

EGY PONTOS, LQ OPTIMÁLIS MEGOLDÁS VÉGTELEN HORIZONTÚ KIMENETKÖVETŐ SZABÁLYOZÁS TERVEZÉSÉRE

BEVEZETÉS

Egy rendszer állapotának, vagy kimenetének lineáris kvadratikus (LQ) optimális követése az 1960-as évek óta széles körűen kutatott tématerület. Napjainkig számtalan pontos, vagy közelítő megoldás jelent meg, melyek két fő csoportba sorolhatók. Az első feltételezi a jövőbeli referenciajel értékek adott horizonton való előzetes ismeretét, a második csak az aktuális és múltbeli értékekre épít.

Az első csoportot a prediktív és előretekintő (preview) technikák alkotják. A prediktív tervezési módszereknek egy jó összegzését adja [6], az LQ optimális előretekintő szabályozással többek között [7, 8] foglalkozik részletesen. Ugyanakkor meg kell jegyezni, hogy ha a jövőbeli referenciajel értékek előre nem ismertek, akkor ezek a módszerek nem használhatók.

A második csoportba a következő technikák sorolhatók:

- Módosított állapot (pillanatnyi állapot és a referencia állapot különbsége) követése [5]. Ez a technika akkor használható, ha a referencia állapot az A rendszermátrix nullterében van, ami általában nem teljesül.
- Előrecsatolt szabályozás [5], mely nagyon érzékeny a modellezési bizonytalanságokra és csak akkor tervezhető meg pontosan, ha a ki- és bemenetek száma azonos.
- LQ Servo (integráló) szabályozás [5], mely járulékos integrátorok implementálását igényli a controllerben. Ezt – ha lehetséges – érdemes elkerülni.
- További módszereket javasol [1] és [2]. [1] folytonos idejű, LQ optimális, kimenetkövető szabályozásra ad megoldásokat, először időben változó rendszerre véges, majd időinvariáns rendszerre távoli horizonton. Véges horizonton pontos megoldást ad, mely garantálja a véges funkcionál értéket, és állapot visszacsatolást, valamint egy kiegészítő előrecsatoló tagot tartalmaz. Azonban mindkét tag csak időben visszafelé tervezhető, ami azt jelenti, hogy előre ismerni kell a referenciajelet a teljes horizonton. Ezzel szemben a végső távoli horizontú megoldás csak közelítés, mely konstans referenciajelet feltételez és nem ad megoldást a ténylegesen végtelen horizontra. [2] ugyanezeket a technikákat mutatja be, de diszkrét időben is.

Az [1, 2]-ben javasolt módszereket fejleszti tovább [9] és [10]. [9] a folytonos idejű, végtelen horizontú állapotkövetési problémát oldja meg matematikailag korrekt módon, de nem garantálja a megadott állapot pontos követését. [10] egy algebrai egyenletrendszert vezet le, amiből az [1]-ben távoli horizontra megadott előrecsatoló tag kezdeti értéke meghatározható. Így azt nem szükséges

időben visszafelé számítani, vagy közelíteni. Ugyanakkor az egyenletrendszer felépítéséhez szükséges a referenciajel szerkezetének (polinomiális modell) ismerete.

Így nyilvánvaló az igény egy pontos, végtelen horizontú, kimenetkövető LQ optimális szabályozó megalkotására. Ezt mutatja be a cikk. A levezetett végtelen horizontú tervezési módszer garantálja az aszimptotikus stabilitást és a zérus követési hibát konstans referenciajel esetén, és bármilyen referenciajelre eleget tesz a szeparációs elvnek. Utóbbi azért szükséges, mert a kiadódó szabályozó állapot visszacsatolást tartalmaz, és ennek implementálása a nem mérhető állapotok becslését igényli.

A cikkben először a vizsgált rendszerosztály kerül megadásra. Ezt követi egy diszkrétidejű, LQ optimális, véges horizontú kimenetkövető szabályozó levezetése, melyből a végtelen horizontú eset (járulékos feltétellel) előállítható. Ez a megoldás hasonló az [1, 2]-ben megadott folytonos idejű véges horizontú technikákhoz. A végtelen horizontú eset levezetéséhez a zérus követési hiba (konstans referenciajelre) kerül járulékos feltételként felhasználásra. A következő rész tételként mondja ki és bizonyítja a levezetett szabályozás tulajdonságait, konstans referenciajelet tekintve. Végül az új szabályozási technika használhatósága négyrotoros helikopter pályakövető szabályozásán keresztül kerül bemutatásra.

A VIZSGÁLT RENDSZEROSZTÁLY

A vizsgált diszkrétidejű, lineáris, időinvariáns (LTI) rendszerek állapotdinamikai és megfigyelési egyenletei a következők:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}\mathbf{x}_k \end{aligned} \tag{1}$$

ahol:

- $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^p$: rendre az állapot, bemenet és kimenet vektorok
- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$: az állapot, bemenet és kimeneti mátrixok.

Tegyük fel, hogy az $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ pár stabilizálható és a $(\mathbf{C}, \mathbf{A})$ pár detektálható. $\mathbf{y}_k$ a mért kimeneti vektor, mely általában nem egyezik a követendő kimenettel. Jól ismert tény, hogy csak a bemenet dimenziójánál kisebb, vagy azzal azonos dimenziójú kimenet követhető megfelelően. Így szükséges a követendő kimenetet egy másik vektorral és mátrixszal definiálni:

$$\mathbf{y}_k^r = \mathbf{C}_r \mathbf{x}_k \tag{2}$$

Ennek dimenziója legyen $r \leq m$ és így $\mathbf{C}_r \in \mathbb{R}^{r \times n}$ (később a levezetés során sor kerül majd az $r > m$ eset vizsgálatára is.

