

# ÉRTÉKTARTÓ SZABÁLYOZÁSI RENDSZEREK SZÁMÍTÓGÉPES TERVEZÉSE

**Dr. Szabolcsi Róbert<sup>\*</sup>, Dr. Ludányi Lajos<sup>\*\*</sup>, Eszes János<sup>\*\*</sup>**

**Tóth Tivadar<sup>\*\*</sup>, Kovács József<sup>\*\*</sup>**

**<sup>\*</sup> egyetemi docens, <sup>\*\*</sup> egyetemi adjunktus**

**ZMNE Vezetés- és Szervezéstudományi Kar, Fedélzeti Rendszerek Tanszék**

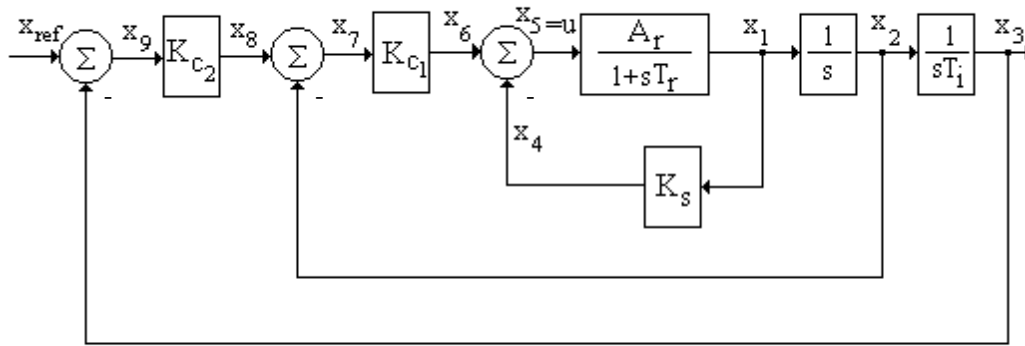
*A szerzők célja bemutatni a négyzetes integrálkritériumon alapuló optimális szabályozó tervezési eljárás gyakorlati alkalmazását. A tervezés során az irányszög automatikus stabilizálását biztosító rendszert vesznek alapul. Végrehajtják az áttérést az állapot térre, majd a teljes állapotvisszacsatolású rendszer számára szabályozót terveznek az LQR (Linear Quadratic Regulator) módszer felhasználásával. Bemutadják az optimális szabályozóval rendelkező rendszer viselkedését időtartományban. A tervezést és az analízist a MATLAB<sup>®</sup> programcsomag, valamint a Control System Toolbox segítségével hajtják végre.*

## 1. BEVEZETÉS

Az első repülésszabályozó rendszerek alapvető feladata az egyes repülési jellemzők (pl. repülési irányszög, bedöntési szög, repülési magasság stb.) stabilizálása volt. A rendszer bekapcsolásakor elkezdődött annak a térbeli pozíciónak a tartása, amelyet a repülőgép a bekapcsolás pillanatában foglalt el. Az első robotpilóták mindössze egy-két repülési jellemzőt voltak képesek stabilizálni. A mai modern repülőgépek esetében ez a szám jóval nagyobb és géptípusonként változik. A robotpilótával felszerelt repülőgépek közül szinte mindegyik képes az Euler szögeket (irányszög, bedöntési szög, irányszög) stabilizálni. Ezeket a funkciókat sokszor kiegészíti a repülési magasság-, repülési sebesség-, oldalkoordináta stabilizáló, valamint leszálláskor irány- és sikló pályán tartó funkció is.

## 2. TELJES ÁLLAPOT-VISSZACSATOLÁSÚ ÉRTÉKTARTÓ SZABÁLYOZÁSI RENDSZEREK SZÁMÍTÓGÉPES TERVEZÉSE

Tervezzünk szabályozót az irányszög stabilizáló rendszer számára, melynek hatásvázlata az 1. ábrán látható [1,2,7].



1. ábra Az irányszög stabilizáló rendszer hatásvázlata

A szabályozási rendszer rendezői legyenek a következők:

$$x_1 = \omega_x ; x_2 = \gamma ; x_3 = \psi, \quad (2.1)$$

ahol  $\omega_x$  orsózó szögsebesség,  $\gamma$  bedőlési szög,  $\psi$  irányszög.

