

VALÓSÁGOS ÖRVÉNYEK

Az aerodinamikában igen gyakran találkozunk az örvény fogalmával. Ez az örvény a repülőgép körüli áramlásban kialakuló rotációból (forgásból) származik. Egy — általában kis térrész — rotációt egyetlen vonalra sűrítve kapjuk az örvény-fonalat, amely örvény-fonal ezek szerint valamilyen, véges cirkulációt képvisel és számos esetben jól alkalmazható örvény modellt ad. Ilyen örvény fonal pl. a szárnyakon keletkező hordozó-örvény vagy a szárnyakról leúszó leúszó-örvény, illetve az induló örvény. Ezek az örvény-fonalak a környezetükben sebességet indukálnak, az indukált sebességet a Biot-Savart törvény segítségével határozzuk meg. Az örvény-fonalak létrehozási módjából is következik, hogy ez az indukált sebesség a fonalnál (nulla távolság esetén) végtelen. Ez, fizikailag nyilvánvalóan nem lehetséges, ezért a valósághoz közelebb álló számítások esetében az örvény-fonal feltételezés helyett olyan örvény-csővel számolunk, amelynek véges sugarú magja van. Ez az örvény-mag alkalmas az örvény öregedés figyelembe vételére is. Az ilyen, valóságos vagy viszkózus örvény esetén a hagyományos számolási módszerek kiegészíthetők a súrlódás hatását figyelembe vevő módszerrel.

IDEÁLIS ÖRVÉNYEK MEGMARADÁSI ELVEI

Tekintsük példaként egy szárny mögötti, diszkrét örvényekből álló leúszó örvényrendszert. Az ilyen típusú rendszerekre, ideális esetre Betz három megmaradási elvet fogalmazott meg [2]. Az első az örvény-megmaradási tétel, eszerint:

$$\Gamma = \int_0^L \gamma(x_l) dx_l = \text{const} \quad (1)$$

A második megmaradási elv szerint az örvények elsőrendű nyomatéka állandó:

$$K = \int_0^L \gamma(x_l) x_l dx_l = \text{const} \quad (2)$$

Végül a harmadik megmaradási elv szerint az örvények másodrendű nyomatéka is állandó:

$$J = \int_0^L \gamma(x_l) x_l^2 dx_l = \text{const} \quad (3)$$

ahol: Γ , K és J — a megfelelő állandók;

$\gamma(x_l)$ — a szárnyról leúszó, megoszló örvény az „ x_l ” helyen;

L — szárny esetében a fél fesztáv, rotor esetében a lapáthossz.

Ez a három elv — többek között — alkalmas arra, hogy segítségükkel a felcsavarodó szárnyvég örvény térbeli helyzetét meghatározzuk, vagy az esetleg más módszerrel meghatározott örvény-pozíciót ellenőrizzük.

A szárnyról leúszó örvények viszonylag hamar felcsavarodnak és egy, nagy intenzitású leúszó örvénnyé egyesülnek. A szárny vagy rotorlapát mögötti, teljes felcsavarodás előtti zónát közeli örvényes nyomnak is szokás nevezni. Ebben a szárnyhoz, rotorlapáthoz közeli zónában az örvények csak igen rövid időt töltenek, ezért a súrlódás hatását elhanyagolhatjuk, az örvényeket ideálisnak tekinthetjük.

VALÓSÁGOS ÖRVÉNY MODELLEK

A már felcsavarodott szárnyvég örvény intenzitása és élettartama egyaránt indokolja illetve szükségessé teszi a sűrűlódás hatásának figyelembe vételét. Ezen túl fontos a valóságos örvényekkel való számolás azért is, mert egy ideális, lényegében nulla átmérőjű örvényfonal a saját helyén végtelen sebességet indukál - ez fizikailag nyilvánvalóan lehetetlen. Ezért több, a valóságos örvényeket leíró modellt fejlesztettek ki ([3], [6], [8]). E modellek közös vonása az örvény-mag definiálása, az örvényesség ebben, a véges sugarú magban helyezkedik el. A legkorábbi ilyen modellt Rankine fejlesztette ki. Ezután számos modellt alkottak (pl. Kaufmann, Scully, Vatistas), ebben a cikkben a Lamb-Oseen modellből indulunk ki:

$$v(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) \right], \quad (4)$$

ahol: $v(r)$ — az indukált sebesség a sugár (r) függvényében;

Γ — cirkuláció;

ν — kinematikai viszkozitás;

t — idő (az örvény kora).

