

Laczik Bálint

KARDÁNFELFÜGGESZTÉSŰ PÖRGETTYŰ VIZSGÁLATA MAPLE V. RENDSZERBEN

A modern számítástechnika nagy hatékonyságú, különleges eszközei az ún. szimbolikus matematikai programok. A *számítógépes algebrai rendszereknek* is nevezett interaktív software-k a matematika sajátos objektumaival, azaz:

- algebrai, differenciál, integrál stb. (pl. $y = x + 2 \sin x$; $y'' = y + 3x$) egyenletekkel;
- definiált (pl. halmaz, vektor, mátrixok, gráf, stb.) struktúrákkal;
- geometriai (pl. kör, egyenes, sík, gömb, stb.) objektumokkal;
- matematikai (pl. prím tulajdonság, geometriai illeszkedés, ortogonalitás stb.) attribútumokkal

konkrét és formális műveletek és műveletsorozatok végzésére, azok eredményeinek kiértékelésére és megjelenítésére, animálására képesek.

Az elmúlt években a hazai kutató és felsőoktatási gyakorlatban mind szélesebb körben ismert és alkalmazott Maple V. a számítógépes algebrai rendszerek egyik legkiválóbbja. A Maple V. rendszert a Budapesti Műszaki Egyetemen a szerző több éve oktatja illetve használja. A programmal kapcsolatban megjelent magyar nyelvű bevezető szakkönyveket, valamint a szerző hasonló tárgyú Internet-publikációit lásd az Irodalomjegyzékben.

A jelen összeállítás a Maple V. program egy, a polgári és katonai repülés navigációban nagy jelentőségű, bonyolult mechanikai objektuma, a kardán felfüggesztésű pörgettyű (egyszerűsített modelljét lásd 1. ábra) vizsgálatára kidolgozott példát ismerteti.

A program lehetőséget biztosít a működő .mws (maple worksheet) kiterjesztésű munkalap mellett, pl. a szokványos publicisztikai gyakorlatban általános használt .doc (Word dokumentum) formátumok előállítására. Ehelyütt a Maple V. munkalapok képernyő formátumát leghívebben idéző .html alakban mutatjuk be a rendszer jellegzetes működését. A munkalap részletes angol nyelvű kommentárokkal ellátott, működő változata az Internet [9] címén érhető el.



1. ábra. Kardánfelfüggesztésű pörgettyű

restart, with (*DEtools*); with (*plots*); with (*plottools*)

A pörgettyűmozgás differenciálegyenlet rendszerét Kurt Magnus: *Kreisel — Theorie und Anwendungen* (Springer—Verlag Berlin—Heidelberg—New York, 1971) című könyve alapján állítottuk fel. A hivatkozott mű 329—331 oldalain található részletes levezetések a három szabadságfokú, kardánikus felfüggesztésű pörgettyű mozgásegyenleteit ismertetik. A mozgásegyenletek általános alakja:

$$\begin{aligned}
 eq1 := & \left(\Theta_1 \cos(\beta(t))^2 + (\Theta_{x3} + \Theta_{z2}) \sin(\beta(t))^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \alpha(t) \right) - \\
 & - (\Theta_{x1} + \Theta_{x2} - \Theta_{z2}) \sin(2\beta(t)) \left(\frac{\partial}{\partial t} \alpha(t) \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} \beta(t) \right) + H \cos(\beta(t)) \left(\frac{\partial}{\partial t} \beta(t) \right) = M_1 \\
 eq2 := & \Theta_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \beta(t) \right) + (\Theta_{x1} + \Theta_{x2} - \Theta_{z2}) \sin(\beta(t)) \cos(\beta(t)) \left(\frac{\partial}{\partial t} \alpha(t) \right)^2 \\
 & - H \cos(\beta(t)) \left(\frac{\partial}{\partial t} \alpha(t) \right) = M_2
 \end{aligned}$$

A rendszer mechanikai jellemzői paraméterekkel adottak. Az x, y, z indexek a rögzített koordináta rendszer tengelyeit, a további 1, 2, 3 indexek rendre a pörgettyűt, a belső illetve a külső kardánkeretet, az a paraméter a belső, a b a külső keret vízszintes síkkal bezárt szögét jelölik. A hossz méreteket cm-ben, a tömegeket kg-ban vesszük.

A mechanikai rendszerben a következő idealizálásokat alkalmazzuk:

- az elemek homogén tömegeloszlású, geometriai alakhiba nélkül való objektumok: a pörgettyűtest d átmérőjű, l hosszúságú, a kardánkeretek $R1$, ill. $R2$ középkör sugarú, $r1$ ill. $r2$ meridiánkör sugarú acél testek;
- elhanyagoljuk a pörgettyű és a kardánkeretek tengelyeinek ill. csapágyainak tömegét;
- az alkatrészek súrlódási veszteség nélkül mozognak, figyelmen kívül hagyjuk a légellenállást.

