

# AZ AERODINAMIKA NUMERIKUS MÓDSZEREI

**Dr. (PhD) Gausz Tamás**  
egyetemi docens  
**Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem**  
**Repülőgépek és Hajók Tanszék**

*A cikk az aerodinamika két, előzetes vizsgálatra alkalmas numerikus módszerét mutatja be: a lamináris áramlásokra vonatkozó Navier–Stokes egyenlet, másképpen az örvénytranszport egyenlet véges differenciákon alapuló megoldását és a potenciálmélet véges szárnyakra érvényes, alkalmazott örvény elméletét.*

## BEVEZETÉS

Az aerodinamika feladatainak zárt alakú megoldása igen kevés esetben létezik csak, ezért egyre nagyobb mértékben terjednek a numerikus módszerek. E módszerek sokfélesége a felhasználók sokféle igényét tükrözi. Jelen cikk, illetve munka célja egy átfogó kép felvázolása és utána két, konkrét, egyszerűnek tekinthető módszer bemutatása. E két módszer egyébként az oktatásban is jól alkalmazható — ezt a cikk mellett kifejlesztett bemutató szoftverek szépen illusztrálják.

Az aerodinamika legegyszerűbb feladatai az  $X$ ,  $Y$  Banach terek közötti leképezést jelentő  $L : X \rightarrow Y$  lineáris operátor korrekt kitűzésű feladataira vezethetők vissza.

E feladat-típus megoldására alapvetően két út kínálkozik. Az első lehetőség az, amikor az operátor átírásával az eredetileg végtelen dimenziós feladatot véges dimenziós feladattal közelítjük, azaz a problémát diszkrétizáljuk — ez vezet, pl. a véges differenciák módszeréhez:

$$L_n : X_n \rightarrow Y_n, \quad \text{másképpen: } L_n X_n = Y_n \quad .$$

A véges differenciák módszerében a közelítő megoldás ( $X_n$ ) explicit vagy implicit eljárással számítható ki — az általunk is alkalmazott implicit eljárás inhomogén, lineáris algebrai egyenletrendszer iterációs megoldásához vezet, az

így alakuló sorozat Cauchy konvergens — ez, a fenti feltételekkel együtt biztosítja azt, hogy a közelítő megoldás a tényleges megoldáshoz konvergál.

A másik lehetőség a megoldás approximációja. Ebbe az osztályba sorolható a perem-integrál egyenletek módszere, melyre az alkalmazott örvény-elmélet épül. Csak megjegyezzük, hogy ebbe az osztályba tartozik — több más módszerrel együtt — a véges elemek módszere is. A vizsgálatunk a Poisson egyenletre vonatkozik, ennek a repülőgépszárny körüli áramlást leíró megoldását közelíthetjük a Biot–Savart törvény alapján:

$$\mathbf{w} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_s \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (1)$$

E módszer rendkívüli előnye, hogy a számolást véges számú (ellenőrző) pontra alapozva a szárny körüli, teljes háromdimenziós térben érvényes megoldásra jutunk.

## AZ ÖRVÉNY-TRANSPORT EGYENLET

Az örvénytransport egyenletet a Navier–Stokes egyenlet összenyomhatatlan közeg lamináris áramlásra érvényes alakjából származtathatjuk, Az egyenletet „Helmholtz általánosított örvény tételé”-nek is nevezik. A továbbiakban síkáramlást vizsgálunk, az egyenletek a következők:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \frac{1}{\nu} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \quad (2)$$

és:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega \quad (3)$$

ahol:

$$\psi \text{ — az áramfüggvény, és: } \frac{\partial \psi}{\partial y} = c_x, \text{ illetve: } \frac{\partial \psi}{\partial x} = -c_y ;$$

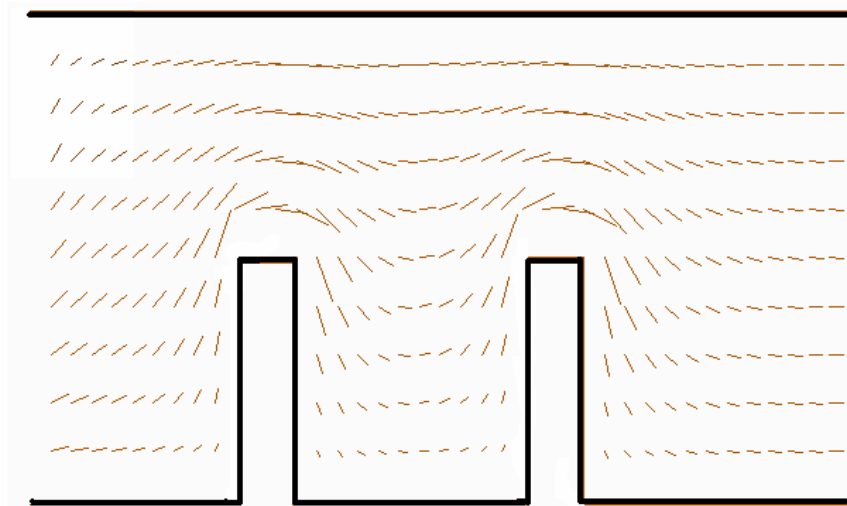
$$\omega \text{ — az örvényesség, és: } \omega = -\frac{\partial c_x}{\partial y} + \frac{\partial c_y}{\partial x} .$$

