

A repülőgép átesés utáni sztochasztikus mozgásának vertikális valószínűségi leírása

Báthory Zsigmond

Ph.D. hallgató

B.M.E. repülőgépek és hajók tanszék

A repülőgép átesés utáni sztochasztikus mozgásának vizsgálata a közelmúltban a modern repülésmechanikai kutatások előterébe került. Ezen vizsgálatok célja, a repülésbiztonság magasabb szintre történő emelése, amely a repülőgépgyártók és üzemeltetők alapvető üzleti érdeke. A következő cikk a fent említett folyamat egyik lehetséges valószínűségi leírását mutatja be.

A probléma

A repülőgép átesés utáni sztochasztikus mozgásának vizsgálatára egy 3D-beli fotogrammetriai mozgásvizsgálati hálózatot állítunk fel. A mozgásvizsgálati hálózat a vizsgálat tárgyát képező repülőgép-modellből és sztochasztikus mozgásának vizsgálatát lehetővé tevő digitalizált, real-time-os kamerákból áll. Végezzünk $J=1,2, \dots, M$ számú kísérletet a fenti mozgás vizsgálatára, a vizsgálat tárgyát a következő vektor változó képviselje:

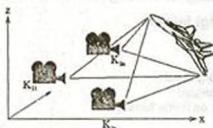
$$\tilde{Y}_J(t) = [x_{J1}(t), x_{J2}(t), x_{J3}(t), \varphi_{J1}(t), \varphi_{J2}(t), \varphi_{J3}(t)] \quad (1)$$

$$t \in [t_0; T], \quad J = 1, 2, \dots, M$$

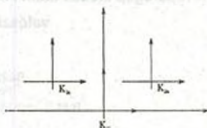
ahol: $x_i(t)$ $i=1,2,3$ a repülőgép súlyponti koordinátájának időbeni leírása.

$\varphi_i(t)$ $i=1,2,3$ a repülőgép tehetetlenségi főirányai körül történő szögelfordulások időbeni leírása.

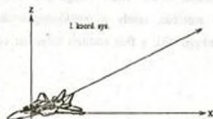
A fotogrammetriai mozgásvizsgálati hálózat, a sztochasztikus mozgás diszkrét mintavételezését jelenti az előre meghatározott $t_\lambda \in [t_0; T]$ időintervallumon (λ : indexhalmaz).



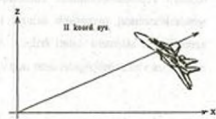
1/a ábra



1/b ábra



2/a ábra



2/b ábra

Az 1. és 2. ábrákon látható mozgásvizsgálati hálózat minden $J=1, 2, \dots, M$ $t_{j1} \in [t_0, T]$ vizsgálati időponthoz egy feltételes - szélsőértékprobléma, iteratív szám után történő megoldásával lehetővé teszi a repülőgép bármely identifikált pontjának 3D-beli közelítő meghatározását.

A 2. ábrán látható koordinátarendszerek ismerete, a fentiekhez hasonló matematikai modell segítségével származtathatóvá teszi az (1)-ben szereplő $\vec{Y}_J(t_k)$ vektort, minden t_{j1} vizsgálati időponthoz. Ezen kísérleti eredmények alapján állítsuk elő (1) valós - valószínűségi - vektorváltozó vertikális valószínűségi leírását, a következő módon.

A szűrés

Az (1)-re igazak a következők:

1. Az $\vec{Y}_J(t_k)$ vektor diszkrét időpillanatokban ismert.

2. Az $\tilde{y}_i(t_i)$ vektor mérési hibával terhelt.

Az 1.-2. miatt célszerű $\tilde{y}_i(t_i)$ szűrése. Alkalmazzunk felüláteresztő szűrőt, hiszen az adott mechanikai rendszerre igaz az, hogy: a mozgás bármely időpillanatában létezik olyan:

$$\epsilon \left(\dot{\tilde{y}} \right) = \left[\epsilon \tilde{y}_i \left(\tilde{y}_{i, \dots, i} \mid s \neq i \right) \mid i = 1, 2, \dots, 6 \right] \in R \quad (2)$$

Küszöbértékvektor, melyet a rendszer mechanikai tulajdonságaiból következőleg át nem léphet.