A tervezést a négyzetes integráلكritérium minimálásával hajtjuk végre. A optimális szabályozó tervezéshez az alábbi integrál funkcionált J minimáljuk [2,5,6]:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \rightarrow \text{Min} \quad (2.2)$$

A tervezéshez térjünk át az állapottérre. Az 1. ábra alapján igazak az alábbi egyenletek :

$$x_1 = u \frac{A_r}{1+sT_r} \rightarrow u = x_1 \frac{1+sT_r}{A_r} = \frac{x_1}{A_r} + s x_1 \frac{T_r}{A_r} \quad (2.3)$$

$$\text{vagy } \dot{x}_1 = -\frac{x_1}{T_r} + u \frac{A_r}{T_r} \quad \text{és} \quad x_4 = K_S x_1 ; \quad u = x_6 - x_4 = x_6 - K_S x_1$$

Másrészt

$$\begin{aligned}
 x_2 = \frac{x_1}{s} &\rightarrow \dot{x}_2 = x_1 ; \quad x_6 = \mathbf{K}_{C_1} x_7 ; \quad x_7 = x_8 - x_2 ; \quad x_8 = \mathbf{K}_{C_2} x_9 \\
 \mathbf{u} = -\mathbf{K}_S x_1 + \mathbf{K}_{C_1} x_7 &= -\mathbf{K}_S x_1 + \mathbf{K}_{C_1} (x_8 - x_2) = -\mathbf{K}_S x_1 - \mathbf{K}_{C_1} x_2 + \mathbf{K}_{C_1} x_8 = \\
 &= -\mathbf{K}_S x_1 - \mathbf{K}_{C_1} x_2 + \mathbf{K}_{C_1} \mathbf{K}_{C_2} x_9 ,
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

valamint

$$x_3 = \frac{x_2}{sT_i} \rightarrow \dot{x}_3 = \frac{x_2}{T_i} ; \quad x_9 = x_{\text{ref}} - x_3 \tag{2.5}$$

Legyen a referencia jel zérus  $x_{\text{ref}} = 0$ , ezért  $x_9 = -x_3$ . A bemeneti vektor az alábbi módon határozható meg :

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_S x_1 - \mathbf{K}_{C_1} x_2 - \mathbf{K}_{C_1} \mathbf{K}_{C_2} x_3 = - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & \mathbf{K}_{C_1} & \mathbf{K}_{C_1} \mathbf{K}_{C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = - \mathbf{K} \mathbf{x} \tag{2.6}$$

ahol:  $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & \mathbf{K}_{C_1} & \mathbf{K}_{C_1} \mathbf{K}_{C_2} \end{bmatrix}$  - állapot-visszacatolási mátrix;

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$  - állapotvektor.

Az irányszög szabályozó rendszer állapotegyenletei tehát a következők :

$$\dot{x}_1 = - \frac{x_1}{T_r} + \mathbf{u} \frac{\mathbf{A}_r}{T_r} ; \quad \dot{x}_2 = x_1 ; \quad \dot{x}_3 = \frac{x_2}{T_i}, \tag{2.7}$$

vagy a szokásos mátrixszos jelölést alkalmazva :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Az állapot- és a segédegyenlet vektorai és mátrixai az alábbiak lesznek :

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T ; \mathbf{u} = u ; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{A_r}{T_r} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T ; \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_r} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_i} & 0 \end{bmatrix} ; \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

A repülőgép dinamikája és kinematikája legyen a következő [7]:

$$A_r = 2,86 \text{ s}^{-1} ; T_r = 0,568 \text{ s} ; T_i = 17 \text{ s} \quad (2.10)$$

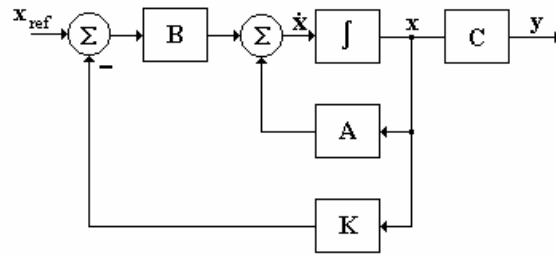
A (2.9) egyenlet mátrixai a következő módon írhatók fel [7]:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1,7605 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0588 & 0 \end{bmatrix} ; \mathbf{B} = [5,0352 \quad 0 \quad 0]^T \quad (2.11)$$

A teljes állapot-visszacsatolású rendszer bemeneti vektorát az alábbi módon határozhatjuk meg :

