

Békési Bertold mk. főhadnagy  
főiskolai oktató  
Repülő szakág tanszék

## A REPÜLŐGÉP HOSSZIRÁNYÚ MOZGÁSÁNAK MATEMATIKAI MODELLJE

### Bevezetés

A repülőgép mozgását két mozgás formájában képzelhetjük el: a tömegközéppont adott pályán történő és a repülőgép, mint szilárd test e középpont körüli mozgása. Ezen mozgások hat szabadságfokkal rendelkeznek.

A tömegközéppont helyzetét egy adott koordináta-rendszerhez viszonyítva, lineáris koordináták határozzák meg: a  $H$  repülési magasság,  $X$  megtett út,  $Z$  oldaleltérés. A lineáris koordináták mellett még szögkoordináták is jellemzik a repülőgép helyzetét. Ezen kívül még figyelembe kell venni a repülés azon paramétereit is, amelyek a repülőgép mozgását a levegőhöz viszonyítva jellemzik:  $V$  sebesség,  $\alpha$  állásszög,  $\beta$  csúszásszög.

A kormányzott repülés végrehajtása céljából változtatni kell a repülőgépre ható  $F$  erőket és  $M$  nyomatékokat. A feladat végrehajtása céljából a mozgás pillanatnyi paramétereit állandóan összehasonlítják a szükséges paraméterekkel, majd az összehasonlítás eredményeként vezérlő jeleket alakítanak ki. A repülőgép bonyolult mozgását egy sor egyszerű mozgásra bontják és így tanulmányozzák valamennyit. A légi járművek repülésdinamikájának vizsgálatát derékszögű és polár koordináta-rendszerek segítségével végzik el.

### 1. A repülőgép térbeli mozgásának egyenletei

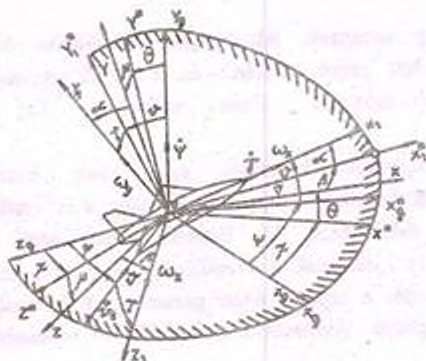
A repülőgép egyenleteinek meghatározására a következő koordináta-rendszereket használják fel:

- a.) Földi koordináta-rendszer.
- b.) Földi koordináta-rendszer a repülőgép tömegközéppontú origóval.

c.) A repülőgéppel összekapcsolt koordinátarendszer.

d.) Sebességi koordinátarendszer.

A repülőgép térbeli mozgását tanulmányozva a földi koordinátarendszerhez viszonyítva az idő függvényében, a kinematikai törvényszerűségeket is figyelembe véve két derékszögű koordinátarendszert használnak:  $O X_0 Y_0 Z_0$  földi és  $O X_1 Y_1 Z_1$  repülőgéppel összekapcsolt koordinátákat.



1.ábra  
Koordinátarendszerek

A repülőgép tömegközéppontját az  $O X_0 Y_0 Z_0$  koordinátarendszerben három lineáris koordináta:  $L$  megtett út,  $Z$  oldaleltérés,  $h$  repülési magasság, és a repülőgéppel összekapcsolt  $O X_1 Y_1 Z_1$  koordinátáknak, a földi koordináta rendszerhez viszonyított szögkoordináták:  $\psi$  irány,  $\vartheta$  bólintási és  $\gamma$  bedöntési szöge határozzák meg. A repülés folyamán fontos paraméter az  $\alpha$  állásszög és a  $\beta$  csúszásszög.

Kinematikai összefüggés, amely összekapcsolja a  $\vartheta$  bólintási  $\alpha$  állás és  $\theta$  pályaszögeket:

$$\vartheta = \theta + \alpha \quad (1)$$

A repülőgép földi koordináta-rendszerhez viszonyított mozgásának teljes elemzéséhez a kinematikai egyenletek nem elegendőek, szükséges még ismerni a repülőgépre ható erők és nyomatékok megoszlását. Ezek a repülőgép stabilitását és kormányozhatóságát határozzák meg. [1.,3.,4.,5.,6.,7.,8.,10.,12.,14.]

A dinamika a rendszerek mozgása közötti kapcsolatot a rájuk ható erők és nyomatékok figyelembevételével vizsgálja, a repülőgép térbeli mozgását leíró matematikai modell létrehozását teszi lehetővé.