Következménye: Nem létezhetnek valamely $\epsilon \left(\dot{\tilde{y}} \right) \Rightarrow \omega \left(\dot{\tilde{y}} \right)$ (2/b) határfrekvencia

vektor normájánál nagyobb normájú frekvencia - vektorok a realizációk között.

Végezzük el gondolatban a következő kiterjesztést:

$$\tilde{y}_i(t_i) \Rightarrow \tilde{y}_{i, \infty}(t_i) \in \mathcal{C}^d[-\infty; +\infty] \quad \forall J \quad (3/a)$$

$$\tilde{y}_i(t_i) = \begin{cases} \tilde{y}_i(t_i) & \text{ha } t_i \in [t_0; T] \\ 0 & \text{ha } t_i \in (-\infty; \infty) \setminus [t_0; T] \end{cases} \quad \forall J \quad (3/b)$$

A mechanikai rendszer tulajdonságából adódik, hogy:

$$d_{\min} = 3 \quad (4)$$

Mivel a $[t_0; T]$ kompakt halmaz és $\tilde{y}_i(t_i) \in \mathcal{C}^d[-\infty; +\infty]$ *μ.m.m.* $\forall J$

ha: $g \in L^1[t_0; T]$

$$\text{akkor: } \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{y}_{i, \infty}(t_i) g(r-t) dt = \int_0^T \tilde{y}_{i, \infty}(t_i) g(r-t) dt \text{ létezik } \forall J; \quad i=1, 2, \dots, 6 \quad (5)$$

továbbá: (5) következményeként a $[t_0; T]$ időintervallum bármely diszkrét felosztásához

létezik a következő diszkrét konvolúció.

$$\sum_i \tilde{y}_{i, \infty}(t_i) g(r-t) = \sum_{s=1}^k c_s \tilde{y}_{i, \infty}(t_{i, s}) \mid \sum_{s=1}^k t_{i, s} = (r-t_0) \quad (6)$$

Alkalmazzuk a binomiális simitást a (6) következményeként a t_k felosztás mellett az

$\tilde{y}_i(t_i) \forall J$ vektorokon.

A binomiális szűrés c_i diszkrét generátora.

$$\varepsilon_i = c_i = \frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m-|i|} \quad (7)$$

Az (1) $\forall J$ -re való (6); (7) alkalmazása által olyan

$$\tilde{Y}_J(t_\lambda) \Rightarrow \text{konvolúciós szűrés} \Rightarrow Y_J(t_\lambda) \quad \forall J; t_\lambda \in [t_0; T] \quad (8)$$

vektorsereget kapunk, amely által reprezentált folytonos $Y_J(t_\lambda)$ $t \in [t_0; T]$ realizációkban nem léteznek a (2/b) által meghatározott (a mérési hibák által létrehozott) határfrekvenciánál magasabb frekvenciák.

Interpoláció

A következő feladatot a (8)-as által meghatározott D6-beli ponthalmaz megfelelő minőségű interpolációja, amit koordinátáinként végezzünk.

Az interpoláció minőségét a (3/a); (4) tulajdonságok határozzák meg, azaz:

$$Y_J(t_\lambda) \Rightarrow \text{interpoláció} \Rightarrow Y_{J,\lambda}(t) \in C^d[t; T]; \quad \forall J; i = 1, 2, \dots, 6; d_{\min} = 3 \quad (9)$$

A feladata megoldható $p \geq 4$ -ed fokú spline-k alkalmazásával a koordinátafüggvényeken. A fenti szűrést és interpolációt alkalmazva: minden kísérlet diszkrét (mérési hibával terhelt) mérési eredményeit $C^1[t_0; T]$ függvényosztálybeli, szűrt, folytonos realizációkkal reprezentált.

A folyamat vertikális – valószínűségi leírása a $[t_0; T]$ időintervallumon.

