

Horváth Dezső

mk. főhadnagy, repülést gyakorló állomásparancsnok
Kecskemét, 59. Szentgyörgyi Dezső Harcászati Repülőezred

**A REPÜLŐGÉP TÉRBELI PÁLYÁJÁNAK SZÁMÍTÁSA A
FEDÉLZETI ADATRÖGZÍTŐK ADATAI ALAPJÁN:
A VETCSINKIN-FÉLE GRAFIKUS MÓDSZER**

A cikk a repülőgép térbeli pálya számításának különféle módszereit ismerteti. Részletesen foglalkozik a Vetcsinkin-féle grafikus módszerrel. Tárgyalja a pálya hajlásszög és bedöntési szög közvetett úton történő meghatározását.

Bevezetés

A légi járműveken széles körben alkalmaznak olyan fedélzeti berendezéseket, amelyek rögzítik a repülési paramétereket. A fedélzeti adatrögzítők alkalmazásával lehetőség nyílt a mozgás térbeli pályájának rekonstruálására.

**1. A térbeli pálya felépítése. A Vetcsinkin-féle
grafikus módszer.**

A térbeli pálya felépítését több módszer szerint lehet elvégezni. A most ismertetésre kerülő módszer az egyik ajánlott grafikus integrálás, amely szerint az integrál nem más mint az integrálandó függvény alatti terület.

A módszer lényege: először meg kell rajzolni a pálya vízszintes vetületét az időjelekkel, azután a megfelelő pontokra rá kell mérni a repülési magasságot.

¹V. P. Vetcsinkin (1888-1950). A repülés dinamikájának fejlődésében nagy érdemeket szerzett. N. E. Zsukovszkijjal közösen lefektették a repülőgépek repülésének alapkérdéseit.

H. E. Жуковский: Динамика полетов (1927).

В. П. Ветчинкин: Динамика самолёта (1933).

A $H = H(t)$ függvényt a fedélzeti adatrögzítő berendezések közvetlenül regisztrálják. Ebből kifolyólag fő feladat a pálya vízszintes vetületének felépítése. A pálya vízszintes vetületét célszerű grafikus módszerrel felépíteni.

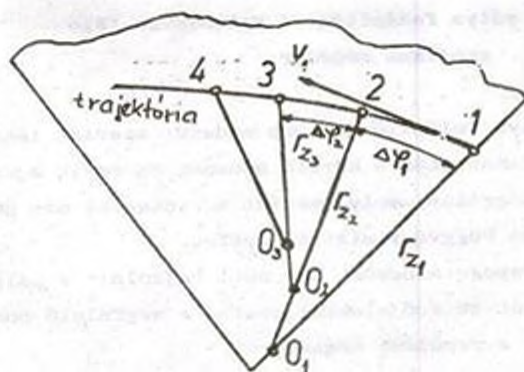
A Vetcsinkin-féle grafikus módszer. [1, 5]

A síkbeli görbevonaltú pályák függőleges kitérítési síkban vagy a változó görbületesi sugarú vízszintes vetületben történő felépítése céljából alkalmazható.

A módszer lényege az, hogy a pálya állandó sugarú körív szakaszokból tevődik össze a következő kapcsolódó szögekkel:

$$\delta\varphi = - \frac{c}{v \cos\theta} n_y \sin\gamma \delta t \quad (1)$$

Az 1.sz. ábrából látható, hogy a pálya kezdeti szakasza



O_1 szakasza r_{x_1}

sugárral épül az O_1 középpontból.

A pálya következő 12, 23, stb.

szakaszai r_{x_2} , r_{x_3} , sugarak-

kal épül az O_2 , $O_3 \dots$ középpontokból.