A merev repülőgép térbeli mozgásegyenleteit megkaphatjuk az impulzus megmaradás (2) és a perdület - tétel (3) törvényeiből.

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \sum F \quad (2)$$

$$\frac{d\vec{\pi}}{dt} = \sum M \quad (3)$$

- ahol  $m$  - a repülőgép tömege  
 $\vec{V}$  - tömegközéppont mozgási sebessége  
 $\sum F$  - a repülőgépre ható erők eredője  
 $\vec{\pi} = I\vec{\omega}$  - a repülőgép perdület tételének nyomatéka  
 $I$  - a tehetetlenségi tenzor  
 $\sum M$  - a külső erők eredő nyomatéka

A repülőgép térbeli mozgását hat dinamikai egyenlet írja le. A repülőgép mozgásegyenleteit felírjuk a test koordináta-rendszerben (OXYZ). Ezeket komponens egyenleteknek nevezzük:

$$\begin{aligned} m(\dot{V}_x + \omega_y V_z - \omega_z V_y) &= F_x \\ m(\dot{V}_y + \omega_z V_x - \omega_x V_z) &= F_y \\ m(\dot{V}_z + \omega_x V_y - \omega_y V_x) &= F_z \end{aligned} \quad (4)$$

ahol  $F_x, F_y, F_z$  - a külső erők vektorának vetülete a test koordináta-rendszer tengelyeire.

A forgó mozgás egyenletei (OXYZ) rögzített koordináta-rendszer tengelyei körül:

$$\begin{aligned} I_x \dot{\omega}_x + (I_x - I_y) \omega_y \omega_z &= M_x \\ I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z &= M_y \\ I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_z) \omega_x \omega_y &= M_z \end{aligned} \quad (5)$$

ahol  $M_x, M_y, M_z$  - a külső erők nyomatékának komponens összetevői.

Ezeket az egyenletrendszerket két különböző mozgásra lehet szétbontani:

1. Hosszirányú mozgásra -  $X_1$  és  $Y_1$  mentén mozog és az  $OZ_1$  tengely körüli forgásra.
2. Oldalirányú mozgásra -  $Z_1$  mentén mozog és az  $X_1$  és  $Y_1$  körüli forgásra.

## 2. A repülőgép hosszirányú mozgás egyenletei

Az oldalirányú mozgás hatása a hosszirányú mozgásra elhanyagolható  
 $(V_z, \omega_x, \omega_y) = 0$

Ha áttérünk a sebességi koordinátarendszerre akkor  $V_x = V, V_y = 0$  és

$$\frac{d\omega_x}{dt} = \dot{\Theta} \quad (6)$$

akkor kapjuk

$$\begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= \sum F_x \\ mV \omega_x &= \sum F_y \\ I_x \frac{d\omega_x}{dt} &= \sum M_x \end{aligned} \quad (7)$$

A mozgásegyenletek

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= P \cos \alpha - X_x - m g \sin \Theta \\ mV \dot{\Theta} &= Y_x + P \sin \alpha - m g \cos \Theta \\ I_x \dot{\omega}_x &= M_x, \quad \dot{\Theta} = \omega_x \\ V_x &= V \cos \Theta, V_y = V \sin \Theta \\ \alpha &= \vartheta - \Theta \end{aligned} \quad (8)$$

Az egyenletrendszer továbbra is nemlineáris marad, mivel trigonometrikus összefüggéseket tartalmaz, az aerodinamikai erők és nyomatékok együtthatói szintén nemlineáris függvények. [1.,3.,4.,5.,6.,7.,10.,11.,12.,14.]

### 3. A hosszirányú mozgásegyenletek linearizálása.

Tételezzük fel:

1. Zavarásmentes állapotban  $V=0$ ,  $V_s=0$ .
2. A repülőgép tömegét és tehetetlenségi nyomatékait állandónak vesszük.

Legyen a kiindulási stacionárius állapot állandó magasságokon végrehajtott egyenesvonalú egyenletes repülés. Ebben a kiindulási állapotban a változókat jelöljük "0" indexszel. A mozgásegyenletek linearizálása  $V_0; P_0; \alpha_0, \dots$  és így tovább állandó értékekkel jellemezhető, és a zavartalan mozgáshoz viszonyítva a mozgás kismértékű változásait vesszük figyelembe  $\Delta V; \Delta P; \Delta \alpha, \dots$ , és így tovább.