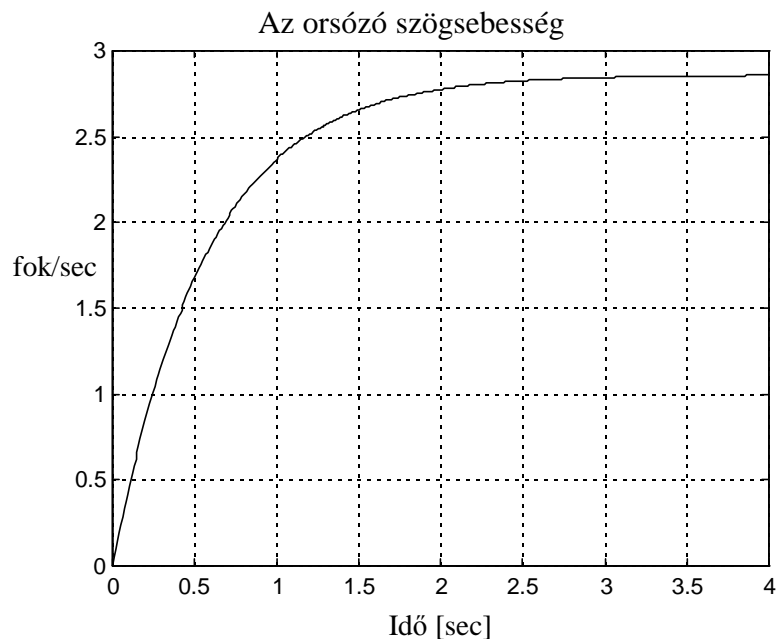
$$\mathbf{u} = -\mathbf{K} \mathbf{x} \quad (2.12)$$

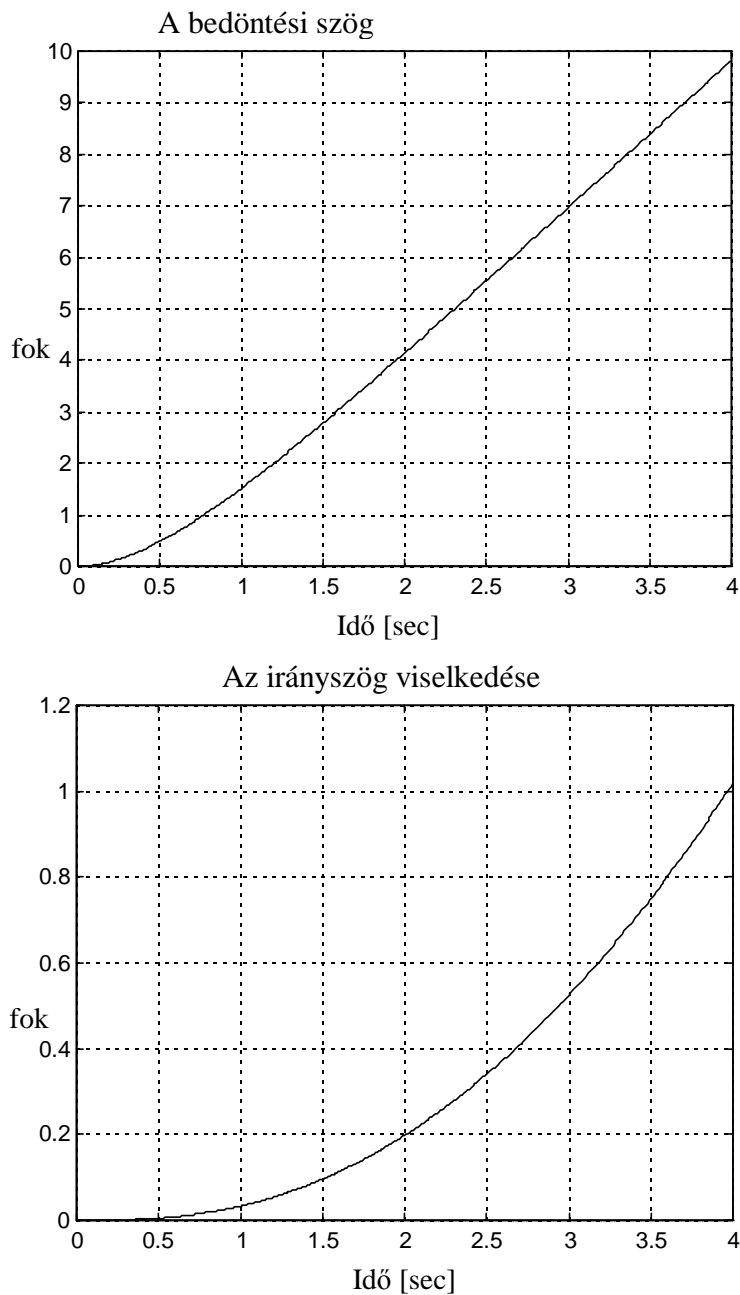
A szabályozási rendszer hatásvázlata a (2.8) és (2.12) egyenletek alapján a következő lesz :