1. sz. ábra

A pálya görbületesének sugarait a következő képletek alapján kell meghatározni.

a./ A gyorsulás vetületei a koordináta tengelyekre:

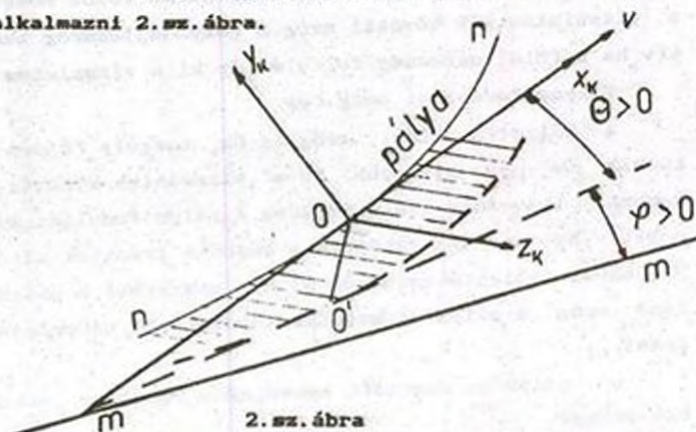
$$j_y = v \frac{d\theta}{dt} \quad (2)$$

$$J_y = \frac{v^2}{r_y} \quad (3)$$

a (2) és (3) képletből kapjuk, hogy

$$r_y = \frac{v}{\frac{d\theta}{dt}} \quad (4)$$

A légi jármű harci manőverezése során magába foglalja a síkbeli és a térbeli pályákon történő mozgást. A feladat megoldásához a pályához kapcsolt koordináta rendszert célszerű alkalmazni 2.sz. ábra.



2.sz. ábra

A pályához kapcsolt koordináta rendszer mozgó, 0 kezdőpontja a légi járművön helyezkedik el (általában a tömegközéppontban). A pályához kapcsolt koordináta rendszer Ox_k tengelye a légi jármű földi sebességének (a Földhöz viszonyított sebességének) irányába mutat. Ez szélcsendben megegyezik a légi sebességgel (a légi jármű levegőhöz viszonyított sebességével). Az Oy_k tengely az Ox_k tengelyen (a

sebességen) áthaladó függőleges síkban fekszik és általában felfelé irányul a Földhöz viszonyítva. Ebből következik, hogy az Ox_k tengely mindig vízszintes lesz. A pályához kapcsolt rendszer tengelyeinek iránya nincs kapcsolatban a repülőgép helyzetével. Ezek a tengelyek mintegy stabilizálva vannak a térben: az Oy_k tengely pedig a vízszintes síkban.

A földi sebesség irányát, és így a rendszer pályához kapcsolt Ox_k tengelyének irányát két szög jellemzi: a pályahajlásszög (θ) és a pályaeelfordulási szög (φ).

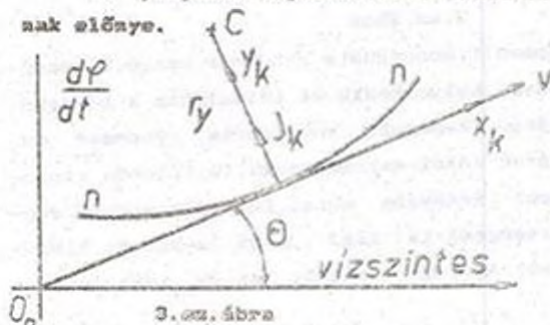
Pályahajlásszög (θ).

A pályahajlásszög [2.3] a légi jármű földi sebessége és a vízszintes sík közötti szög. A pályahajlásszög akkor pozitív, ha a földi sebesség felfelé tér ki a vízszintes síktól.

Pályaeelfordulási szög (φ).

A pályaeelfordulási szög az Ox_k tengely Földre vett vetülete és egy bizonyos "n-m" vízszintes közötti szög, ami kezdeti irányának van elfogadva. A pályaeelfordulási szög akkor pozitív, ha az Ox_k vetülete a kezdeti iránytól az óramutató járásával ellentétesen tér el. Más szavakkal, a pályaeelfordulási szög a pálya vízszintes vetületének elfordulását jellegzi.

A pályához kapcsolt koordináta rendszer alkalmazásának előnye.

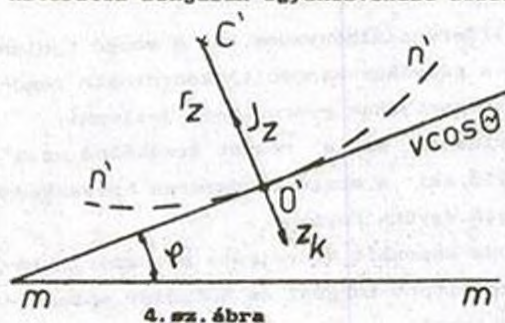


A 3. sz. ábrán a pálya képe a kitérítés síkjában látható.

