & 0 & -2{,}61 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \quad (27)$$

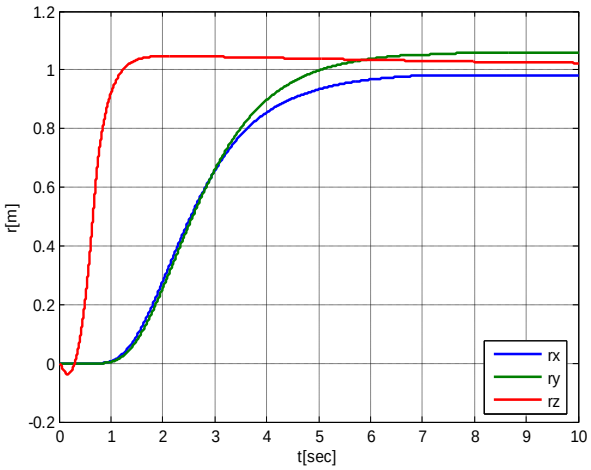
visszacsatoló mátrix.

Szimuláció

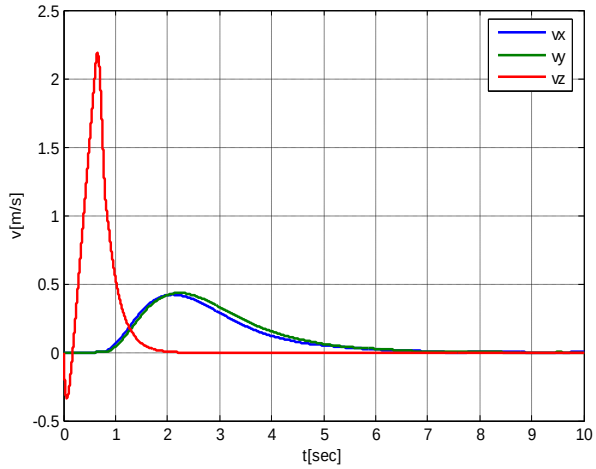
A fedélzeti repülésszabályzó tervezését nagyban segíti a kísérleti rendszer nemlineáris MATLAB Simulink modelljének vizsgálata. A modellel végzett szimulációk eredményeit felhasználva következtetéseket lehet levonni a rendszerben lezajló folyamatokról és a szabályzó körök minőségi jellemzőiről anélkül, hogy a valóságos rendszer épsége veszélybe kerülne. Természetesen a szimuláció nem helyettesíti a valós rendszerrel végzett kísérleteket, a megfelelő szabályzó struktúra kialakításának és a paraméterek hangolásának folyamatát azonban nagymértékben felgyorsítja. A rendszer

$$r_{ax} = r_{ay} = r_{az} = 1 \text{ m},$$
$$v_{ax} = v_{ay} = v_{az} = 0 \text{ m/s},$$
$$w_{ax} = w_{ay} = w_{az} = 0 \text{ rad/sec},$$
$$\phi_a = \theta_a = 0°,\ \psi_a = 10°$$

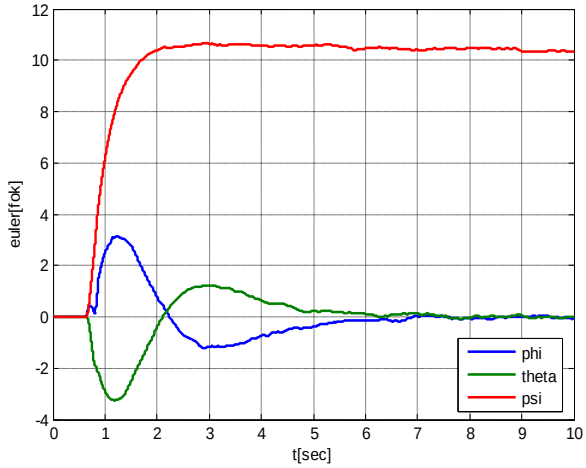
alapjelekre lefuttatott szimulációjának eredményeit a 11-14. ábraák szemléltetik. Hosszabb szimulációs időt választva láthatóvá válik, hogy az r_x, r_y, v_x, v_y jelek – a vártnak megfelelően – csak akkumulálódó hibával képesek követni az alapjelet. A szabályzási időt a korlátos motorfeszültség miatt ugyancsak korlátos rotor-szögsebesség határozza meg, ezért a rendszert csak a tápfeszültség növelésével és/vagy a beavatkozó szervek cseréjével lehetne felgyorsítani.