2. ábra Az irányszög stabilizáló rendszer hatásvázlata

Vizsgáljuk meg a nemirányított repülőgép viselkedését az időtartományban. Legyen a nemirányított repülőgép bemeneti jele a csűrőlapok egységnyi, ugrásfüggvény jellegű kitérése. A repülőgép átmeneti függvénye a 3. ábrán látható. Figyeljük itt meg, hogy a bedöntési szögsebesség egytárolós jelleggel áll be az új értékére és a repülőgép ezzel a szögsebességgel orsózni kezd. Látható, hogy a bedőlési szög és az orsózó szögsebesség, valamint az irányszög és a bedőlési szög között is integráló kapcsolat határozható meg, amint azt az 1. ábrán feltételeztük.





3. ábra A nemirányított repülőgép analízise időtartományban

Tervezzünk a repülőgép számára olyan szabályozót, amely biztosítja, hogy az irányított repülőgép sajátértékei a [2] számú irodalom alapján az alábbiak legyenek:

$$\lambda_{1,2} = -0,7 \pm 0,8i ; \lambda_3 = -2,8 \quad (2.13)$$

A (2.2) integrál kritérium súlyozó mátrixainak elemeit az un. reciprok négyzetes szabály (inverse square rule) segítségével határozzuk meg. Mivel a repülésszabályozó rendszerek alapvető sajátossága az, hogy repülésbiztonsági, kényelmi, vagy egyéb szempontok miatt korlátozásokat alkalmaznak, ezért kiindulási alapnak tekintjük ezeket a paramétereket. A módszer alkalmazása során alaphelyzetben az egyes állapotváltozókat azonos súlyozással vesszük figyelembe. Az általunk vizsgált rendszerben a korlátozások legyenek a 75A repülőgép műszaki leírása alapján a következők:

$$|\omega_{x \max}| = 18^0 / \text{sec}, |\gamma_{\max}| = 90^0, |\psi_{\max}| = 20^0, |\delta_{cs \max}| = 3^0 \quad (2.14)$$

A tervezés során első közelítésben azonos súlyozással vegyük figyelembe az egyes állapotváltozókat. Alkalmazzuk a reciprok négyzetes szabályt, így az alábbi súlyozó mátrixokat kapjuk :

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 3,0864e-3 & 0 & 0 \\ 0 & 1,2345e-4 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0025 \end{bmatrix}; \mathbf{R}_1 = [0,1111] \quad (2.15)$$

Az LQR feladat megoldásához a Control System Toolbox lqr2.m programját alkalmazzuk [3,4]. Az optimális állapot-visszacsatolási mátrix, amely esetén a (2.2) integrál funkcionál minimális értéket vesz fel, a következő lesz :