A földet elvágású nézőpontunk a pályán keresztüli egy függőleges

hengeres felületet. Ezután a hengeres felülettel együtt a benne lévő "n-n" pályával egyenesítsük ki a síkban. A pályához kapcsolt rendszer Oy_x tengelye a pálya normálisában helyezkedik el és irányába mutat a pálya görbületének (kitérítés síkjában mért) r_y sugara is.

Könnnyen belátható, hogy a mozgás gyorsulásának Oy_x tengely szerinti összetevője (J_y) jellemezni fogja a pálya görbületét a függőleges síkban (pl. ha $J_y=0$, akkor a pálya a kitérítés síkjában egyenesvonalú lesz).



4. sz. ábra

A 4. sz. ábrán a pálya vízszintes vetületének képe látható. A pálya vízszintes vetülete görbületének r_x sugara az Ox_k tengely meghosszabításában fekszik.

Így a J_z normális gyorsulás jellemzi a pálya vízszintes vetületének görbületét (pl. ha $J_z=0$, akkor a pálya vízszintes vetülete egyenesvonalú lesz. Ha a normális gyorsulás mindkét összetevője nulla $J_y=0$ és $J_z=0$, akkor a pálya egyenesvonalú a térben).

Következtetés.

A pályához kapcsolt koordináta rendszer tengelyei szerinti gyorsulások meghatározott mozgástulajdonságokat jellemeznek:

- J_x gyorsulás jellemzi a sebesség abszolút értékének változását;
- J_y gyorsulás jellemzi a pálya görbületét a függőleges kitérítési síkban;

- J_z gyorsulás jellemzi a pálya vízszintes vetületének görbületét.

A gyorsulás, pályához kapcsolt koordináta rendszer tengelyeire vett, vetületeinek matematikai kifejezései.

A mozgás gyorsulására vonatkozó vektoros kifejezés:

$$\vec{J} = \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{\omega}_k \times \vec{v} \quad (5)$$

ahol: $\frac{d\vec{v}}{dt}$ - helyi differenciálhányados, ami a mozgó (jelen esetben a pályához kapcsolt), koordináta rendszer kezdőpontjának gyorsulását jellemzi;

A gyorsulásnak ezt a részét érzékelné az a megfigyelő, aki a mozgó rendszeren helyezkedne el, és vele együtt forogna.

$\vec{\omega}_k, \vec{v}_k$ - a pályához kapcsolt koordináta rendszer Földhöz viszonyított forgási és haladási sebességének vektorai.

A gyorsulás, bármely mozgó koordináta rendszer tengelyeire vett vetületeinek általános felírási formája:

$$J_z = \frac{dv_x}{dt} + \omega_{k_y} v_z - \omega_{k_z} v_y \quad (6)$$

$$J_y = \frac{dv_y}{dt} + \omega_{k_x} v_x - \omega_{k_x} v_z \quad (7)$$

$$J_x = \frac{dv_x}{dt} + \omega_{k_z} v_y - \omega_{k_y} v_z \quad (8)$$

Mivel a pályához kapcsolt koordináta rendszer egy sebességi

koordináta rendszer ezért:

$$v_x = 0; \quad v_y = 0; \quad v_z = 0; \quad \frac{dv_y}{dt} = 0; \quad \frac{dv_x}{dt} = 0;$$

$$a_{kz} = \frac{d\theta}{dt} \quad - \text{mivel a } \frac{d\theta}{dt} \text{ szögsebesség vektora egybe-}$$

esik az Oz tengely irányával;

$$a_{ky} = \frac{d\phi}{dt} \cos \theta \quad - \text{a } \frac{d\phi}{dt} \text{ szögsebesség vektora függőle-}$$

ges irányú, vagyis eltér az Oy_k tengelytől θ szögre (3.sz. ábra).