DISZKRÉTIDEJŰ, VÉGES HORIZONTÚ, LQ OPTIMÁLIS KIMENETKÖVETŐ SZABÁLYOZÁS

A fejezet célja diszkrétidejű, véges horizontú LQ optimális kimenetkövető szabályozó levezetése az (1), (2)-ben megadott LTI rendszerre és LTI súlyozásra. A kimenet referenciajel legyen $r_k \in \mathbb{R}^r$. Így a követési hiba: $e_k = y_k^r - r_k$. A minimalizálandó funkcionál a következő alakú:

$$J(y, e, u) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^T Q_1 \bar{y}_k + e_k^T Q_2 e_k + u_k^T R u_k) + \frac{1}{2} (x_N^T Q_1 \bar{y}_N + e_N^T Q_2 e_N) \quad (3)$$

Itt $\bar{y}_k = \bar{C}x_k$ ami az állapotvektorok $\text{Ker}(C)$ -re (C nulltere) való merőleges vetítése, ha $\bar{C}$ az alábbi alakú:

$$\bar{C} = I - C_r^T (C_r C_r^T)^{-1} C_r \quad (4)$$

Ez azt jelenti, hogy $\bar{y}_k$ az állapottér azon részének hatását tartalmazza, melyből nem nyerhető ki információ y_k segítségével. Ezt a részt lehetséges Q_1 -el külön súlyozni, mely nagyban javíthatja a feladat során kiadódó Diszkrét Algebrai Riccati Egyenlet (DARE) megoldhatóságát. Legyen a referenciaállapot a következő képlettel megadva:

$$\tilde{x}_k = C_r^T (C_r C_r^T)^{-1} r_k \quad (5)$$

Ezzel a (3) funkcionál ekvivalens módon az alábbi alakra hozható (lásd [2]):

$$J(x, \tilde{x}, u) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (x_k - \tilde{x}_k)^T Q (x_k - \tilde{x}_k) + u_k^T R u_k + \frac{1}{2} (x_N - \tilde{x}_N)^T Q (x_N - \tilde{x}_N) \quad (6)$$

ahol: $Q = \bar{C}^T Q_1 \bar{C} + C_r^T Q_2 C_r$ és a DARE megoldhatóságának feltétele, hogy a $(A^{1/2}, A)$ párnak ne legyenek nem megfigyelhető pólusai az egységkörön.

A követési probléma Lagrange szorzó módszerrel oldható meg, figyelembe véve (1)-et és az $x_0 = a$ kezdeti feltételt (lásd [3, 4]). A továbbiakban a részleteket mellőzve csak a főbb eredmények kerülnek közlésre.

A társváltozó (Lagrange szorzó) szerkezete az alábbi lesz:

$$\lambda_k = P_k x_k + S_k \tilde{x}_{k+1} - Q \tilde{x}_k \quad (7)$$

Itt Q a (6) után definiált súlyozó mátrix, P_k -t és S_k -t pedig a tervezés során szükséges számítani. Egyszerűsítésként használhatók az alábbi rövidítő jelölések:

$$\begin{aligned} SR_k &= Q\tilde{x}_k - S_k\tilde{x}_{k+1} \\ \lambda_k &= P_k x_k - SR_k \end{aligned}$$

A peremfeltételek az időhorizont végére az alábbi módon adódnak:

$$\lambda_N = Qx_N - Q\tilde{x}_N \Rightarrow P_N = Q \quad S_N = 0$$

Végül a rekurzív számítási szabályok és a kontrol bemenet az alábbi alakulnak ((5) figyelembe vételével):

$$\begin{aligned} P_N &= Q \quad SR_N = QC_r^T \left(C_r C_r^T \right)^{-1} r_N \\ P_k &= Q + A^T P_{k+1} A - A^T P_{k+1} B \left(B^T P_{k+1} B + R \right)^{-1} B^T P_{k+1} A \\ SR_k &= QC_r^T \left(C_r C_r^T \right)^{-1} r_k + A^T \left[P_{k+1} B \left(B^T P_{k+1} B + R \right)^{-1} B^T \right]^{-1} SR_{k+1} \\ u_k &= -K_{x_k} x_k + R^{-1} B^T \left[P_{k+1} B \left(B^T P_{k+1} B + R \right)^{-1} B^T \right]^{-1} SR_{k+1} = -K_{x_k} x_k + K_{Q_k} r_{k+1} - K_{S_k} r_{k+2} \quad (8) \end{aligned}$$

Ahol :

$$\begin{aligned} K_{x_k} &= R^{-1} B^T P_{k+1} \left[P_{k+1} B \left(B^T P_{k+1} B + R \right)^{-1} B^T \right]^{-1} A \\ K_{Q_k} &= R^{-1} B^T \left[P_{k+1} B \left(B^T P_{k+1} B + R \right)^{-1} B^T \right]^{-1} QC_r^T \left(C_r C_r^T \right)^{-1} \\ K_{S_k} &= R^{-1} B^T \left[P_{k+1} B \left(B^T P_{k+1} B + R \right)^{-1} B^T \right]^{-1} S_{k+1} C_r^T \left(C_r C_r^T \right)^{-1} \end{aligned}$$