A program alábbi része a geometriai és mechanikai adatok megadása mellett a klasszikus mechanika közismert összefüggéseivel definiálja és számítja a tömeg és tehetetlenségi jellemzőket.

$$d := 8; l := 1; \rho := \frac{7.8}{1000}; r2 := .5; r3 := .7; \omega := 10\pi; N := 20; \varepsilon := .12$$

$$W := N\varepsilon; R2 := \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} + r2; R3 := R2 + r2 + r3; R4 := R3 + r2 + r3$$

$$\Theta_{z1} := \text{evalf}\left(\frac{\rho d^4 \pi l}{32}\right); \Theta_{x1} := \text{evalf}\left(\frac{\rho d^2 \pi l \left(\frac{d^2}{4} + \frac{l^2}{3}\right)}{4}\right);$$

$$\Theta_{y1} := \text{evalf}\left(\frac{\rho d^2 \pi l \left(\frac{d^2}{4} + \frac{l^2}{3}\right)}{4}\right); \Theta_{x2} := \text{evalf}\left(m_2 \left(R2^2 + \frac{5r2^2}{4}\right)\right);$$

$$m_2 := \text{evalf}\left(2 \pi^2 \rho R2 r2^2\right)$$

$$\Theta_{y2} := m_2 \left(R2^2 + \frac{5r2^2}{4}\right); m_3 := 2 \pi^2 \rho R3 r3^2$$

$$\Theta_{z2} := m_2 \left(R2^2 + \frac{3r2^2}{4}\right); \Theta_{x3} := m_3 \left(R3^2 + \frac{5r3^2}{4}\right)$$

$$\Theta_{y3} := m_3 \left(R3^2 + \frac{5r3^2}{4} \right); \quad \Theta_{z3} := m_3 \left(R3^2 + \frac{3r3^2}{4} \right);$$

$$\Theta_1 := \Theta_{x1} + \Theta_{x2} + \Theta_{x3}; \quad \Theta_2 := \Theta_{y2} + \Theta_{x1}$$

$$H := \Theta_{z1} \omega$$

A külső illetve a belső kardánkeretekre ható zavaró nyomatékok függvényei legyenek pl:

$$M_1 := \text{piecewise}(t < .1, t < .2, 500, 0);$$

$$M_2 := \text{piecewise}(t < .3, t < .4, -800, 0);$$

plot({M₁, M₂}, t = 0 ... 1, title = Zavaró nyomatékok)

$$M_1 := \begin{cases} 0 & t < .1 \\ 500 & t < .2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$M_2 := \begin{cases} 0 & t < .3 \\ -800 & t < .4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



2. ábra. Zavaró nyomatékok

A pörgettyű mozgásának vizsgálatához az eq.1 — eq.2 formális differenciál-egyenleteket a "sys" jelű rendszerbe foglaljuk össze. A rendszer mozgásegyenleteinek megoldását az "ini" kezdeti feltételrendszer mellett a "var" változók a(t), b(t) időfüggvényei szolgáltatják. A differenciál egyenlet rendszer konkrét alakja:

$$\begin{aligned}
\text{sys} &:= \text{evalf}(\{eq1, eq2\}) \\
\text{var} &:= \{\alpha(t), \beta(t)\} \\
\text{ini} &:= \{\alpha(0)=0, \beta(0)=0, D(\alpha)(0)=0, D(\beta)(0)=0\} \\
\text{sys} &:= \left\{ \left(24.50570437 \cos(\beta(t))^2 + 18.08008069 \sin(\beta(t))^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \alpha(t) \right) - \right. \\
&- 6.425623685 \sin(2\beta(t)) \left(\frac{\partial}{\partial t} \alpha(t) \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} \beta(t) \right) + 98.53813037 \cos(\beta(t)) \left(\frac{\partial}{\partial t} \beta(t) \right) = \\
&= \begin{cases} 0. & t < .1 \\ 500. & t < .2 \\ 0. & \text{o t h e r w i s e} \end{cases}, 10.03915463 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \beta(t) \right) + \\
&+ 6.425623685 \sin(\beta(t)) \cos(\beta(t)) \left(\frac{\partial}{\partial t} \alpha(t) \right)^2 - 98.53813037 \cos(\beta(t)) \left(\frac{\partial}{\partial t} \alpha(t) \right) = \\
&= \begin{cases} 0. & t < .3 \\ -800. & t < .4 \\ 0. & \text{o t h e r w i s e} \end{cases}
\end{aligned}$$