Tengelyek szerinti gyorsulások:

$$J_x = \frac{dv}{dt} \quad (9)$$

$$J_y = v \frac{d\theta}{dt} \quad (10)$$

$$J_z = -v \cos \theta \frac{d\phi}{dt} \quad (11)$$

A normális gyorsulás a v sebességen és ζ pályagörcbületi sugaron keresztül kifejezve:

$$J_n = \frac{v^2}{r_y} \quad (12)$$

Végezetül a gyorsulás matematikai vetületének kifejezései:

$$J_y = \frac{v^2}{r_y} \quad (13)$$

$$J_z = \frac{v^2 \cos^2 \theta}{r_z} \quad (14)$$

b./ A (11) és (14) kifejezésekből kapjuk, hogy

$$r_z = - \frac{v \cos \theta}{\frac{d\varphi}{dt}} \quad (15)$$

c./ A pályagörbület sugaraira vonatkozó képletek meghatározása, az n_y túlterhelés felhasználásával.

A túlterhelések felhasználásával a tömegközéppont dinamikájának egyenletei:

$$\frac{dv}{dt} = g (n_x - \sin \theta) \quad (16)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{g}{v} (n_y \cos \gamma - \cos \theta) \quad (17)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = - \frac{g}{v \cos \theta} n_y \sin \gamma \quad (18)$$

A (17) és (18) egyenletből kapjuk:

$$r_y = \frac{v^2}{g (n_y \cos \gamma - \cos \theta)} \quad (19)$$

$$r_z = \frac{v^2 \cos^2 \theta}{g n_y \sin \gamma} \quad (20)$$

A (17) egyenlet a pálya elgörbülését jellemzi a kité-

rités síkjában (ha a jobboldal nullával egyenlő, akkor a pálya a kitérítés síkjában egyenesvonalú lesz). A (18) egyenlet a pálya vízszintes vetületének elgörbülését jellemzi (ha γ bedöntési szög és a $\sin \gamma$ nullával egyenlő, akkor $d\varphi/dt = 0$ és így a pálya be van zárva a függőleges síkba).

Összegezve.

- A mozgás tetszőleges térbeli pályája kettős görbülettel rendelkezhet. A pálya szerinti koordináta rendszer alkalmazásával a térbeli pálya görbületét a sugaraival lehet jelezni egyrészt a függőleges kitérítési síkban (r_y), másrészt pedig a pálya vízszintes vetületén (r_x).

- Kapcsolat a pálya függőleges és a vízszintes síkban lévő görbületei között. A (20) egyenletet osszuk el a (19) egyenlettel:

$$\frac{r_x}{r_y} = \frac{(n_y \cos \gamma - \cos \theta) \cos^2 \theta}{n_y \sin \gamma} \quad (21)$$

A (21)-ből következik, hogy a pálya görbületi sugarainak viszonyát (megadott túlterhelés és ismert pályahajlásszög mellett) csak a bedöntési szög határozza meg és ez a viszony nem függ a repülési sebességtől. A bedöntési szög növelése csökkenti a görbületi sugarak r_x/r_y hányadosának értékét, vagyis növeli a pálya vízszintes vetületének görbületét.

- A grafikus módszer szerint lépésenként ki kell számítani a pálya görbületének sugarait:

$$r_x = \frac{v^2 \cos^2 \theta}{g n_y \sin \gamma} \quad (22)$$

valamint a pálya elfordulási szögeit a δt időintervallum alatt

$$\delta\varphi = - \frac{g}{v \cos \theta} n_y \sin \gamma \delta t \quad (23)$$

2. A pályahajlásszög (θ) és bedöntési szög (γ) meghatározása közvetett úton, számítási módszerrel.

A SzARPP típusú fedélzeti adatrögzítők az idő függvényében regisztrálják a repülési magasságot, a $v=v(t)$ sebességet, valamint az $n_{x1} = n_x(t)$ és $n_{y1} = n_y(t)$ túlterheléseken kívül a hajtómű fordulatszámát és a stabilizátor kitérési szögét. A korszerűbb repülési paraméter tároló rendszerek még egy sor más paramétert is rögzítenek.