Látható módon a kiadódott szabályozási törvényszerűség a jól ismert LQ optimális állapot visszacsatolásból (K_k, K_{x_k}) és egy referenciajelre vonatkozó előrecsatoló részből $(R_k$ vagy $K_{Q_k}, K_{S_k})$ áll. Ez utóbbi rész nagyon hasonló az [1]-ben folytonos időre levezetett előrecsatoló részhez. (1) alapján x_{k+1} -et u_k -ból számítjuk, azaz r_{k+1} ismerete szükséges a k -adik időpillanatban. A levezetett szabályozó azonban r_{k+2} ismeretét is igényli, mely egy lépéses előretekintést jelent. (8) szerint viszont az erősítéseket úgyis csak időben visszafelé lehet meghatározni, azaz a referenciajelet a teljes horizonton előre ismerni kell. Így az egy lépéses előretekintés nem okoz gondot. A következő fejezetben a fenti eredmények felhasználásával a végtelen horizontú szabályozás levezetésére kerül sor.

DISZKRÉTIDEJŰ, VÉGTELEN HORIZONTÚ, LQ OPTIMÁLIS KIMENETKÖVETŐ SZABÁLYOZÁS

Ez az eset a véges horizontú megoldásból vezethető le $k \rightarrow \infty$ határátmenettel, és azzal a járulékos feltétellel, hogy konstans referenciajelre zérus követési hibát garantáljon a szabályozó.

A végtelen horizont speciális esetet jelent, mert ekkor a bemenő jel általában nem lesz zérusértékű, és így a funkcionál ((3) vagy (6)) nem lehet véges értékű. Így a funkcionál minimalizálásából nem vezethető le korrektül a megoldás, a figyelembe vett kiegészítő feltétellel (zérus követési hiba) viszont már igen. Végül a jól ismert végtelen horizontú LQ optimális regulátor adódik egy a referenciajelet tartalmazó résszel kiegészítve, mely garantálja a zérus követési hibát (konstans referenciajelre).

A következő eredmények $k \rightarrow \infty$ határátmenettel (8)-ből azonnal adódnak:

$$\begin{aligned} P &= Q + A^T P A - A^T P B (B^T P B + R)^{-1} B^T P A \\ K_x &= R^{-1} B^T P + B R^{-1} B^T P^{-1} A \\ K_Q &= R^{-1} B^T + P B R^{-1} B^T Q C_r^T (C_r C_r^T)^{-1} \end{aligned} \quad (9)$$

Végül még K_s meghatározása szükséges, mely a zérus követési hibára vonatkozó feltételből tehető meg. Az állapotdinamikai egyenlet (1,8,9) felhasználásával az alábbi formában adódik:

$$x_{k+1} = A x_k - B K_x x_k + B K_Q r_{k+1} - B K_S r_{k+2} \quad (10)$$

Feltételezve, hogy $r_{k+i} = r_\infty = \text{const} \quad \forall i \geq 1$ az állandósult állapot az alábbi módon adódik:

$$\begin{aligned} x_\infty &= (I - B K_x)^{-1} B K_Q r_\infty - B K_S r_\infty \Rightarrow \\ x_\infty &= (I - A + B K_x)^{-1} B K_Q - B K_S r_\infty \end{aligned} \quad (11)$$

(11) számítása az inverz mátrix létezését igényli. Ennek feltétele, hogy $I - A + B K_x$ determinánsa ne legyen zérus. Ez a kifejezés éppen az LQ optimális visszacsatolással ellátott zárt rendszer karakterisztikus polinomja $z = 1$ értékkel:

$$\varphi_c(z) = \det(I - A + B K_x)_{z=1} = \det(I - A + B K_x) \neq 0 \quad (12)$$

(12)-nek minden esetben teljesülnie kell, mert az LQ optimális állapot visszacsatolás a zárt rendszer pólusait az egységgörön belülré helyezi. Így $z = 1$ nem lehet pólus és (11) számítható.

Az állandósult állapotbeli kimenet (2) és (11) segítségével a következő alakban írható:

$$r_\infty = y_\infty = C_r x_\infty = C_r \left[-A + BK_x \right]^{-1} B (K_Q - K_S) r_\infty \quad (13)$$

(13)-ból K_S -re a következő kifejezés adódik:

$$\begin{aligned} C_r \left[-A + BK_x \right]^{-1} BK_S &= C_r \left[-A + BK_x \right]^{-1} BK_Q - I \\ FK_S &= FK_Q - I \\ \text{ahol : } F &= C_r \left[-A + BK_x \right]^{-1} B \end{aligned} \quad (14)$$

Itt F egy $r \times m$ -es mátrix, mivel C_r $r \times n$ -es, míg B $n \times m$ -es. K_S számítása F dimenziójától és rangjától függ. Belátható, hogy $\text{rank}(F) = \min(r, m)$, így három eset lehetséges:

- $r = m$ a kimenetek száma megegyezik a bemenetek számával. Ekkor F teljes rangú, négyzetes, invertálható mátrix és így K_S pontosan számítható: $K_S = K_Q - F^{-1}$
- $r > m$ a kimenetek száma nagyobb, mint a bemeneteké. Ekkor csak legkisebb négyzetes értelemben optimális megoldás létezik, mivel legfeljebb a bemenetek számával megegyező számú kimenet lenne irányítható megfelelően (F m -edrangú téglalapmátrix).