A fenti két egyenletből az áramfüggvény és az örvényesség általában numerikus úton határozható meg. A (3) egyenletben véges differencia módszerrel történő megoldást mutatunk be. Mindkét egyenletnél a másodrendű, elliptikus, parciális differenciálegyenleteknél általánosnak tekinthető relaxációs módszert használjuk.

A feladatokat célszerű dimenziótlanítani — ekkor a (2) egyenletben megjelenik a Reynolds szám. Megmutatható, hogy az alapeljárás 2-es cella Reynolds számig stabil, e felett a számoláskor keletkező numerikus hibák rohamos növekedése miatt nem működik.

Ezt a hátrányt kiküszöbölendő vezetjük be az egyszerű relaxáció helyett a Newton féle, általánosított iterációs eljárást. Az ilyen módon továbbfejlesztett eljárás 110-es globális Reynolds szám helyett kb. 3000 Re számig (numerikusan) stabil de csak kb. 2000-es Re számig ad fizikailag reális megoldást.

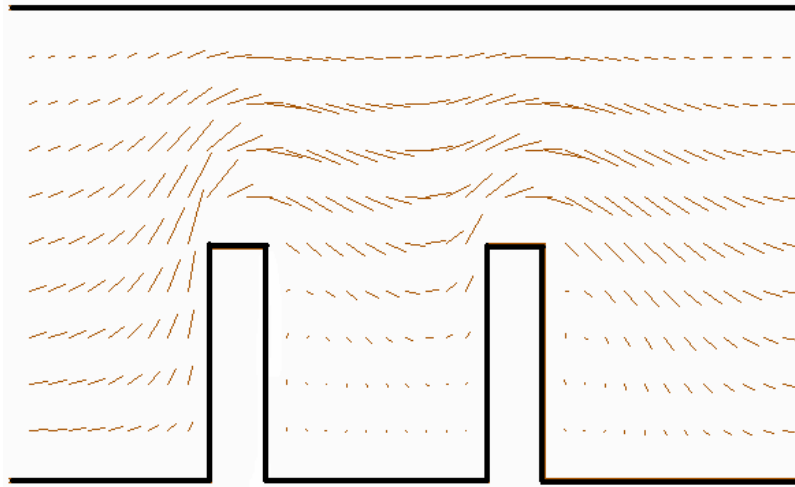
A következőkben néhány számítás eredményét mutatjuk be, az egymás után következő ábrák a Reynolds szám növekedésével a sűrlődés egyre jobban kidomborodó hatását reprezentálják.



1. ábra  
Áramlási kép ideális közeg esetén

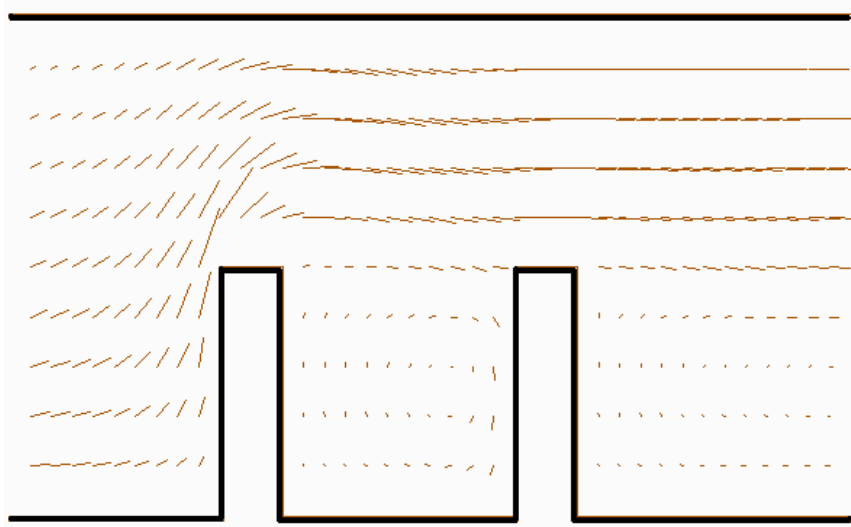
Az ideális közeg áramlása "tökéletesen" követi az akadályok kontúrját, ez a fajta áramkép általában — szemmel láthatóan — messze esik a valóságtól, csak rendkívül lassú, kúszó áramlások esetében van realitása. Más esetekben, amikor