A (4) szerinti indukált sebesség eloszlás olyan, hogy az indukált sebesség értéke az örvénymag középpontjában nulla, ettől kifele meredeken növekszik egy maximális értékig majd csökken és hiperbolikushoz hasonló módon nullához tart. A maximális értékhez tartozó sugártól (ez az örvénymag sugara) kifelé az indukált sebesség alakulása az ideális, egy vonalon elhelyezkedő örvény indukált sebesség eloszlásához a sugár növekedésével egyre inkább hasonló lesz. Az örvénymag sugarát úgy számíthatjuk ki, ha a (4)-et a sugár szerint deriváljuk, az így kapott egyenletet nullával tesszük egyenlővé - innen az örvénymag sugara (rc) számítható:

$$rc = \sqrt{-4\nu t \operatorname{LambertW}\left(-1, -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right) - 2\nu t} \quad (5)$$

ahol: a $\operatorname{LambertW}$ függvény aktuális értéke: -1.7564312; behelyettesítve ezt az értéket (5)-be, a jól ismert formulát kapjuk:

$$rc = \sqrt{4\alpha\nu t}, \quad (6)$$

ahol: $\alpha = 1.256431$

Ez, a Lamb-Oseen modell [3] szerint, ez ekvivalens viszkozitási együttható (δ) bevezetésével turbulens áramlásra is kiterjeszthető:

$$rc = \sqrt{4\alpha\delta\nu t}, \quad (7)$$

ahol: $\delta = 1 + a \operatorname{Re}_\Gamma$;

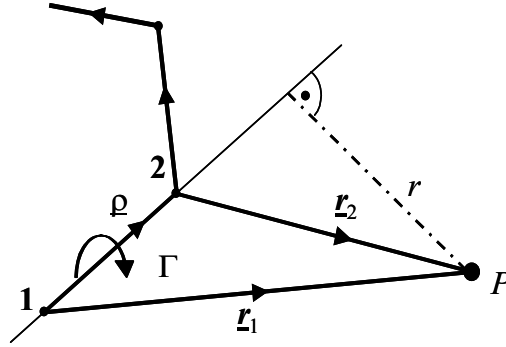
$\operatorname{Re}_\Gamma = \Gamma / \nu$ — az örvény-Reynolds szám;

$a = 0.0002 \dots 0.2$, tapasztalati tényező.

Az örvénymag sugara ezek szerint csak a viszkozitástól és az örvény létezési idejétől függ, konkrét értéke a nem túl nagy időtartamok esetében 1÷10 cm nagyságrendben változik. A (6) vagy (7) szerinti örvénymag sugár az időben növekszik. Ez megfelel annak a várakozásnak, ami szerint az örvény a forgása során kiterjed. Másrészt ezzel a növekedéssel együtt a maximális indukált sebesség csökken, amit másképp az örvény öregedésének is nevezhetünk.

TÉRBELI ÖRVÉNY MODELL

A Lamb-Oseen modell kétdimenziós áramlásra érvényes, arra az esetre, amikor az örvény geometriai középvonala egy egyenes. Az indukált sebességet az erre az egyenesre merőleges síkban adja, polár koordináta rendszerben. A repülésben általában görbe vonal mentén elhelyezkedő örvényekkel találkozhatunk. Ezeket az örvényeket (rövid) egyenes szakaszokból álló örvény szegmensekkel közelíthetjük. Egy ilyen örvény szegmens látható az 1. ábrán.



1. ábra. Örvény szegmens

Az ideális örvény szegmens által indukált sebességet, egy derékszögű koordináta rendszerben a következő módon számíthatunk ki:

$$\mathbf{w} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|^2} \left\{ \rho \left[\frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|} - \frac{\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|} \right] \right\} \quad (8)$$

Egy-egy ilyen örvény szegmens már forgás-szimmetrikusnak tekinthető és a problémát ekkor már egy olyan koordináta rendszerben vizsgálhatjuk, ahol a „z” tengely az „1” és „2” pontok által meghatározott egyenes, illetve az erre merőleges síkban egy „r” tengelyt definiálhatunk. Az indukált sebesség vektornak a „z” tengelyre merőleges síkba eső összetevőjét („h” a 2. ábra „B” pontjának z-koordinátája, a szegmens hossza) a következő módon számíthatjuk:

$$w_\varphi = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{1}{r} \left[\frac{z}{\sqrt{z^2 + r^2}} - \frac{z-h}{\sqrt{(z-h)^2 + r^2}} \right] \quad (9)$$