$$K_S = K_Q - (F^T F)^{-1} F^T$$

- $r < m$ a kimenetek száma kisebb, mint a bemeneteké. Ekkor F egy r -edrangú téglalapmátrix és a Moore-Penrose-féle pseudoinverz (pinv) alkalmazásával pontos megoldás adódik:

$$K_S = K_Q - \text{pinv}(F)$$

Így a végtelen horizontú kontrol bemenet a következő alakban írható fel:

$$u_k = -K_x x_k + K_Q r_{k+1} - K_S r_{k+2} \quad (15)$$

A kiadódó szabályozási törvényszerűség szerkezete a következő ((10) és K_S számítása alapján):

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A \cdot x_k - B \cdot K_x x_k + B \cdot K_Q r_{k+1} - B \underbrace{(K_Q - M)}_{K_S} r_{k+2} \\ x_{k+1} &= \underbrace{(A - B \cdot K_x)}_{\text{Egyszerű állapot visszacsatolás}} x_k + \underbrace{B \cdot M \cdot r_{k+2}}_{\text{P tag}} - \underbrace{B \cdot K_Q (r_{k+2} - r_{k+1})}_{\text{D tag}} \end{aligned} \quad (16)$$

(16)-ból látható, hogy tulajdonképpen a jól ismert LQ optimális állapot visszacsatolást egészíti ki az új megoldás a referenciajelre vonatkozó P és D tagokkal (itt az M mátrix F dimenziójától függ).

Azonban (16) alkalmazása r_{k+1} és r_{k+2} ismeretét is igényli, azaz egy lépéses előretekintés szükséges. Valós idejű alkalmazásoknál ez problémát okozhat, de matematikai értelemben sima referenciajelek esetén lineáris extrapolációval helyettesíthető:

$$\begin{aligned} r_{k+2} &= -r_k + 2r_{k+1} \\ u_k &= -K_x x_k + K_S r_k + K_Q - 2K_S \dot{r}_{k+1} \end{aligned} \quad (17)$$

Ez a megoldás sima referencijel (a valós referencijelek általában simák) esetén hasonlóan jó követést biztosít, mint az egy lépéssel előretekintő és nem okoz jelentős kontrolenergia növekedést. Ugyanakkor ugrás típusú bemenőjelekre ugyan szintén jól követ, de a kontrolenergiában jelentős növekedést okoz.

A következő részben az aszimptotikus stabilitás, aszimptotikusan zéró követési hiba és a szeparációs elv kielégítése kerül bizonyításra. Ehhez az alábbi egyszerűsítő jelölés vezethető be:

$$\phi = A - BK_x$$

A LEVEZETETT VÉGTELEN HORIZONTÚ SZABÁLYOZÁS TULAJDONSÁGAINAK KIMONDÁSA ÉS BIZONYÍTÁSA

1. TÉTEL (garantált aszimptotikus stabilitás): A javasolt végtelen horizontú kimenetkövető megoldások (15) és (17) garantálják az aszimptotikus stabilitást konstans, véges, kimenet referencijelek esetén.

Bizonyítás: Konstruktív bizonyítás alkalmazható. Az eredményül kapott LQ optimális állapot visszacsatolás garantáltan stabil, így csak a referencijel hatása kérdéses. A k -adik időpillanattól indulva és $r_{k+i} = r_\infty = \text{const} \quad \forall i \geq 0$ kifejezést figyelembe véve (16)-ból az alábbi alak adódik:

$$x_{k+1} = \phi \cdot x_k + B \cdot M \cdot r_\infty \quad (18)$$

(15)-re és (17)-re egyaránt. (18) és az állapotdinamikai egyenlet figyelembe vételével a további állapotok a következőképpen számíthatók:

$$\begin{aligned} x_{k+2} &= \phi \cdot x_{k+1} + B \cdot M \cdot r_\infty = \phi^2 x_k + \phi \cdot B \cdot M \cdot r_\infty + B \cdot M \cdot r_\infty \\ x_{k+3} &= \phi^3 x_k + \phi^2 B \cdot M \cdot r_\infty + \phi \cdot B \cdot M \cdot r_\infty + B \cdot M \cdot r_\infty \\ &\vdots \\ x_{k+n} &= \phi^n x_k + \left[\sum_{m=0}^{n-1} \phi^m \right] B \cdot M \cdot r_\infty \end{aligned} \quad (19)$$

Az aszimptotikus stabilitás eldöntéséhez az $n \rightarrow \infty$ határátmenet vizsgálata szükséges. ϕ a visszacsatolt, zárt rendszer mátrixa, ezért minden sajátértéke az *egységkör belsejében* helyezkedik el. Ez azt jelenti, hogy nilpotens mátrix és így az n -edik hatványa nullához tart (ha $n \rightarrow \infty$). Ezt figyelembe véve (19) határértéke az alábbi lesz:

$$\mathbf{x}_{k+\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{m=0}^{n-1} \phi^m \right] \mathbf{B} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{r}_{\infty} \quad (20)$$

(20)-ban egy mátrix geometriai sor határértékét kell meghatározni. Egy mátrix geometriai sor konvergencia, ha mátrixának minden sajátértéke az *egységkörön belül* helyezkedik el. Ez ϕ -re fennáll, így a fenti sor konvergencia és az állandósult állapot a következő alakot veszi fel:

$$\mathbf{x}_{k+\infty} = (\mathbf{I} - \phi)^{-1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{r}_{\infty} \quad (21)$$

$(\mathbf{I} - \phi)^{-1}$, $\mathbf{B}$ és $\mathbf{M}$ véges mátrixok, így véges referenciajel esetén az állandósult állapot is véges. Ez pedig azt jelenti, hogy a szabályozott rendszer aszimptotikusan stabil véges, konstans referenciajel esetén.