Ezért a szükséges paramétereket, a θ pályahajlásszöget és a γ bedöntési szöget, közvetett úton, számítási módszerrel kell meghatározni.

a.) A pályahajlásszög (θ) meghatározása.

A pályahajlásszög meghatározásához felhasználhatjuk a következő egyenleteket:

$$H = v \sin \theta \quad (24)$$

$$v = g (n_x - \sin \theta) \quad (25)$$

miután előzetesen meghatároztuk a SzARPP anyaga alapján a következő differenciálhányadosokat:

$$\frac{dH}{dt} \approx \frac{\delta H}{\delta t} \quad \text{és} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\delta v}{\delta t}$$

így a (24) egyenletből:

$$\theta = \arcsin \frac{\frac{\delta H}{dt}}{v} \quad (26)$$

a (25) egyenletnek megfelelően:

$$\theta = \arcsin \left(n_x - \frac{1}{g} \frac{\delta v}{\delta t} \right) \quad (27)$$

ahol: $n_x = n_{x_1} \cos \alpha - n_{y_1} \sin \alpha$.

Azt, hogy melyik képletet használjuk, attól függ, hogy mennyire pontos a H , a v és az n_x rögzítése a SZARPP fedélzeti adatrögzítőben.

A $\theta = \theta(t)$ függvény meghatározása után meg lehet állapítani a $d\theta/dt \approx \delta\theta/\delta t$ differenciálhányadosok értékét.

b.) A bedöntési szög (γ) meghatározása.

A következő lépésként, az alábbi egyenlet

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{g}{v} (n_y \cos \gamma - \cos \theta) \quad (28)$$

segítségével, a különböző időpillanatokra, kiszámítható a bedöntési szög értéke:

$$\gamma = \arcsin \frac{1}{r_y} \left(\frac{v}{g} \frac{d\theta}{dt} + \cos \theta \right) \quad (29)$$

ahol: $n_y = n_{y_1} \cos \alpha + n_{x_1} \sin \alpha \approx n_{y_1}$.

Ezek után meghatározzuk a θ és γ szögek értékeit, amelyek lehetővé teszik a következő egyenletek alkalmazását:

$$r_u = \frac{v^2 \cos^2 \theta}{g n_y \sin \gamma} \quad (30)$$

$$\varphi = - \frac{g}{v \cos \theta} n_y \sin \gamma \quad (31)$$

a térbeli pálya felépítésékor.

Szél esetén a pályát a Földhöz viszonyítva a széleltérés figyelembevételével kell kiszámolni.

A gyakorlatban más módszert is alkalmaznak a pálya számításához, amikor nem teljesek a kiinduló adatok.

A SzARPP által regisztrált $H(t)$ függvény lépcsőzetes, így a numerikus integrálása nehézségekbe ütközik. Ezért megadják a $\gamma(t)$ és $n_y(t)$ függvények feltételezett változását és fokozatos közelítéssel (a mozgásegyenletek sorozatos numerikus integrálása útján), olyan $\gamma(t)$ és $n_y(t)$ törvényszerűségeket választanak meg, amelyek biztosítják a legjobb egybeesést a rögzített repülési paraméterekkel.

Felhasznált irodalom

- [1] - A. M. Tarasenkov, B. G. Braha, B. T. Taranenko: Динамика полёта и боевого маневрирования летательных аппаратов ВВИА. ин. проф. Н. Е. Жуковского, Москва, 1984
- [2] - Динамика полёта: Под редакцией д-ра техн. наук, проф. А. М. Мхитяряна "Машиностроение", Москва, 1971
- [3] - И. З. Остаславский, М. В. Сражева: Динамика полёта. Траектории летательных аппаратов "Машиностроение", Москва 1969
- [4] - А. С. Шаталов, Д. И. Топчев, В. С. Кондратьев: Летательные аппараты как объекты управления "Машиностроение" Москва, 1972
- [5] - А. М. Tarasenkov, B. G. Braha, B. T. Taranenko: Динамика полёта и боевого маневрирования летательных аппаратов Часть I. Траектории движения и лётные характеристики ВВИА. ин. проф. Н. Е. Жуковского, Москва, 1973