$$\mathbf{K}_1 = [0,0808 \quad 0,0887 \quad 0,15], \quad (2.16)$$

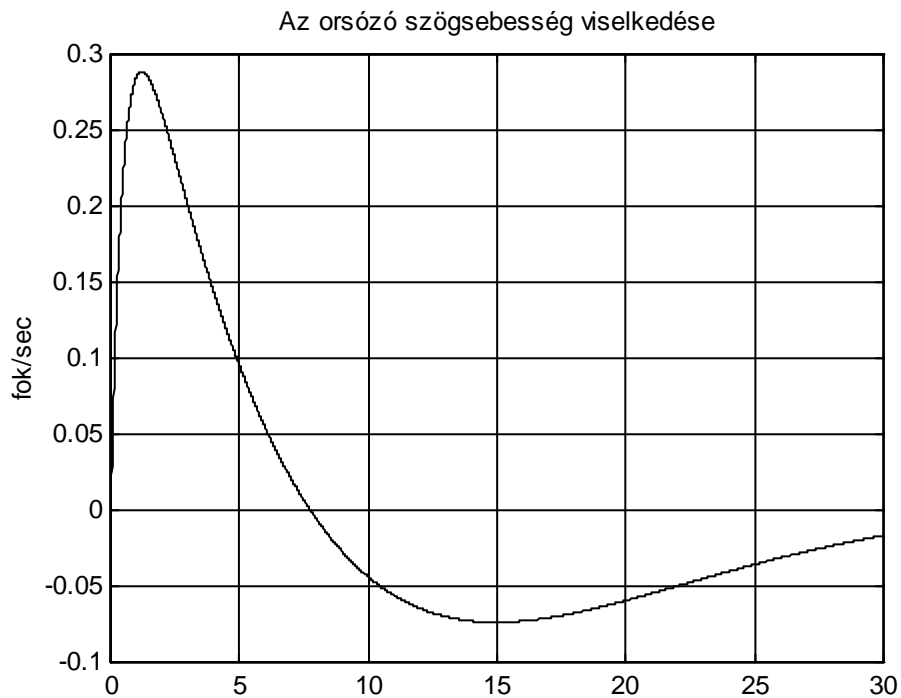
vagy másképpen

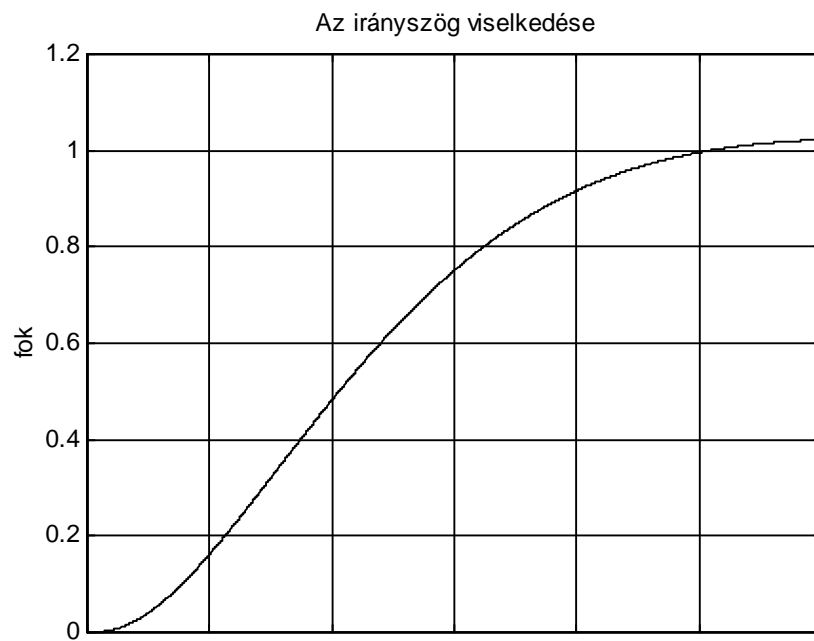
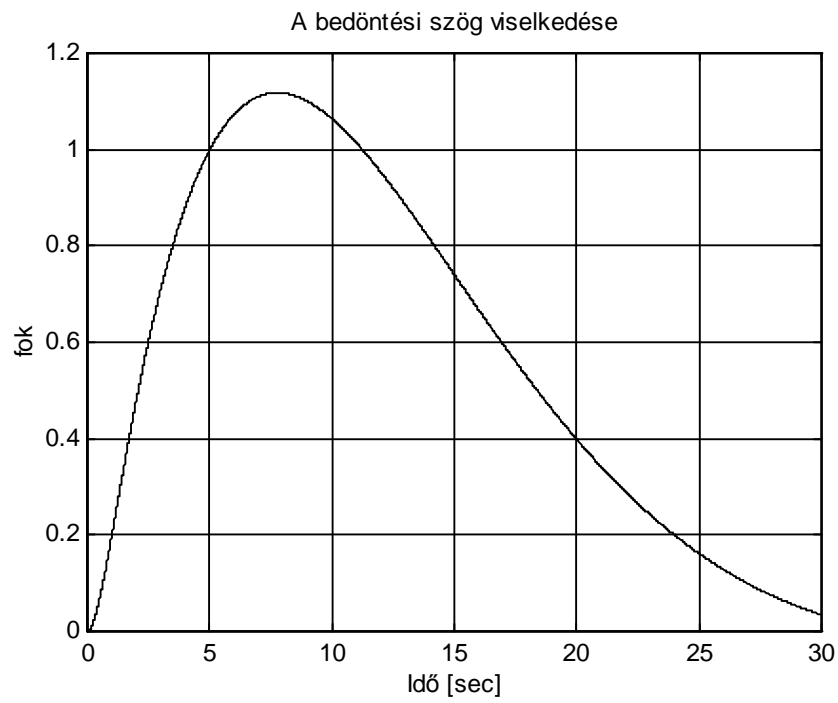
$$K_s = 0,0808, K_{c_1} = 0,0887, K_{c_2} = 1,6910 \quad (2.17)$$

Határozzuk meg a zárt szabályozási rendszer sajátértékeit. A pólusok az alábbiak lesznek :

$$\lambda_{1,2} = -0,1087 \pm 0,1047i, \lambda_3 = -1,9499 \quad (2.18)$$

Összehasonlítva a (2.13) és a (2.18) egyenleteket azt mondhatjuk, hogy a reciproknégyzetes szabály közvetlen alkalmazása nem vezetett eredményre, az eltérés ugyanis lényeges a tervezési kritérium és a valós zárt szabályozási rendszer között. Vizsgáljuk meg most a rendszer viselkedését az irányszög ugrásszerű, egységnyi változására. A zárt rendszer átmeneti függvénye a 4. ábrán látható.