2. TÉTEL (garantált aszimptotikusan nulla követési hiba): A javasolt végtelen horizontú kimenetkövető megoldások (15) és (17) garantálják az aszimptotikusan nulla követési hibát konstans, véges, kimenet referenciajelek esetén, ha a kimenet dimenziója kisebb vagy egyenlő a bemenetével.

Bizonyítás: (21) és (2) kombinációjával:

$$\mathbf{e}_{\infty} = \mathbf{C}_r \cdot \mathbf{x}_{\infty} - \mathbf{r}_{\infty} = \mathbf{C}_r (\mathbf{I} - \phi)^{-1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{r}_{\infty} - \mathbf{r}_{\infty} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{r}_{\infty} - \mathbf{r}_{\infty} \quad (22)$$

Az állításban szereplő esetben $\mathbf{F} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{I}$ ami nulla követési hibát jelent.

Egyéb esetben (ha a kimenet dimenziója magasabb, mint a bemenet) $\mathbf{F} (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \neq \mathbf{I}$, mert csak legkisebb négyzetes értelemben optimális a megoldás. Ekkor az állandósult állapotbeli követési hiba:

$$\mathbf{e}_{\infty} = \left\{ \mathbf{F} \cdot (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T - \mathbf{I} \right\} \mathbf{r}_{\infty} \quad (23)$$

Végül szükséges vizsgálni állapotbecslő alkalmazását, mivel általában az összes állapot nem mérhető a szabályozó implementálása során. Ez vezet a következő tételhez:

3. TÉTEL (a szeparációs elv kielégítése): A javasolt végtelen horizontú kimenetkövető megoldások (15) és (17) garantálják a szeparációs elv teljesülését mind konstans, mind időben változó referenciajelekre és tetszőleges (determinisztikus vagy sztochasztikus) állapotbecslőre.

Bizonyítás: A diszkrét idejű aktuális állapotbecslő (akár determinisztikus akár sztochasztikus) egyenletei a következők:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k &= \bar{\mathbf{x}}_k + \mathbf{L}_o (\mathbf{y}_k - \mathbf{C} \bar{\mathbf{x}}_k) \\ \bar{\mathbf{x}}_k &= \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B} \mathbf{u}_{k-1} \\ \mathbf{x}_{k+1}^e &= \hat{\mathbf{x}}_{k+1} - \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} (\mathbf{I} - \mathbf{L}_o \mathbf{C}) \hat{\mathbf{x}}_k^e \end{aligned} \quad (24)$$

Itt $\hat{x}_k$ a becsült állapot, y_k pedig a mért kimenet (lásd (1)). A kibővített rendszer állapotdinamikai egyenletei (10) és (24) felhasználásával írhatók fel:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_{k+1}^e \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A - BK_x & -BK_x \\ 0 & A - L_o C \end{bmatrix}}_{A_a} \begin{bmatrix} x_k \\ x_k^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BK_Q r_{k+1} - BK_S r_{k+2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

A_a használatával a kibővített rendszer pólusai az alábbi egyenletből számíthatók:

$$\det(sI - A_a) = \det(sI - A + BK_x) \det(sI - A + AL_o C) = 0 \quad (26)$$

(25)-ből látható, hogy sem a referencijel, sem a rendszer állapotai nem befolyásolják a becslési hiba dinamikáját, így a szeparációs elv teljesül.

Az eredményeket összegezve elmondható, hogy a javasolt új szabályozási megoldás aszimptotikusan stabil, képes zérus követési hibát garantálni és függetlenül kiegészíthető állapotbecslővel.

A következő részben a módszer alkalmazása négyrotoros helikopter pályakövető szabályozásán keresztül kerül bemutatásra, kipróbálva mind az egy lépéssel előretekintő, mind az extrapolációs megoldást.

ALKALMAZÁSI PÉLDÁK EGYLÉPÉSES ELŐRETEKINTÉSEL, ILLETVE EXTRAPOLÁCIÓVAL

A felhasznált négyrotoros helikopter modell egy kutatási együttműködés keretében készül [11, 12]. [13]-ban elkészült a helikopter nemlineáris szimulációja MATLAB Simulink környezetben. Ebből lebegésben linearizálva [14]-ben egy folytonos idejű, LTI modell készült.