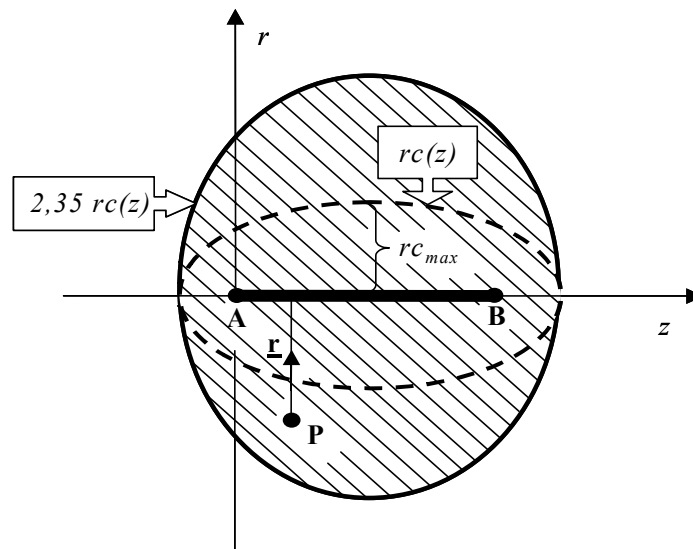
A maximális sugarat (rc_{max}) a $z = h/2$ helyettesítéssel számíthatjuk ki, ezután viszont a $w_\varphi = w_{\varphi max} = all.$ feltételből minden további „z” koordinátához tartozó sugarat számíthatunk. Ezzel megkapjuk a 2. ábrán szaggatott vonallal határolt, véges hosszúságú örvény szegmenshez rendelhető örvény magot. Ez a mag-felület a szegmensek végétől nem messze záródik. A valóságban az örvény szegmensek egymáshoz csatlakoznak, így az indukált sebesség számításában a szegmenstől távolabbi pontok nem bírnak túl nagy jelentőséggel, az ilyen pontokban a hozzájuk közeli szegmensek indukált sebessége a jelentős.

A valóságos örvény szegmensekre áttérve, ott az indukált sebességet (8) módosításával határozhatjuk meg. Vezessünk be a következő függvényt:

$$\varphi \left(\frac{|\mathbf{r}|}{rc(z)} \right) = \left[1 - \exp \left(\alpha \delta \frac{|\mathbf{r}|^2}{rc^2(z)} \right) \right], \quad (10)$$

ahol: z — a „P” pont lokális koordinátája;

$rc(z)$ — az adott lokális koordinátához tartozó mag sugár.



2. ábra.
Örvénymag és hatás-tartomány

A (8)-at ezzel a függvénnyel megszorozva kapjuk azt a kifejezést, amivel a valóságos örvény szegmens által indukált sebesség számítható:

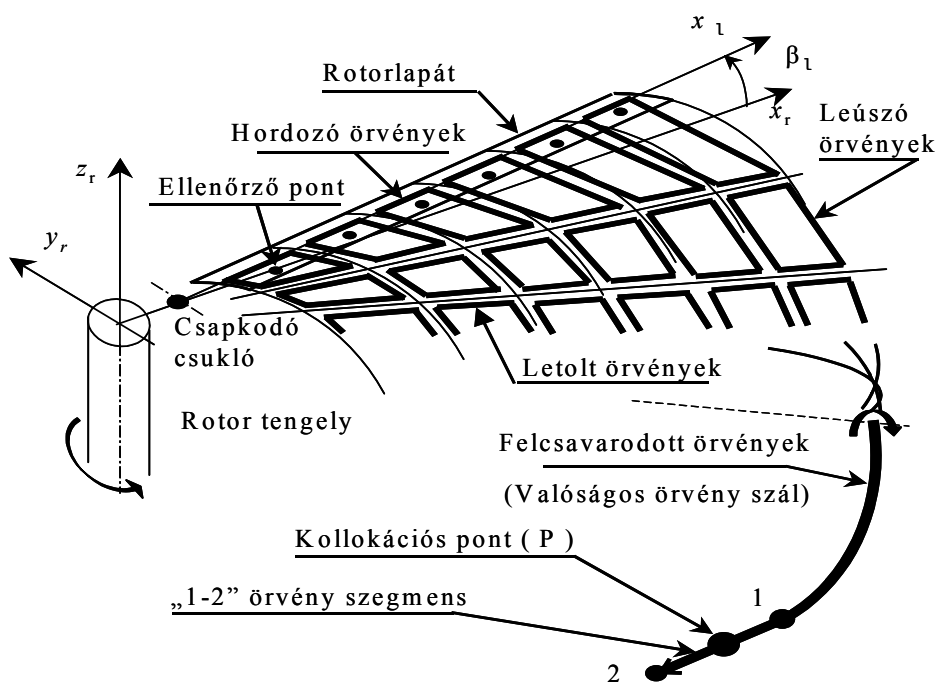
$$\mathbf{w} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|^2} \left\{ \rho \left[\frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|} - \frac{\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|} \right] \right\} \varphi \left(\frac{|\mathbf{r}|}{rc(z)} \right) \quad (11)$$