A kis zavarások módszerével a változókat a következő alakban írhatjuk fel:

$$V = V_0 + \Delta V, P = P_0 + \Delta P, \alpha = \alpha_0 + \Delta \alpha \text{ stb.}$$

Mivel a kiindulási állapot paramétereinek deriváltjai nullával egyenlők, ezért egyértelműek a következő kifejezések:  $\dot{V} = \Delta \dot{V}$ ,  $\dot{\theta} = \Delta \dot{\theta}$  és így tovább. Az erők és nyomatékok linearizálásánál figyelembe kell venni, hogy azok linearizálása a nyugalmi pontban történik. Ez az adott pillanatban megfelel az egyenesvonalú egyenletes mozgásnak, csúszás nélkül, így ezek a mennyiségek azonosan egyenlők nullával. [1.,2.,10.,12.,13.]

Az aerodinamikai erők és nyomatékok, mint ismeretes, a következő állandók segítségével határozhatók meg:

$$Y_s = c_{Y_s} \frac{\rho V^2}{2} S; X_s = c_{X_s} \frac{\rho V^2}{2} S; M_s = m_s \frac{\rho V^2}{2} S b_s \quad (9)$$

ahol  $X_s$  - légellenállási erő

$Y_s$  - aerodinamikai felhajtóerő

$M_s$  - a bólintási nyomaték

- $c_{x_0}$  - légellenállási tényező  
 $c_{x_1}$  - aerodinamikai felhajtóerő tényezője  
 $m_2$  - bólintási nyomaték együtthatója  
 $S$  - a szárny felülete  
 $b_A$  - közepes aerodinamikai húr (KAH)

Az aerodinamikai erők és nyomatékok együtthatóira a következő összefüggést lehet felírni:

$$\begin{aligned}
 c_{x_0} &\cong c_{x_0}(V, h, \alpha); \\
 c_{x_1} &\cong c_{x_1}(V, h, \alpha); \\
 m_2 &= m_2(V, h, \alpha, \dot{\alpha}, \omega_z, \delta_p).
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

A hajtómű tolóerejére a következő összefüggést lehet felírni:

$$P = P(V, h, \delta_p) \tag{11}$$

Az (8) egyenletrendszer első egyenletének linearizálása

$$m \frac{dV}{dt} = P \cos \alpha - X_a - m g \sin \Theta \tag{12}$$

$$\frac{d(V_0 + \Delta V)}{dt} = \frac{dV_0}{dt} + \frac{d\Delta V}{dt} = \frac{d\Delta V}{dt} \tag{13}$$

ahol  $\frac{dV_0}{dt} = 0$

behelyettesítve az (12) egyenletbe az (13) kifejezést kapjuk

$$m \frac{d\Delta V}{dt} = (P_0 + \Delta P) \cos(\alpha_0 + \Delta\alpha) - (X_{a_0} + \Delta X) - m g \sin(\Theta_0 + \Delta\Theta) \tag{14}$$

$$\cos(\alpha_0 + \Delta\alpha) = \cos\alpha_0 \cos\Delta\alpha - \sin\alpha_0 \sin\Delta\alpha \tag{15}$$

$$\sin(\Theta_0 + \Delta\Theta) = \sin\Theta_0 \cos\Delta\Theta + \cos\Theta_0 \sin\Delta\Theta \tag{16}$$

$$m \frac{d\Delta V}{dt} = P_0 \cos \alpha_0 \cos \Delta \alpha - P_0 \sin \alpha_0 \sin \Delta \alpha + \Delta P \cos \alpha_0 \cos \Delta \alpha - \Delta P \sin \alpha_0 \sin \Delta \alpha - \\ - X'_{\alpha} - \Delta X - m g \sin \theta_0 \cos \Delta \theta - m g \cos \theta_0 \sin \Delta \theta \quad (17)$$

Legyen

$$\sin \Delta \alpha \approx \Delta \alpha; \cos \Delta \alpha \approx 1 \quad (18)$$

Az (17), (18) egyenletből kapjuk

$$m \frac{d\Delta V}{dt} = -P_0 \sin \alpha_0 \Delta \alpha + \Delta P \cos \alpha_0 - \Delta X - m g \cos \theta_0 \Delta \theta \quad (19)$$

továbbá

$$X = X(V, h, \alpha) \quad (20)$$

Feltételezzük, hogy a linearizálni kívánt függvény nemlineáris összefüggései a kiindulási stacionárius állapotban és annak környezetében akárhányszor differenciálható így azok Taylor - sorba fejthetők. A munkapont körüli változásokra szorítkozva a magasabb rendű tagokat elhanyagoljuk.