A linearizált modell állapotai, mért kimenetei és bemenetei a következők:

- *Állapotok:* $x = [\text{függőleges pozíció föld koordináta-rendszerben (Z), sebesség komponensek test koordináta-rendszerben (u v w), szögsebesség komponensek test koordináta-rendszerben (P Q R), Euler szögek (\varphi \theta \psi)]$
- *Mért kimenetek:* $y = [\text{gyorsulások test koordináta-rendszerben (du/dt dv/dt dw/dt), mért magasság (h = -Z sík terepet feltételezve), szögsebesség komponensek test koordináta-rendszerben (P Q R), a helikopter orientációja (\psi)]$
- *Bemenetek:* $u = [\text{bólintó parancs } \delta_{\text{pitch}}, \text{bedöntési parancs } \delta_{\text{roll}}, \text{legyező parancs } \delta_{\text{yaw}}, \text{emelkedési / süllyedési parancs } \delta_{\text{asc/desc}]$

Összegezve a jelöléseket:

- $x = [Z \ u \ v \ w \ P \ Q \ R \ \varphi \ \theta \ \psi]$
- $y = [du/dt \ dv/dt \ dw/dt \ h \ P \ Q \ R \ \psi]$
- $u = [\delta_{pitch} \ \delta_{roll} \ \delta_{yaw} \ \delta_{asc/desc}]$

Az így kapott folytonos idejű modell irányítható és megfigyelhető. Ebből transzformációval készült a diszkrétidejű modell zérusrendű tartószervet feltételezve. A mintavételi idő a nyílt hurok sávszélessége alapján lett megválasztva.

A nyílt hurok sávszélessége 4 rad/sec értékre adódott. A zárt kör sávszélessége [4] 485. oldala alapján ennek akár a tizede is lehet. Ugyanakkor a mintavételi frekvenciát a zárt hurok sávszélességének 6 – 40 szeresére érdemes választani ([4] 485. old.). Végül a nyílt hurok sávszélességének ötszöröse, azaz 20 rad/sec került kiválasztásra. Ez $T = 0,05$ sec mintavételi időt jelent. Az eredményül kapott diszkrétidejű modell úgyszintén irányítható és megfigyelhető. A kifejlesztett szabályozás működése ezen a modellen került tesztelésre mind egy lépéses előretekintéssel, mind extrapolációval.

A kimenetkövetésben nem súlyozott állapotok súlyozása az inverz négyzetek módszere alapján lett meghatározva, figyelembe véve a különböző állapotokkal betartandó határértékeket. A cél az volt, hogy a szabályozott rendszer működése során a lineáris tartományban maradjon és így a lineáris szabályozó esetleg a nemlineáris rendszeren is jól működjön.

A figyelembe vett felső korlátok a következők:

- 0,5 m/sec az u, v, w sebesség komponensekre
- 2 fok/sec a P, Q, R szögsebesség komponensekre
- 5 fok az Euler szögekre
- 100 egység a kontrol bemenetekre

Természetesen a súlyozás néha ettől eltérő, ha szükséges, vagy lehetséges. A többi súly optimális értéke próbálgatással lett meghatározva. A szabályozó szimulációkkal való tesztelése során feltételezés volt az összes állapot mérhetősége, így állapotbecslőt nem kellett alkalmazni.

Az eredmények összehasonlítása a kontrol bemenetek és a követési hibák közelítő kettes normája alapján lehetséges (a közelítő kettes norma trapéz szabállyal a szimulációs idő végéig került számításra (végtelen idő helyett)).

A követendő referenciajelek az $(u \ v)$ sebességkomponensek, a Z függőleges pozíció és a ψ orientáció voltak. Így a követendő kimenetek mátrixa:

$$C_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A súlyozó mátrixok mind az egy lépéssel előretekintő, mind az extrapolációs módszerhez (itt $< >$ diagonális mátrixot jelöl):

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 820 & 820 & 50 & 135 & 135 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1000 & 100 & 100 & 10000 \end{bmatrix}$$

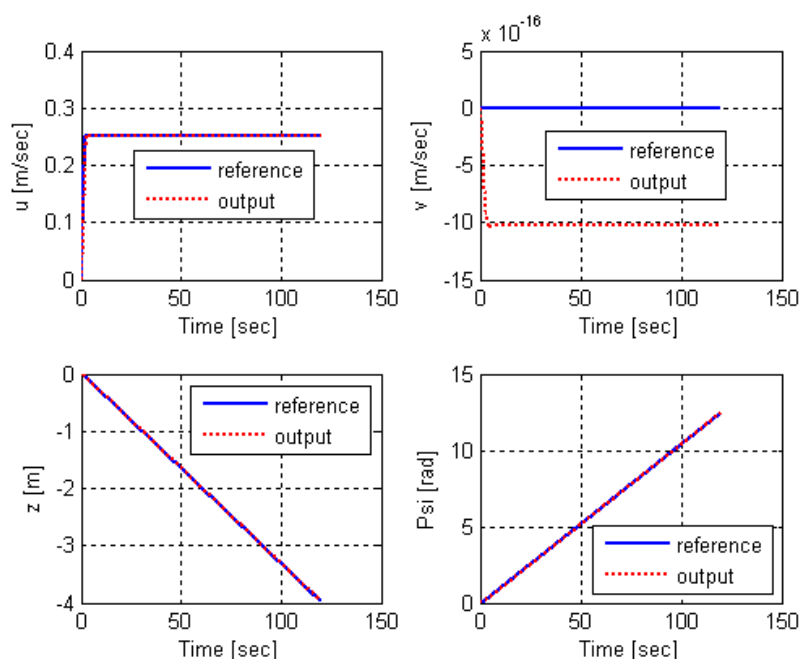
$$R = \begin{bmatrix} 1e-6 & 1e-6 & 1e-6 & 1e-6 \end{bmatrix}$$

A kettes normás eredményeket az 1. táblázat összegzi. Az extrapolációs megoldás egy kicsivel több kontrolenergiát használ (miközben azonosan jó követést biztosít), mint az egy lépéssel előretekintő, de a különbség nem számottevő. Ez bizonyítja az extrapolációs megoldás jó használhatóságát (matematikailag sima referenciajelek esetén).