A 2. ábrán látható a vastag vonallal kihúzott $2,35 rc(z)$ tartomány. A (11) kifejezéssel csak ezen tartományon belül számolunk, mivel az általában érvényes paraméterek esetén a különbség (8) és (11) között a vastag vonalon kívül eső térben kicsi (általában kisebb, mint 0,1%).

ALKALMAZÁSI PÉLDA

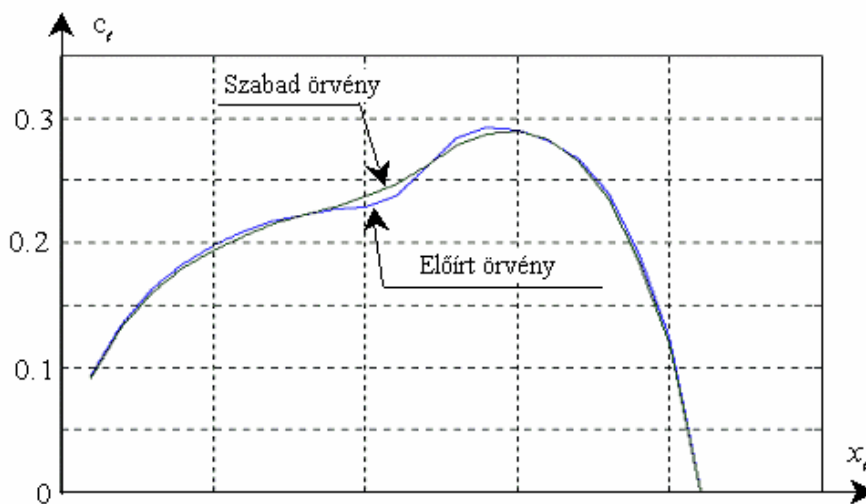
A 3. ábrán egy rotorlapát körül kialakuló örvényrendszert ábrázoltunk. Az ún. „letolt örvények” az időben változó cirkuláció következtében előáll, a rotorlapát hossz tengelyével nagyjából párhuzamosan induló örvények.

A véges maggal rendelkező, felcsavarodott, leúszó örvények a környező levegő részecskéiből állnak, ezért, természetesen a környező levegő sebességével mozognak. A helikopter rotorok mögötti áramlásban a repülési sebesség mellett a rotorlapátok örvényrendszere által indukált sebesség játszik szerepet. Az itt található alkalmazási példában az indukált sebesség mezőt egyszer részletesen kiszámítottuk, az így kapott eredményt a módszerre utaló „szabad örvény” elnevezéssel láttuk el. Másodszor, mivel az első módszer igencsak számítás igényes, tapasztalati alapon álló, előírt indukált sebesség eloszlást alkalmaztunk, „előírt örvény” elnevezéssel.



3. ábra. Rotorlapát körül kialakuló örvény-rendszer

Az MD 500-as helikopterre vonatkozó számítási példa részletesebben [5]-ben található meg, itt csak egy, jellemző részeredményt mutatunk be:



4. ábra. Felhajtóerő tényező eloszlása rotorlapát mentén

A példa részben mutatja, hogy ezzel a módszerrel a helikopter rotorlapátok aerodinamikai jellemzői számíthatók, illetve ami szintén igen fontos: a kétféle módszer közel azonos eredményt ad, vagyis az előírt indukált sebességgel működő, számítástechnikailag sokkal gazdaságosabb modell a példa szerinti esetben nyugodtan alkalmazható.