Sorbafejtjük az (11) és (20) nemlineáris funkciókat

$$P = P_0 + \left( \frac{\partial \Delta P}{\partial V} \right)_{r, \alpha_0} \Delta V + \left( \frac{\partial \Delta P}{\partial h} \right)_{h, \alpha_0} \Delta h + \left( \frac{\partial \Delta P}{\partial \delta} \right)_{\delta, \alpha_0} \Delta \delta, \quad (21)$$

Vezessük be a következő általános kifejezést  $\frac{\partial F}{\partial X} = F^*$  akkor kapjuk

$$P = P_0 + P^r \Delta V + P^h \Delta h + P^{\delta} \Delta \delta, \quad (22)$$

vagyis a következő egyenletet kapjuk

$$m \frac{d\Delta V}{dt} = -P_0 \sin \alpha_0 \Delta \alpha + (P^r \Delta V + P^h \Delta h + P^{\delta} \Delta \delta) \cos \alpha_0 - \\ - (X^r \Delta V + X^h \Delta h + X^{\alpha} \Delta \alpha) - m g \cos \theta_0 \Delta \theta \quad (23)$$

A második egyenlet linearizálásakor feltételezzük, hogy  $P = P(V, h)$  vagyis elhanyagoljuk a nehézségi erőt a vezérlőkarok helyzetétől ( $P^{\theta, \delta}, \sin \alpha \approx 0$ ).

A hosszirányú mozgás lineáris modellje a következő:

$$\begin{aligned} \dot{V} + a_x^r V + a_x^0 \Theta + a_x^c \alpha + a_x^h h &= a_x^{\delta} \delta, \\ \dot{\Theta} + a_\theta^r V + a_\theta^0 \Theta + a_\theta^c \alpha + a_\theta^h h &= 0 \\ \dot{\omega}_z + a_\omega^r V + a_\omega^0 \Theta + a_\omega^c \omega_z + a_\omega^c \alpha + a_\omega^h h &= a_\omega^{\delta} \delta, \\ \dot{\alpha} - a_\alpha^r V - a_\alpha^0 \Theta - \omega_z - a_\alpha^c \alpha - a_\alpha^h h &= 0 \\ \dot{h} + a_h^r V + a_h^0 \Theta &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

Az (24) egyenletrendszer néha szokás kiegészíteni  $\dot{\vartheta} = \omega_z$ ;  $\vartheta = \theta + \alpha$  ami lehetővé teszi a pályaszög kizárását. Így a következő egyenletrendszer kapjuk:

$$\begin{aligned} \dot{V} + a_x^r V + a_x^0 \vartheta + (a_x^c - a_x^0) \alpha + a_x^h h &= a_x^{\delta} \delta, \\ \dot{\omega}_z + a_\omega^r V + a_\omega^0 \vartheta + a_\omega^c \omega_z + (a_\omega^c - a_\omega^0) \alpha + a_\omega^h h &= a_\omega^{\delta} \delta, \\ \dot{\alpha} - a_\alpha^r V - a_\alpha^0 \vartheta - \omega_z - (a_\alpha^c - a_\alpha^0) \alpha - a_\alpha^h h &= 0 \\ \dot{h} + a_h^r V + a_h^0 \vartheta - a_h^0 \alpha &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

Az (24) egyenletrendszer derivatív együtthatói amelyek a hosszirányú mozgást írják le, a következők:

$$\begin{aligned} a_x^r &= \frac{1}{r_s} \left( c_{x_s} + \frac{V}{2} c_{x_s}^r \right) \frac{\cos \alpha}{m} P^r; \quad a_x^c = \frac{g}{V} \cos \theta; \\ a_x^0 &= \frac{c_{x_s}^0}{2r_s} + \frac{P \sin \alpha}{mV}; \quad a_x^h = \frac{P^0 r}{mV} \cos \alpha; \\ a_\omega^0 &= \frac{YT^h}{2T_s} \left[ \frac{r_s P^r \cos \alpha}{m} - c_{x_s} \left( 1 + \frac{1}{R_s T^h} \right) \frac{V c_{x_s}^r}{2} \right]; \\ a_\alpha^r &= -\frac{1}{r_s} \left( c_{x_s} + \frac{V}{2} c_{x_s}^r \right) \frac{P^r}{m} \sin \alpha; \quad a_\alpha^0 = -\frac{g}{V} \sin \theta; \end{aligned}$$