Végezzük el a (9) alapján a keresett eloszlásfüggvény approximációját a $[t_0; T]$ időintervallumon. Ezen összetett feladat két mellékfeladatra bontható szét:

1.a, A folytonos $Y_J(t)$ (9) $\forall J$ alapján vegyük fel valamilyen rácsot a

$$[t_0; T] \rightarrow t_\lambda \quad \lambda \text{ indexhalmaz felhasználásával.}$$

b, t_λ rácson végezzük el a sűrűségfüggvények approximációját.

$$f(\underline{x}, t_2) \forall J\text{-re} \mid f: \underline{x} \in R^n, t_1; \lambda \rightarrow R \quad (10)$$

2. Végezzük el az (1/a), (1/b) feladatban meghatározott $f(\underline{x}, t_1)$ folytonos kiterjesztését a $[t_0; T]$ időintervallum tartományon.

A feladat megoldásához fontoljuk meg a következőket.

Igaz a következő:

1. - A $c_0^m(\Omega)$ mindenütt sűrű az $\Omega \in R^n$ nyílt halmazon. (11)

- $\forall f \in c_0^m(\Omega)$ és $g \in L^p(\Omega)$ függvényekhez J olyan $\{\tilde{f}_n(\Omega)\}, \{\tilde{g}_n(\Omega)\} \subset c_0^m(\Omega)$ függvénsorozat, mely $\sup \|\cdot\|$ és $\|\cdot\|_{L^p}$ normában egyenletesen konvergál f-hez és g-hez.

Ahol:

$c_0^m(\Omega)$: az akárhányszor differenciálható kompakt – tartóú függvények tere.

Ω : nyílt, korlátos halmaz $\Omega \subset R^n$

2. $\underline{Y}_J(t) \in H \subset R^n \forall t \in [t_0; T]$ és $\forall J$ azaz. (12)

A (9) realizációk korlátosak és így befolyásolhatóak egy $H \in R^n$ -beli kompakt halmazba.

Definiáljuk a következő függvényosztályt:

$$G = \{g \mid \text{független Gauss – vektor – sűrűségfüggvények osztálya}\} \quad (14)$$

Végezzük el a következő leszorítást:

$$\tilde{g}(\underline{m}, \underline{\delta}^2; \underline{x}) = \begin{cases} g(\underline{m}, \underline{\delta}^2; \underline{x}) & \text{ha } x \in H \\ 0 & \text{ha } x \in R^n \setminus H \end{cases} = \tilde{G} \quad (15)$$

ahol: $\underline{m} \in R^n$ várhatóérték

$$\underline{\delta}^2: \underline{E} \underline{\delta}^2 \Rightarrow \text{diag } A; A \geq 0$$

Vegyük észre (14), (15)-ből, hogy:

$$\tilde{g}(\underline{m}, \underline{\delta}^2; \underline{x}) \in c_0^m(H) \mid \forall \tilde{g} \in \tilde{G}\text{-re}$$

Igy a következő kérdést kell feltennünk.

A \tilde{G} függvényosztály mindenütt sűrű a (15)-ben szereplő leszorított sűrűségfüggvények osztályán? \Rightarrow Ha mindenütt sűrű, akkor az analitikus közelítésben (11)-beli konvergencia minőség elérhető, illetve:

Mivel az $\underline{Y}(t) \forall J$ valószínűségi – vektorváltozó eloszlásbeli tulajdonságaitól a $H \in R^k$ halmazon kívül a kísérleti eredményeink alapján nincs információ az approximált $f(\underline{x}, t)_{|H}$ (10) sűrűségfüggvény H-n kívüli viselkedését, mint hipotézist fogadjuk el, azon megkötéssel, hogy:

A pontos $f^*(\underline{x}, t)$ sűrűségfüggvénye a vizsgált mechanikai rendszer tulajdonságai alapján igaz az, hogy:

J olyan $H^* \in R^k$ halmaz, hogy $f^*(\underline{x}, t)_{|H^*} = 0$ mindenütt.

Igazak a következők:

1. $\forall p_1, p_2 \in H \wedge p_1 \neq p_2 \Rightarrow J \tilde{g} \in \tilde{G}$ hogy $\tilde{g}(p_1) \neq \tilde{g}(p_2)$ (16)
2. $\forall p_1, p_2 \in H \Rightarrow J \tilde{g} \in \tilde{G}$ hogy $\tilde{g}(p) \neq 0$
3. $\forall \tilde{g}_1, \tilde{g}_2 \in \tilde{G} \Rightarrow c_i \tilde{g}_i \cdot c_j \tilde{g}_j \in \tilde{G}$
4. $c_i \tilde{g}_i + c_j \tilde{g}_j \in \tilde{G}$

Így a feltett kérdésre a Stone – Weirstrasse approximációs tétel alapján a következőket mondhatjuk. (Stone – Weirstrasse tétel elégséges feltétel.)