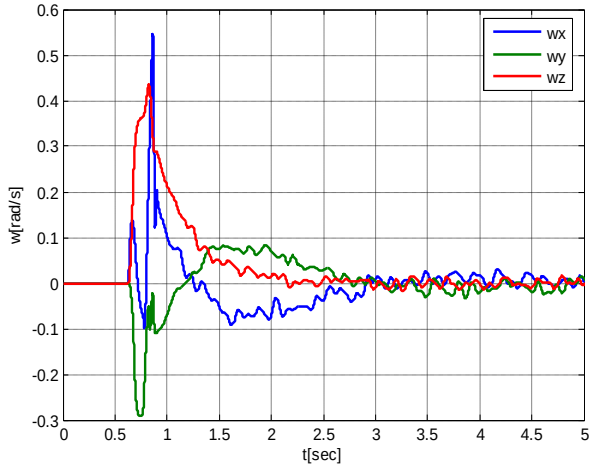
11. ábra. Az r_x, r_y és r_z pozíció időfüggvényei [Készítette.: Turóczi A. - MATLAB]



12. ábra. Az v_x, v_y és v_z sebességek időfüggvényei [Készítette.: Turóczi A. - MATLAB]



13. ábra. A ϕ, θ és ψ szögek időfüggvényei [Készítette.: Turóczi A. - MATLAB]



14. ábra. Az ω_x, ω_y és ω_z szögsebességek időfüggvényei [Készítette.: Turóczi A. - MATLAB]

ÖSSZEFOGLALÁS

A kísérleti négyrotoros helikopter nemlineáris matematikai modelljéből, egyszerűsítéseket és elhanyagolásokat alkalmazva meghatározható annak kis bedöntési és bólintási szögekre érvényes lineáris matematikai modellje, amelyhez így lineáris szabályzó tervezhető. A helikopter lineáris modelljében szereplő állapotváltozók közül, nem mindegyiket lehet közvetlenül mérni, ezért a teljes állapot-visszacsatolás megvalósításához állapotbecslést kell alkalmazni. A magasságméréshez megtervezett Kálmán-szűrő az ultrahangos magasságmérő és az inerciális mérőegység méréseit használja fel az optimális becsléshez. Az irányszögben és a magasságban keletkező statikus hiba megszüntetése érdekében az állapotvektort további két állapotváltozóval kell kibővíteni. A többi, közvetlenül nem mérhető állapotváltozónál tapasztalható alapjel-követési hibát további szenzorok alkalmazása nélkül nem lehet kiküszöbölni. A megtervezett LQG szabályzó, a MATLAB Simulink-ben elvégzett szimulációk alapján alkalmas a kísérleti helikopter kis bedöntési és bólintási szögkitéréssel járó repülési üzemmódjainak stabilizálására.

FELHASZNÁLT IRODALOM

[1.] CSIZMADIA, NÁDORI: *Mechanika Mérnököknek: Mozgástan,* Nemzeti tankönyvkiadó, 1997. ISBN: 963-19-2353-3

[2.] T. HAMEL, R. MAHONY, R. LOZANO and J. OSTROWSKI: *Dynamic modelling and configuration stabilization for an X4-flyer*, In Proc. of IFAC World Congress, Barcelona, Spain, 2002. Letöltve: 2007-09-15. http://www.quanser.com/english/downloads/products/X4flyer_Hamel_2012.pdf

[3.] BOUABDALLAH, S., MURRIERI, P., and SIEGWART, R.: *Design and Control of an Indoor Micro Quadrotor*, ICRA, New Orleans, April 2004. Letöltve: 2007-09-15. http://asl.epfl.ch/aslInternalWeb/ASL/publications/uploadedFiles/325.pdf

[4.] LANTOS B.: *Irányítási rendszerek elmélete és tervezése I.*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 2002. ISBN: 963-05-7787-9

[5.] SZABOLCSI R.: *Modern szabályozástechnika*, Egyetemi Jegyzet, Budapest 2004.

[6.] Ad DAMEN: *Modern Control Theory*, Eindhoven University of Technology, Eindhoven, 2002.

[7.] SZEGEDI Péter: *Repülésszabályzó rendszerek szabályozóinak számítógépes analízise és szintézise,* PhD értekezés, 2005.

[8.] P. S. MAYBECK: *Stochastic Models, Estimation, and Control Volume III.*, Academic Press, London, 1982.

[9.] SIMON: *Optimal State Estimation*, Wiley and Sons, Inc., Hoboken NJ, 2006. ISBN: 978-0-471-70858-2

[10.] K. J. ÅSTRÖM: *Model Uncertainty and Robust Control*, Lund University, Lund, Sweden, Letöltve: 2007-02-05. http://www.ee.adfa.edu.au/staff/hrp/Literature/articles/astrom-modeluncertainty.pdf

[11.] S. RÖNBACK: *Development of a INS/GPS navigation loop*, Master's thesis, Lulea University of technology, 2000.

[12.] GREWAL, WEILL, ANDREWS: *Global Positioning Systems, Inertial, Navigation, and Integration*, John Wiley & Sons Inc., 2001.