4. ábra A zárt rendszer viselkedése

Mint az a 4. ábrán jól látható, az irányyszög új értékének beállításához mintegy 22 másodperc szükséges, ami főleg nagy manőverező képességű repülőgépek esetében megengedhetetlen. Ezért módosítsuk az integrál funkcionál (költség függvény) súlyozó mátrixait az alábbiak szerint:

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3,0864e-2 & 0 \\ 0 & 0 & 2000 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_2 = [20] \quad (2.19)$$

Ebben az esetben az optimális állapot-visszacsatolási mátrix a következő lesz :

$$\mathbf{K}_2 = [0,4633 \quad 0,9786 \quad 10,00], \quad (2.20)$$

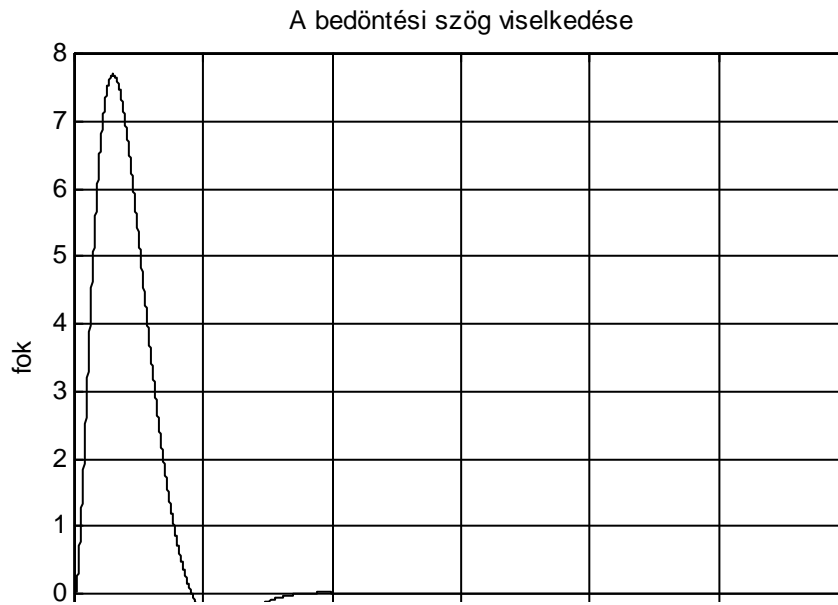
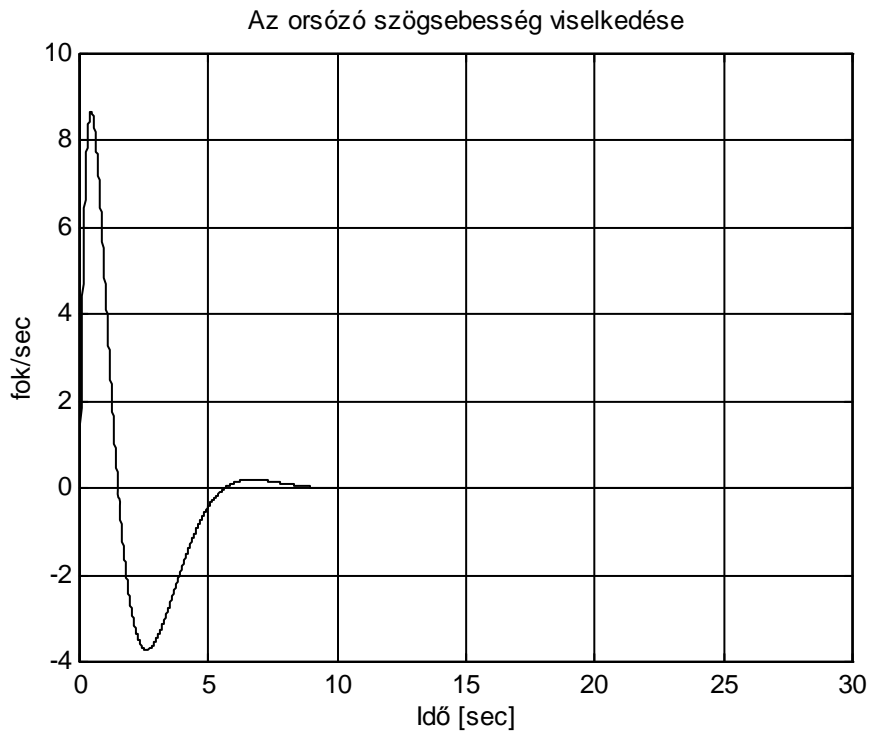
vagy másképpen