$$a_x^h = \frac{VT^h}{2T_h} \left[ \frac{\tau_a P^r \sin \alpha}{m} + c_{r_a} \left( 1 + \frac{1}{R_0 T^h} \right) + \frac{Vc_{r_a}^r}{2} \right]; \quad (26)$$

$$a_y^h = \frac{c_{r_a}^a}{2\tau_a} \frac{P \cos \alpha}{mV};$$

$$a_{m_z}^r = -\chi \left( V m_z^r + 2m_z + \frac{b_A}{V} m_z^r a_y^a \right); \quad a_{m_z}^o = -\chi \frac{b_A}{V} m_z^r a_y^o;$$

$$a_{m_z}^v = -\chi \frac{b_A}{V} (m_z^v + m_z^r); \quad a_{m_z}^a = -\chi \left( m_z^r + \frac{b_A}{V} m_z^r a_y^a \right);$$

$$a_{m_z}^h = \chi \left\{ \frac{VT^h}{2T_h} \tau_a \left[ m_z^r V + 2m_z \left( 1 + \frac{1}{R_0 T^h} \right) \right] - \frac{b_A}{V} m_z^r a_y^h \right\};$$

$$a_{m_z}^{h,r} = \chi m_z^{h,r}; \quad a_x^r = -\frac{\sin \Theta}{\tau_a}; \quad a_x^o = -\frac{\cos \Theta}{\tau_a}; \quad \chi = \frac{\rho V^2}{2} S \frac{b_A}{I_z}; \quad \tau_a = \frac{m}{\rho V S}.$$

Az (25) differenciális egyenletrendszer a következő mátrix alakban írható fel

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

ahol

$$x = \begin{pmatrix} V \\ \Theta \\ \omega_z \\ \alpha \\ h \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} -a_x^r & -a_x^o & 0 & -a_x^a & -a_x^h \\ -a_y^r & -a_y^o & 0 & -a_y^a & -a_y^h \\ -a_{m_z}^r & -a_{m_z}^o & -a_{m_z}^v & -a_{m_z}^a & -a_{m_z}^h \\ a_y^r & a_y^o & 1 & a_y^a & a_y^h \\ -a_x^r & -a_x^o & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad u = \begin{pmatrix} a_x^{h,r} \delta_r \\ 0 \\ a_{m_z}^{h,r} \delta_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Az (27) egyenlet és az (25) összefüggés teljes egészében leírja a repülőgép hosszirányú mozgását. A gyakorlatban az  $a_x^r; a_x^o; a_{m_z}^h$  el lehet hanyagolni, ami valamelyest leegyszerűsíti a matematikai modellt, mivel a kinematikai egyenlet

$$\dot{h} + a_x^r V + a_x^o \Theta = 0 \quad (28)$$

nincs hatással az egyenletrendszer többi egyenletére.

Alkalmazva a Laplace transzformációt ehhez az egyenletrendszerhez nulla kezdeti feltételek mellett, a hosszirányú mozgás matematikai modelljét a következő alakban kapjuk.

$$\begin{aligned}
 (s+a_x^r)V(s) + a_x^0\Theta(s) + a_x^r\alpha(s) &= a_x^r\delta_p \\
 a_y^rV(s) + (s+a_y^0)\Theta(s) + a_y^r\alpha(s) &= 0 \\
 a_m^rV(s) + a_m^0\Theta(s) + (s+a_m^r)\omega_z(s) + a_m^r\alpha(s) &= a_m^r\delta_z(s) \\
 -a_y^rV(s) - a_y^0\Theta(s) - \omega_z(s) + (s-a_y^r)\alpha(s) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

Az (28) egyenletnek a következő karakterisztikus egyenlet felel meg

$$\begin{aligned}
 D(s) &= \begin{vmatrix} (s+a_x^r) & a_x^0 & 0 & a_x^r \\ a_y^r & (s+a_y^0) & 0 & a_y^r \\ a_m^r & a_m^0 & (s+a_m^r) & a_m^r \\ -a_y^r & -a_y^0 & -1 & (s-a_y^r) \end{vmatrix} = \\
 &= s^4 + q_3s^3 + q_2s^2 + q_1s + q_0 = 0
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

ahol

$$\begin{aligned}
 q_0 &= a_m^r(a_x^r a_y^0 - a_x^0 a_y^r) + a_m^0(a_x^0 a_y^r - a_x^r a_y^0) + a_m^r(a_x^0 a_m^r - a_x^r a_m^0) \\
 q_1 &= a_m^r[a_y^r(a_x^r - a_x^0) - a_y^0(a_m^r - a_m^0)] + (a_x^r a_m^r - a_x^0 a_m^0) \cdot (a_y^0 a_m^r - a_y^r a_m^0) \\
 q_2 &= a_y^r(a_x^r - a_x^0) - a_x^r(a_m^r - a_m^0) + a_m^r + a_m^0(a_x^r + a_y^0 - a_x^0) \\
 q_3 &= a_m^r + a_x^r + a_y^0 - a_x^0
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