pl. áramvonalas testek körüli áramlást vizsgálunk (általában, amikor a súrlódás hatása nem jelentős) ez a fajta közelítés is jó eredményekre vezet.



2. ábra  
Áramlási kép 100-as Reynolds számnál

Az ábrán látható, 100-as Reynolds számnál kialakuló áramlási képen az akadályok mögött két, kisebb örvény látható. Ez is igen lassú áramlást jelent még ugyan, de az 1-es ábrával összehasonlítva látszik a minőségi különbség: ideális közeg esetén az örvény-képződés teljesen elmarad.



3. ábra  
Áramlási kép 800-as Reynolds számnál

A 3. ábra már a valóságban várható áramlási képhez meglehetősen hasonló helyzetet mutat — a két akadály az áramlási teret mintegy lezárja, mindkettő mögött erős örvény alakul ki és a fő áramlás a fennmaradó térben megy végbe.

Az örvény–transzport egyenlet érvényességi köre csak a lamináris áramlásokra terjed ki, így a kapott eredmények is csak meglehetősen lassú áramlásokra igazak, de néhány technikai alkalmazás (pl. labirint tömítés) azért itt is lehetséges. Főként azonban az áramlások kifejlődésének dinamikája mutatható be e program segítségével, ami a numerikus áramlás-modellzés oktatásának egy kiváló lehetősége.

A program egyébként több irányban is tovább fejleszthető, a sebesség-mező alapján nyomás-eloszlási számítások végezhetők, de a számolás turbulens áramlás esetére is kiterjeszhető.

## AZ ALKALMAZOTT ÖRVÉNY ELMÉLET

Az alkalmazott örvény elmélet alapja Prandtl, Munk és Weissinger munkája. A Weissinger-féle elmélet alkalmas kis karcúságú, nyilazott szárnyak vizsgálatára. Igen jelentős korlátja az, hogy a szárnynak egy síkban kell feküdnie — tehát pl. a „V” állás hatása nem vizsgálható vele.

Az alkalmazott örvény elmélet [4] ideális folyadékban (levegőben) működő, tetszőleges alakú illetve elhelyezésű szárny vizsgálatára alkalmas — de a feladatnak lineárisnak kell lennie.

A számításban felvesszünk egy hordozó vonalat, amelyre a hordozó örvényt helyezük el és felvesszünk egy ellenőrző vonalat, amely mentén az áramlás a szárnyhoz „simul”, azaz az indukált sebesség e vonal minden pontjában olyan, hogy:

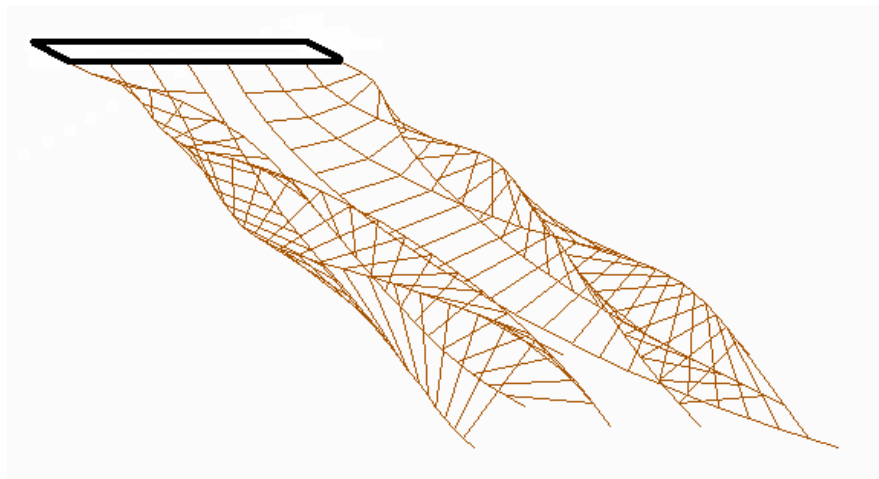
$$\alpha_g = A \operatorname{tg} \left( \frac{w}{V} \right); \quad \text{illetve: } w = V \operatorname{tg}(\alpha_g).$$