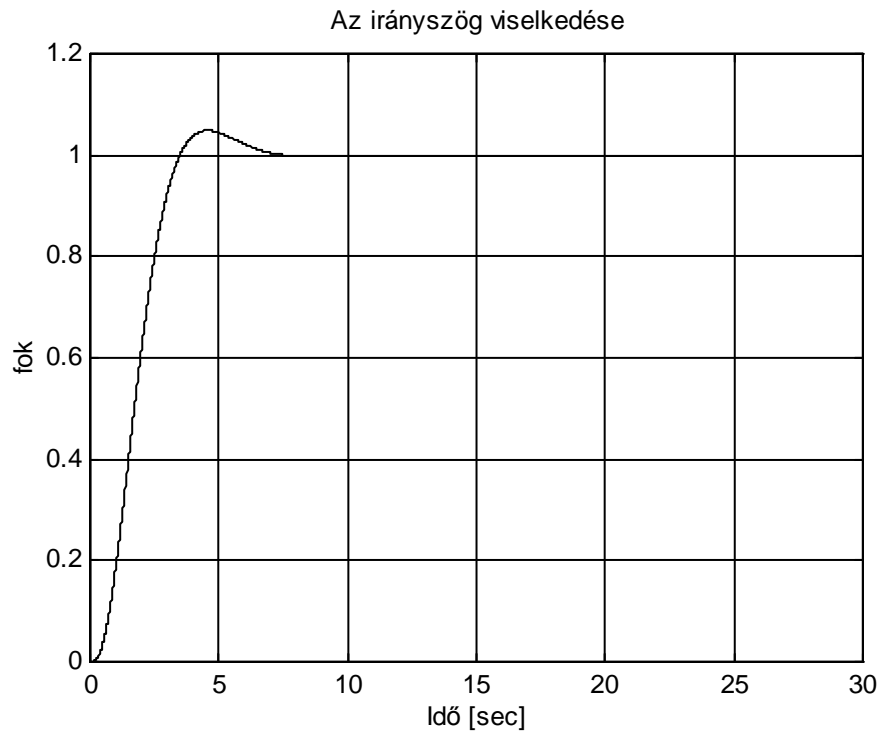
$$K_s = 0,4633, K_{c_1} = 0,9786, K_{c_2} = 10,2186 \quad (2.21)$$

Határozzuk meg most is a zárt szabályozási rendszer sajátértékeit. A pólusok az alábbiak lesznek :

$$\lambda_{1,2} = -0,7171 \pm 0,7740i, \lambda_3 = -2,6593 \quad (2.22)$$

Összehasonlítva a (2.13) és a (2.22) egyenleteket azt mondhatjuk, hogy a zárt rendszer pólusai jó közelítéssel megegyeznek azok kívánt értékeivel. Vizsgáljuk meg ezután a rendszer viselkedését az irányyszög ugrásszerű, egységnyi változása esetén. A zárt rendszer átmeneti függvénye a 5. ábrán látható.





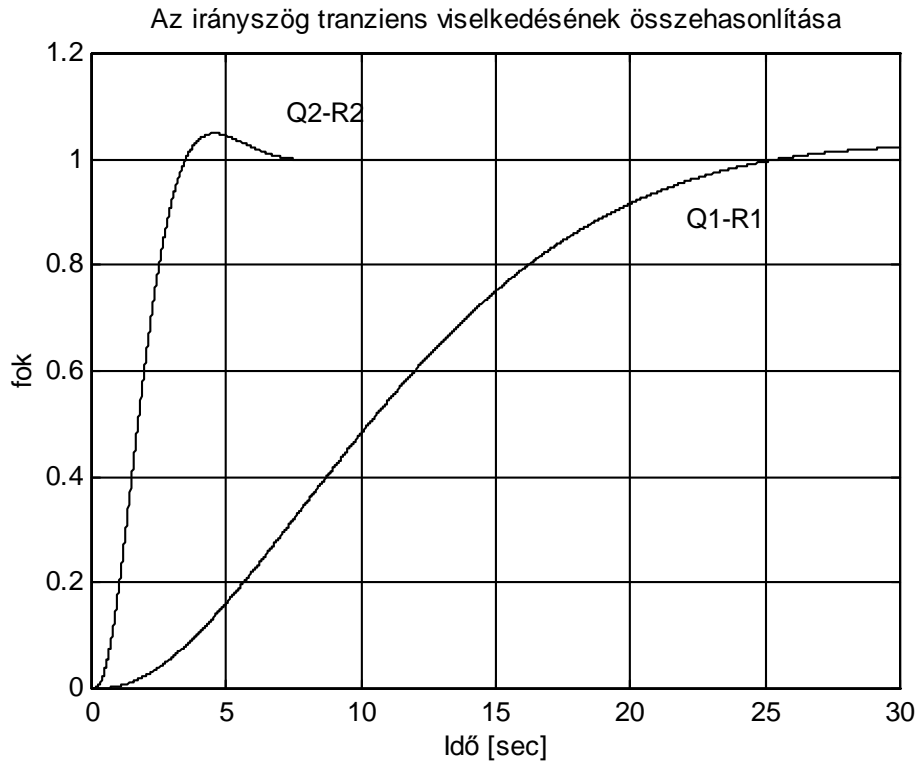
5. ábra A zárt rendszer átmeneti függvényei