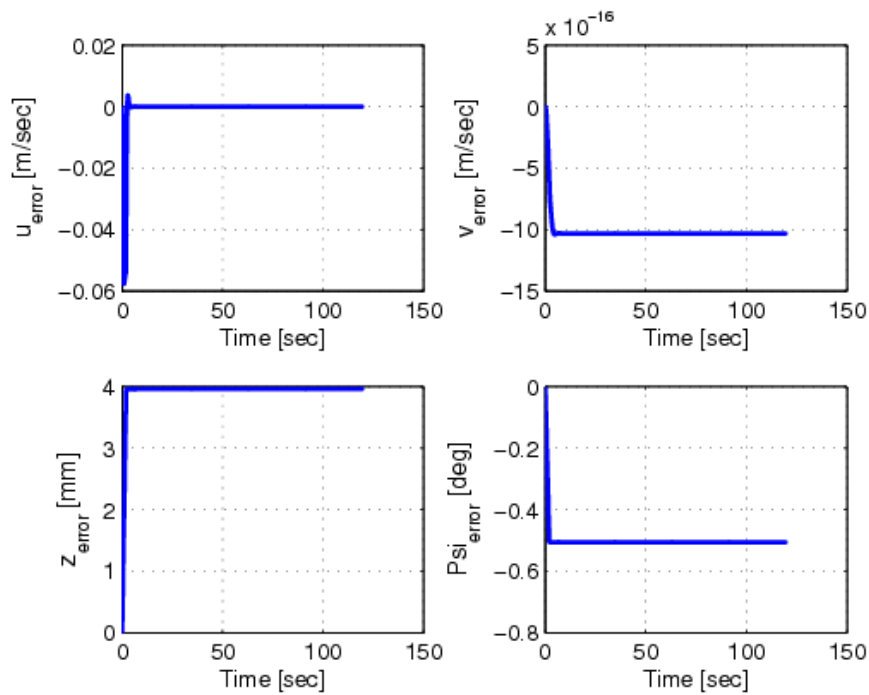
Kontrol bemenetek és hibák kettes normái 1. táblázat

Adott jellemző kettes normája	Egy lépéssel előretekintő szabályozás	Extrapolációs szabályozás
delta_pitch	0,0394	0,1277
delta_roll	3,00E-16	3,93E-16
delta_yaw	4,1056	4,1465
delta_asc/desc	0,7076	0,7165
u_error	0,0743	0,0745
v_error	1,12E-14	1,12E-14
Z_error	0,0432	0,0432
Psi_error	0,0962	0,0962

A követés az extrapolációs esetre az 1., míg a követési hibák a 2. ábrán láthatók. A követési hibák minden változóra elfogadhatók.

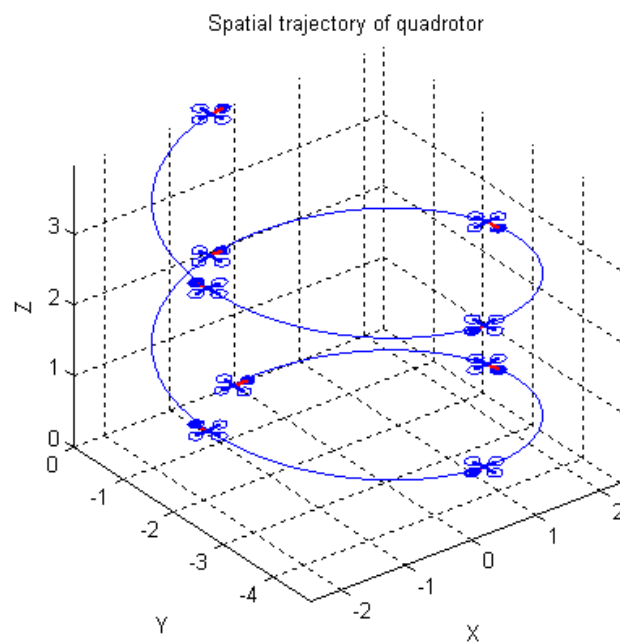


1. ábra. A referenciajelek követése extrapolációval



2. ábra. A referenciajelek követési hibái extrapolációval

Láthatóan a sebességkomponensekre a követési hibák közel zérus értékre állnak be, ami kiváló. A magasság követési hibája 4 mm, mely beltérben is elfogadható, az orientációt a helikopter 0,5 fok állandósult hibával követi, ami szintén kiváló. Végül a 3. ábra mutatja a szabályozással megvalósított emelkedő spirálpályát. Jól látszik, hogy a helikopter orra (tele karika) mindig a haladási irányba mutat, tehát az orientáció folyamatosan és megfelelően változik.



3. ábra. A négyrotoros helikopter térbeli pályája

ÖSSZEGZÉS ÉS TOVÁBBLÉPÉSI LEHETŐSÉGEK

Jelen cikk rövid irodalmi áttekintés után kimutatta, hogy szükséges egy pontos, végtelen horizontú, LQ optimális kimenetkövető szabályozási megoldás, mely legalább konstans referenciajelre képes garantálni a zérus követési hibát és valós időben alkalmazható.