J-het olyan $f(R^*)_{|H}$ sűrűségfüggvény, melyre nem teljesül az $\forall \varepsilon \in R^+$ számhoz J

olyan $\tilde{g} \in \tilde{G}$ függvény, melyre igaz:

$$\sup \left| f(R^*)_{|H} - \tilde{g} f(R^*)_{|H} \right| < \varepsilon \quad \forall x \in H \quad (17)$$

A (14), (15) alapján a (18) figyelembevételével végezzük el a felvetett approximációs feladatot a következő módon.

Alkalmazzuk a következőket:

1. A próbafüggvény

$$\tilde{f}(\underline{c}; \underline{m}; \underline{\varepsilon}^2; \underline{x}) = \sum_{i=1}^n c_i^2 g_i(\underline{m}; \underline{\varepsilon}^2; \underline{x}) \quad (18/a)$$

2. Maximum – Likelihood (paraméter becslés) járást. (18/b)

A (18/a) és (18/b) együttes alkalmazása egy feltételes – szélsőérték problémát definiál, azaz keressük:

$$\Phi = \Phi_x + \lambda \Phi_f \Rightarrow \text{változók:} \quad (19/a)$$

$$\Phi_x = \prod_{j=1}^M \left(\sum_{i=1}^m c_i^2 g_i(\underline{m}_i; \underline{\delta}_i^2; \underline{y}_j(t_x)) \right) \quad \begin{matrix} \underline{m}_i; \underline{\delta}_i^2; \underline{c} \\ i = 1, 2, \dots, m \end{matrix} \quad (19/b)$$

$$\Phi_f = 1 - \sum_{i=1}^m c_i^2 \quad (19/c)$$

ahol: $t_x \in [t_0; T]$ rögzített pont.

Felmerül az a kérdés, hogy (19) megoldásaként adódó függvény teljesíti-e a sűrűségfüggvényekkel szemben támasztott követelményeket.

Igazolás:

1. Mivel $g_i \in G$ integrálható $\Rightarrow \sum_{i=1}^m c_i^2 g_i$ is integrálható $m \in N^+$.
2. Vizsgáljuk a következőt: $\int_{R^n} \sum_{i=1}^m c_i^2 g_i dx = \sum_{i=1}^m c_i^2 \int g_i dx = \sum_{i=1}^m c_i^2 = 1$ a (19/c) miatt.
3. Az $\int_{\underline{x}}^{\bar{x}} g_i dx$ szigorúan monoton függvény $\Rightarrow \sum_{i=1}^m c_i^2 g_i$ is szigorúan monoton függvényosztálybeli.
4. $\sum_{i=1}^m c_i^2 g_i \geq 0 \quad \forall x \in R^n$, hiszen $g_i \geq 0 \quad \forall x \in R^n$

A (19/a), (19/b), (19/c) feladatok megoldását jellemezze a következő:

$$\underline{\tilde{x}}(t_x) = \left\{ \left(\overset{\infty}{X} \underline{m}_i(t_x) \right) \times \left(\overset{\infty}{X} \underline{\delta}_i^2(t_x) \right) \times \left(\overset{\infty}{X} c_i^2(t_x) \right) \right\} \in R^{m \cdot m} \quad (20)$$

Mivel a (18/a)-ban definiált próbafüggvény a (19/c) feltétellel a paraméteres megoldások családjába tartozik, így a (20) megoldásvektor minden $\underline{y}_j(t) \in R^d$ állapotterbeni ponthoz egyértelműen hozzárendeli a folyamatot közelítő sűrűségfüggvényt.

Végezzük el a $f(\underline{x}, t_x) | \underline{\tilde{x}}(t_x)$ folytonos kiterjesztését a $[t_0; T]$ időintervallumban.