Az 5. ábra alapján azt mondhatjuk, hogy a (2.19) súlyozó mátrixok biztosítják a zárt rendszer megfelelő minőségi jellemzőit. A (2.22) pólusokhoz tartozó csillapítási tényezők az alábbiak lesznek :

$$\xi_1 = 0,6796, \xi_2 = 0,6796, \xi_3 = 1 \quad (2.23)$$

A tranziens idő mintegy 7 másodperc, ami megfelel az irányszög stabilizáló rendszerrel szemben támasztott követelményeknek [2].

Vizsgáljuk meg az optimális szabályozókkal rendelkező irányszög stabilizáló rendszer viselkedését az időtartományban. A (2.16) és a (2.20) állapot-visszacsatolási mátrixokkal rendelkező szabályozási rendszerek összehasonlítását a 6. ábrán végezhetjük el.



6. ábra Az irányszög stabilizáló rendszer tranziens analízise - az irányszög viselkedése

Mint az a 6. ábrán jól látható, a (2.19) súlyozó mátrixok együttesen biztosítják a kívánt minőségi jellemzőket. Egyrészt számottevően csökken a tranziens ideje és a zárt rendszer túlszabályozása, csillapítási tényezője is megfelel az előírt minőségi követelményeknek.

## ÖSSZEFOGLALÁS

A szerzők egy példán keresztül bemutatták az LQ alapú tervezés gyakorlati alkalmazását. A szabályozó tervezése során először végrehajtották az áttérést az állapottérre. Az áttérés után a reciprok négyzetes szabály segítségével megállapították a négyzetes integrálkritérium súlyozó mátrixait. A kapott súlyozással megvizsgálták a zárt rendszer viselkedését, majd a tervezési kritériumnak megfelelően hangolták a súlyozó mátrixokat. A hangolás után ismét

megvizsgálták a zárt rendszer viselkedését. Megállapították, hogy a hangolás után a zárt rendszer dinamikai jellemzői jó közelítéssel megegyeznek a tervezési kritériummal.

## **FELHASZNÁLT IRODALOM**

- [1] Blakelock, J.H. *Automatic Control of Aircraft and Missiles*, John Wiley and Sons, 1965.
- [2] McLean, D. *Automatic Flight Control Systems*, Prentice-Hall. Inc., 1990.
- [3] MATLAB<sup>®</sup> *The Language of Technical Computing*, The MathWorks Inc., 1997.
- [4] MATLAB<sup>®</sup> *Control System Toolbox*, User's Guide, The MathWorks Inc., 1997.
- [5] Shahian, B.-Hassul, M. *Control System Design Using MATLAB<sup>®</sup>*, Prentice-Hall, 1993.
- [6] Ogata, K. *Designing Linear Control Systems with MATLAB<sup>®</sup>*, Prentice-Hall, 1994.
- [7] Szabolcsi, R. *Repülőgép oldalstabilitásának vizsgálata analóg és digitális számítógépen*, Egyetemi doktori értekezés, Budapesti Műszaki Egyetem, Közlekedésmérnöki Kar, 1994.

## **ABSTRACT**

*The goal of the authors is to show an LQ based new design example. During controller synthesis the directional control system has been considered. After transferring the block diagram into the state space model the LQR design method will be applied for the design of the compensator. The time domain behaviour of the closed loop system will be analyzed. The MATLAB<sup>®</sup> 5.2 computer package supplemented with Control System Toolbox has been used for solving of the controller synthesis problem and the designed system analysis.*

## **KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS**

A cikk megjelenését a Magyar Tudományos Akadémia Bolyai János Kutatási Ösztöndíj Kuratóriuma támogatta, melyet a szerzők ezúton köszönnek meg.