A cikk lezárásaként néhány gondolatot fogalmazunk meg. Legelőször is elmondhatjuk, hogy a repülőgépek aerodinamikájában széles körben alkalmazzuk az örvény elméleteket. A szárnyprofilok egyik legelterjedtebb és legegyszerűbb vizsgálati módja az örvény-panel mód

szer. A repülőgépszárnyak felhajtóerő-eloszlását a hordozóvonal vagy az alkalmazott örvény elmélet, esetleg a felületi örvény panel módszer segítségével határozhatjuk meg. A légsavarak és a helikopter rotorok esetében is széles körben alkalmazzuk az örvény elméleteket - főként a felületi örvény-panel módszer és a hordozóvonal elmélet elemeinek kombinációját.

Az örvény elméletek több előnyös és több hátrányos tulajdonsággal rendelkeznek. Előnyük az áramlási viszonyok jó közelítése a repülőgépek körüli teljes térben, miközben a figyelembe veendő örvény-szám nem kell túl nagy legyen. Ezzel mód nyílik különböző elemek aerodinamikai kölcsönhatásának vizsgálatára (pl. szárny - vezérsík, vagy két szárny stb). További igen nagy előny, hogy az elegendően finom örvény elméletek képesek az időben változó erőket — az instacionárius hatásokat — nyomon követni. Ez, különösen a helikopter rotorok esetében igen fontos. Az instacionárius hatások következtében jelentek meg a letolt örvények, amik — ezek szerint — az instacioneritások számításához szükségesek is.

Ezzel szemben állnak az örvény-elméletek hátrányai. Alapprobléma az, hogy ha ideális örvénnyel vagy nem megfelelő valóságos örvénnyel számolunk, akkor könnyen kaphatunk fizikailag irreális eredményeket (pl. igen nagy indukált sebesség), ami, ha erre külön nem figyelünk, direkt módon esetleg nem is derül ki. A másik probléma az, hogy az örvényelméletekkel történő számolás számítógépen is időigényes, különösen, ha szabad leúszó örvényekkel számolunk és különböző ellenőrzéseket is beiktatunk. Végeredményben, ha az örvény elmélet jól működik, akkor viszonylag hosszabb számolás után jó eredményeket kapunk, ha azonban nem működik jól, akkor az eredmények igen rosszak is lehetnek. Ez nagyjából azt jelenti, hogy a bonyolultabb számításokat valamilyen (más) módon feltétlenül ellenőrizni kell.

FELHASZNÁLT IRODALOM

- [1] **Bergh, H.-Wekken, A.J.P.:** Comparaison between Measured and Calculated Stall-Flutter Behaviour of a One-Bladed Model Rotor, *Vertica*, Vol. 11. No. 3. pp. 447-456, 1987.
- [2] **Betz, A.:** Verhalten von Wirbelsystemen, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Bd. XII., Nr. 3. 1932. (pp. 164-174).
- [3] **Bhagwat, M. J.- Leishman, J. G.:** Generalized Viscous Vortex Model for Application to Free-Vortex Wake and Aeroacoustic Calculations AHS Fom, 2002.
- [4] **Gausz, T.:** Aerodynamical and Dynamical Investigation os Helicopter Rotors, ICAS Congress 2000, Harrogate, United Kingdom (ICA 0182).
- [5] **Gausz, T.:** Vortex-Wake Model for Helicopter Rotors. 8TH Mini Conference on Vehicle System Dynamics, Identification and Anomalies, Budapest 12–14. Nov. 2002.
- [6] **Leonard, A.:** Vortex Methods for Flow Simulation. *Journal of Computational Physics*, 37. 1980 (pp. 289-335).
- [7] **Rossow, V.J.:** On the Inviscid Rolled-Up Structure of Lift Generated Vortices, *Journal of Aircraft*, Vol. 10. No. 11, (pp. 647-650).
- [8] **Staufenbiel, R.:** Ein Model zur Analytischen Beschreibung von Randwirbeln, *Zeitschrift für Flugwissenschaft und Weltraumforschung*, Nr. 9, Heft 5. 1985.
- [9] **Westwater, F.L.:** The Rolling Up of the Surface of Discontinuity Behind an Aerofoil of Finite Span, *RAES Reports and Memoranda*, No. 1692, Aug. 1935 (pp. 116-131).