Az indukált sebességet a Biot-Savart törvény (2) alapján számíthatjuk. Az indukált sebesség számítása a tényleges szárny adatainak ismeretében egy inhomogén, lineáris algebrai egyenletre vezet, amelyet az alábbi formában írhatunk fel:

$$w_i = \sum_{j=1}^N (a_{ij}\Gamma_{j-1} + b_{ij}\Gamma_j + c_{ij}\Gamma_j) m_j;$$

Ezen egyenletből a szárny feletti és a hozzá kapcsolt leúszó cirkuláció kiszámítható, a cirkuláció ismeretében pedig meghatározhatók az elsőfajú (a hordozó örvény keltette) és a másodfajú (a leúszó örvény keltette) indukált sebességek — ez utóbbiak alapján pedig az indukált ellenállás is számítható.

E munkában — tekintettel az oktatási célkitűzésekre — a szárny mögött kialakuló, leúszó örvényt mutatjuk be.



4. ábra

Szárny mögött kialakuló, felcsavarodó örvény

Jelen számítás elve egyszerű: először a kiszámítjuk a szárnyon repülés közben kialakuló hordozó és leúszó cirkulációk rendszerét — egyenes leúszó örvényeket feltételezve. Ezt követi a leúszó örvények felcsavarodásának számítása, a Biot-Savart törvény felhasználásával számítható indukált sebességek alapján. Ez az eljárás így leginkább oktatási célra alkalmas: a „nagy” programok iterációs eljárást használnak, mellyel fokozatosan közelítik a tényleges működési állapotot.

Az ábrán látható kép önmagáért beszél, érdemes azonban egy dologra külön is felhívni a figyelmet. A szárnyvégről induló örvény-szál a leúszó örvény legtávolabbi részén már igen érdekes pozíciót foglal el: a három további örvény-szál között, nagyjából középre kerül. A számítást tovább folytatva (ezt itt nem tüntettük fel) az örvények kaotikus mozgásba kezdenek. Ennek kezelése pedig már csak fejlettebb örvény illetve örvény-mag modellek bevezetésével lehetséges.

## TOVÁBBI LEHETŐSÉGEK

A bemutatott módszerek a numerikus aerodinamika legegyszerűbb, legszebb eredményekre vezető eljárásai közül valók. Ilyen, oktatási célra kifejlesztett programot a világ számos intézményében találhatunk. Ezek a programok az aerodinamika alapvető törvényeinek a szemléletes bemutatására valók, lényegi számítást ezekkel csak a vonatkozó korlátok pontos ismeretében, a megfelelő érvényességi tartományban szabad végezni.

A számítógépek teljesítőképessége rohamosan fejlődik, ennek eredményeképpen várható, hogy a „bemutató” programok is egyre jobbak lesznek, eredményeik egyre közelebb kerülnek a valóságos eredményekhez. Várható, hogy egy-egy numerikus szélcsatorna kísérlet eredményei a nagyon szép szemléltetésen túl a gyakorlat számára is hasznos eredményeket szolgáltatnak — pl. egy-egy konkrét repülési helyzet elemzésében, az ott kialakuló áramlási jelenségek, légerők vizsgálatát is lehetővé teszik.

## FELHASZNÁLT IRODALOM

- [1] CONNOR, J.J. – BREBBIA, C. A.: Finite Element Techniques for Fluid Flow Newnes-Butterworths, London, 1976
- [2] FARAGÓ, I. – GÁSPÁR, Cs.: Parciális differenciálegyenletek megoldásának numerikus módszerei, hidrodinamikai alkalmazásokkal, BME Mérnöki Továbbképző Intézet, Budapest, 1983.
- [3] GAUSZ, T.: Alkalmazott örvényelméletek a repülőgép aerodinamikában 12. Magyar Repüléstudományi Napok, Bp-Nyíregyháza, 1999. jún. 2-4 270-279. old.
- [4] GAUSZ, T.: Szárnyprofil, szárny és légszárny vizsgálata BME Repülőgépek és Hajók Tanszék, Budapest, 1995
- [5] HOFFMANN, A.: Numerikus módszerek az áramlástan és a hőtan parciális differenciálegyenleteinek megoldására, Tankönyvkiadó, Budapest, 1978

*The article deals with two methods of preliminary numerical aerodynamical calculations: the first method is numerical solution of 2D Navier-Stokes equation for incompressible and laminar flow, or by the other words the solution of the vortex-transport and the continuity equations using finite difference method. The second method is the advanced vortex calculation applied to finite wings.*