$\tilde{x}(t_s)$ által kifeszített $R^{n \times n}$ tér két különböző alterén eltérő tulajdonságú interpolációt kell végeznünk ahhoz, hogy a diszkrét időpontok belsejében lévő időpontokban is megtartsa az $f(x, t_s)$ sűrűségfüggvény tulajdonságát.

$$\alpha, \tilde{X} c^2 \text{ alterében} \quad (21)$$

t_s időpontok által definiált $\underline{e}^2(t_s)$ vektorok az R^m egységgömbön foglalnak helyet. Ahhoz, hogy az optimalizált (18/a) próbafüggvény (19/c) tulajdonságát megtartsa, a t_s időpontokhoz tartozó $\underline{e}^2(t_s)$ vektorokat az egységgömb felületén, megfelelő simasággal kell interpolálni.

A feladat megoldható, a megoldással itt nem kívánunk foglalkozni.

$$\beta, \left(\tilde{X} \underline{m} \right) \times \left(\tilde{X} \underline{\delta}^2 \right) \text{ alterében} \quad (22)$$

Minden, megfelelő simaságú hagyományos interpolációs eljárás alkalmazható.

Alkalmazás:

A (21) és a (22) által definiált folytonos paraméterek segítségével bármely $t \in [t_0; T]$ időpontokhoz, és bármely $B \subset R^d$ korlátos halmazhoz hozzárendelhető a folyamat közelítő valószínűsége:

$$P\{Y(t) \in B \mid t = t_s\} \cong \int_{\beta} \sum_{r=1}^m c_r(t_s) g_r \left[\underline{m}_r(t_s), \underline{\delta}_r^2(t_s), x \right] dx \quad (23)$$

Ha B valamilyen gömb az R^d -ban, akkor ez így is felírható:

$$x_1 = r \cos \varphi_1, \quad \varphi_1 \in [0, 2\pi] \quad (24)$$

$$x_2 = r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \quad \varphi_2 \in [0, \pi] \quad J = 2, 3, 4$$

⋮

$$x_5 = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 \sin \varphi_4 \cos \varphi,$$

$$x_6 = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 \sin \varphi_4 \sin \varphi,$$

$$P\{Y(t) \in B \mid t = t_s\} \cong$$

$$\cong \int_{\beta} \sum_{r=1}^m c_r(t_s) g_r \left\{ \underline{m}_r(r, \varphi_1, \dots), \underline{\delta}_r^2(r, \varphi_1, \dots) x, (r, \varphi_1, \dots) \right\} \left| \frac{\sigma(x_1, x_2, \dots, x_6)}{\sigma(r, \varphi_1, \dots, \varphi_6)} \right| dr d\varphi_1 \dots d\varphi_6, \quad (25)$$

$$J = 1, 2, \dots, 6$$

Összefoglalás:

A fenti probléma klasszikus megoldása a $t \in [t_0; T]$ -ben az empirikus eloszlásfüggvény felállítását követeli meg az R^6 állapotterében. A lehetséges kevés kísérleti szám miatt, ezek igen gyenge becslését mutatják a valódi eloszlásfüggvénynek, továbbá nincs mód az eloszlásfüggvény folytonos kiterjesztésére a vizsgálati időintervallumon.

Az én általam kidolgozott eljárás a vizsgált folyamat eloszlásfüggvényének minőségi tulajdonságaitól függően, kevés ismert kísérleti eredmény alkalmazása esetén is képes a keresett valószínűségek feltérképezésére.

Irodalom:

- Detrekői Ákos: Kiegyenlítő számítások, Tankönyv Kiadó, Budapest, 1973
Moffitt – Mikhail: Photogrammetry, Harper and Rowson Publisher, New York, 1980
Schwidersky – Ackermann: Photogrammetrie B.G.Teubner, Stuttgart, 1976
Kolmogorov – Fomin: A függvényelmélet és a funkcionálanalízis elemei, Műszaki Tk. 1984
S. Karlin – M. Taylor: Sztochasztikus folyamatok, 1975
Malinwaud: Az ökonometria statisztikai módszerei, Jogi és Közg. Kiadó, 1984
Simon – Baderko: Másodrendű parciális differenciálegyenletek, Tk. Bp. 1983
Kirillov – Gvisiani: Feladatok a funkcionálanalízis köréből, Tk. Bp. 1985