Szerencsés módon diszkrétidejű, LTI rendszerek esetén a kitűzött feladat megoldható. Ezt a megoldást ismerteti a cikk további része.

Először a véges horizontú megoldás levezetésére került sor, ami a végtelen horizontú megoldás alapja. A végtelen horizont általában lehetetlenné teszi, hogy véges funkcionálérték adódjon, így határátmenettel csak az eredmények egy része kapható meg. A hiányzó részt egy kiegészítő feltétel, mégpedig a zérus követési hiba (konstans referenciajelre) segítségével lehet meghatározni.

Az eredményül kapott új szabályozási megoldás garantálja az aszimptotikus stabilitást és a zérus követési hibát konstans referenciajelre (melynek dimenziója kisebb a bemenet dimenziójánál, vagy egyenlő azzal), és tetszőleges referenciajelre kielégíti a szeparációs elvet. Utóbbi azt jelenti, hogy az állapotbecslő dinamikája teljesen független a szabályozott rendszer állapotaitól és a referenciajeltől (ugyanakkor persze függ a rendszer mért kimeneteitől).

Első alakjában a módszer egy lépéses előretekintést használ, de matematikailag sima referenciajelek esetén extrapoláció alkalmazásával valós időben használhatóvá alakítható.

Egy négyrotoros helikopter pályakövető szabályozása demonstrálja a módszer alkalmazhatóságát. A követési eredmények extrapolációval is kiválóak és a felhasznált kontrolenergia sem növekedik jelentősen az egy lépéses előretekintéshez képest. Így rendelkezésre áll egy valós időben alkalmazható, aszimptotikus stabilitást, aszimptotikusan zéró követési hibát garantáló és a szeparációs elvet kielégítő szabályozási módszer.

A továbbiakban vizsgálandó kérdések a végtelen horizontú költségfüggvény alakulása, a stabilitás (BIBO / l_1 stabilitás) és követési hiba időben változó referenciajelek esetén és az állapotbecslő hatása a rendszer működésére. Végül fontos a szabályozás robusztusságának vizsgálata megzavart lineáris, illetve nemlineáris rendszerekre.

FELHASZNÁLT IRODALOM

- [1] MICHAEL ATHANS – PETER L. FALB: Optimal Control, An introduction to the Theory and its Applications, McGraw-Hill Book Company, 1966.
- [2] BRIAN D. O. ANDERSON – JOHN B. MOORE: Optimal Control, Linear Quadratic Methods, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ; 1989.
- [3] TONGWEN CHEN – BRUCE FRANCIS: Optimal Sampled-Data Control Systems, Springer-Verlag London Limited, 1995.
- [4] GENE F. FRANKLIN – J. DAVID POWEL – MICHAEL L. WORKMAN: Digital Control of Dynamic Systems, Addison-Wesley Publishing Company, 1990.
- [5] JEFFREY B. BURL: Linear Optimal Control, H_2 and H_∞ Methods, Addison Wesley Longman Inc., Menlo Park California, 1999.
- [6] MIKE J. GRIMBLE – ANDRZEJ W. ORDYS: Predictive Control for Industrial Applications, Ann. Rev. in Cont., vol. 25, 2001, 13-24. o.
- [7] E. MOSCA – A. CASAVOLA: Deterministic LQ Preview Tracking Design, IEEE Trans. on Aut. Cont., vol. 40, 1995, 1278-1281. o.

- [8] ASIF FAROOQ – DAVID J. N. LIMEBEER: Path Following of Optimal Trajectories Using Preview Control, in Proc. of 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference 2005, Seville, Spain, 2005, 2787-2792. o.
- [9] JACQUES L. WILLEMS – IVEN M. Y. MAREELS: A Rigorous Solution of the Infinite Time Interval LQ Problem with Constant State Tracking, {it Sys. \& Cont. Let.}, vol. 52, 2004, 289-296. o.
- [10] ENRIQUE BARBIERI – ROCIO ALBA-FLORES, On the Infinite--horizon LQ Tracker, it Sys. \& Cont. Let., vol. 40, 2000, 77-82. o.
- [11] PÉTER GÁSPÁR – ALEXANDROS SOUMELIDIS – BÉLA LANTOS – ZOLTÁN PROHÁSZKA – PÉTER BAUER: Embedded computer based nonlinear vehicle control: a quadrotor helicopter experiment, in Proc. of Vehicle System Dynamics Identification and Anomalies 2006, Budapest, Hungary, 2006
- [12] ALEXANDROS SOUMELIDIS – PÉTER GÁSPÁR - PÉTER BAUER – BÉLA LANTOS - ZOLTÁN PROHÁSZKA: Design of an embedded microcomputer based mini quadrotor UAV, in Proc. of European Control Conference 2007, Kos, Greece, 2007.
- [13] RITZINGER GYÖRGY: Szitakötő négyrotoros helikopter szabályozása állapotviszacsatolás és állapotbecslő alkalmazásával, Diplomaterv, Budapest; 2007.
- [14] PÉTER BAUER – GYÖRGY RITZINGER – ALEXANDROS SOUMELIDIS – JÓZSEF BOKOR: LQ Servo Control Design with Kalman Filter for a Quadrotor UAV, publikációra elfogadva a Periodica Polytechnica Transportation Engineering kötetébe 2007 novemberében