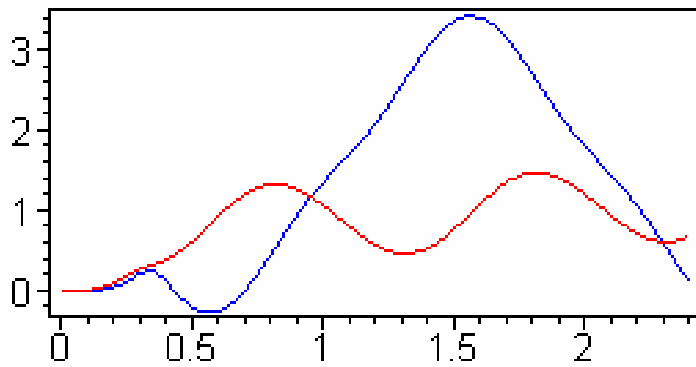
A differenciál egyenletrendszer megoldása zárt alakban nem állítható elő. A zavaró nyomatékok hatására fellépő, a pörgettyű külső kardánkeretének precessziós, valamint belső kardánkeretének nutációs szögváltozásait a Maple V. rendszer módosított 4-5 rendű Runge-Kutta-Fehlenberg féle numerikus differenciál-egyenlet megoldó eljárását alkalmazva keressük. A szögek időbeli változása grafikusán azonnal megjeleníthető, lásd 3. ábra.

```

px := dsolve(sys union ini, var, type = numeric, output = procedurelist)
val := array(1 .. N); for i to N do val[i] := i ε end do
S := dsolve(sys union ini, var, type = numeric, method = rkf45, value = val)
for i to N do Θi := S2,1i,2; Φi := S2,1i,4 end do
q1 := odeplot(px, [t, α(t)], 0 .. W, color = red);
q2 := odeplot(px, [t, β(t)], 0 .. W, color = blue);
display([q1, q2], title = Precessziós és nutációs szögek változása, axes = boxed)

```

Precessziós és nutációs szögek változása



3. ábra. Precessziós és nutációs szögek változása

A pörgettyű mozgás animációjához a szerkezet elemeit a beépített rajzi objektumokkal állíthatjuk elő:

```
c1 := tubeplot([0, R2 cos(φ), R2 sin(φ)], φ = 0 ... 2 π, radius = r2, style = pat ch,
color = blue, grid = [23, 6])
```

```
c2 := tubeplot([R3 cos(φ), R3 sin(φ), 0], φ = 0 ... 2 π, radius = r3, style = pat ch,
color = red, grid = [23, 6])
```

```
c3 := tubeplot([R4 cos(φ), 0, R4 sin(φ)], φ = -π - .1 ... .1, radius = r2,
style = pat ch, color = green, grid = [12, 6])
```

```
h := cylinder([0, 0, -l/2], d/2, l, style = pat ch, color = gold,
grid = [24, 3], linestyle = 1)
```

```
t := tubeplot([0, 0, x], x = -R2 + r2 ... R2 - r2, radius = r2, color = gray,
grid = [6, 6], style = pat ch nogrid)
```

```
K1 := display ([h, c1, t])
```

A grafikus animáció a rendszer valóságos működését illusztrálja, lásd 4. ábra
 $T := NULL$

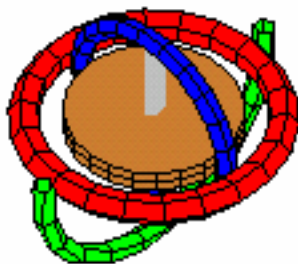
for s **to** N **do**

```
Q := display ([rotate (display ([rotate (K1, 0, Θs, 0), c2]), Φs, 0, 0), c3])
```

```
T := T, Q
```

end do

```
display ([T] insequence = true, scaling = constrained)
```



4. ábra. Grafikus animáció

FELHASZNÁLT IRODALOM

- [1] KLINCSIK M.—MARÓTI Gy.: Maple 8 tételben - a matematikai problémamegoldás művészetéről, NOVADAT Kiadó, 1995.
- [2] Molnárka et al.: A Maple V. és alkalmazásai, Springer Kiadó, 1995.
- [3] HECK, A.: Bevezetés a Maple használatába, JGYF Kiadó, Szeged, 1999.
- [4] www.adeptscience.co.uk/products/mathsim/maple5/apps/fourb.html
- [5] www.adeptscience.co.uk/products/mathsim/maple5/apps/gearh.html
- [6] www.maplesoft.com/apps/categories/mathematics/geometry/html/pascal1.html
- [7] www.maplesoft.com/apps/categories/engineering/manufacturing/html/mgear.html
- [8] www.maplesoft.com/apps/categories/engineering/mechanical/html/fourb.html
- [9] www.maplesoft.com/apps/categories/engineering/model_simulation/html/gyroscope1.html
- [10] www.maplesoft.com/apps/categories/maple_tools/games/html/cube1.html