A karakterisztikus egyenletnek öt gyöke van. Az egyik egyenlő nullával. Ez azt jelenti, hogy a repülőgép semlegesen viselkedik a magasságváltozást illetően (aerodinamikai erők és nyomatékok nem függenek a magasságtól). A többi négy gyök komplex konjugált és jelentős mértékben különbözik egymástól. Ezért a hosszirányú mozgás transziens folyamatát két mozgásformában írhatjuk le: hosszú periódusú (sebesség szerint) és rövid periódusú (állásszög szerint).

#### 4. A hosszirányú mozgás átviteli függvényei

Az automatikus irányítási rendszerek analízise és szintézise során széles körben használatosak az átviteli függvények. Átviteli függvénynek

nevezik azt a viszonyt amely a kimeneti értékeket írja le a bemeneti értékeknek nulla kezdeti feltételek mellett. Azonban a repülőgép átviteli függvényeiben, amelyeket nemsokára megkapunk, a bemeneti értékek (a bólintási irány elfordulását) ellentétes előjellel veszik. Ezt azzal lehet megmagyarázni, hogy az aerodinamikában ezt az irányt veszik a pozitívnak.

$$\text{Például, } W_{\delta}^p(s) = \frac{\delta(s)}{-\delta_{\delta}(s)}$$

Az átviteli függvények lehetőséget adnak a tranzien (átmeneti) folyamatok és frekvenciajellemzők tanulmányozására. A repülőgép mozgására vonatkozóan pedig a rövid és hosszú periódusú, valamint a bedöntés és elfordulás szerinti mozgásainak vizsgálatára. [1., 2., 9., 10., 13.]

A repülőszerkezetekre ható külső zavarás legyen függőleges irányú szélleökés. Kezdetben a repülőszerkezet tehetetlensége miatt a repülés sebességének abszolút értéke  $V$ , valamint a pályaszög  $\Theta$  gyakorlatilag nem változik. Ekkor az állásszög  $\alpha$  és a bólintási szög  $\theta$  intenzív változását figyelhetjük meg. Mivel az állásszög és a bólintási szög nagy frekvenciával változik, tehát a vizsgált paraméterek ( $\alpha; \theta$ ) periódusideje kicsi, ezért ezt a mozgást szokás rövidperiódikus mozgásnak nevezni (RPM).

A rövidperiódikus mozgás befejeztével jelentőssé válik a repülés sebességvektorának (abszolút értékének  $V$  és irányának  $\Theta$ ) megváltozása. Mivel ekkor az állásszög állandónak tekinthető, ezért a pályaszög változása követi a bólintási szög változását:  $\dot{\theta} = \dot{\Theta} + \dot{\alpha}$ . Ez a mozgás kisméretű, nagy periódusidővel rendelkezik, ezért szokás hosszúperiódikus mozgásnak nevezni.

Az eddig elhangzottak alapján a rövidperiódikus mozgásra igaz:  $\Delta V = 0; \Delta \Theta = 0$ .

Az (29) egyenletrendszer összefüggéseiben az  $a_y^v, a_{m_y}^v, a_y^0, a_{m_y}^0$  állandókat el lehet hanyagolni. Ez lehetővé teszi, hogy a rövidperiódusú hosszirányú mozgásra egy egyszerű modellt kapjunk.

$$\begin{aligned} (s + a_{m_z}^v) \omega_z(s) + a_{m_z}^0 \alpha(s) &= a_{m_z}^v \delta_{\delta}(s) \\ -\omega_z(s) + (s - a_z^v) \alpha(s) &= 0 \end{aligned} \quad (32)$$

ahol  $a_{m_z}^v, a_{m_z}^0, a_z^v$  - állandók, a repülőgép hosszirányú csatornájának erős összefüggései.

A repülőgép  $\omega_z$  szerinti átviteli függvénye  $W_{\omega_z}(s) = \frac{\omega_z(s)}{-\delta_y(s)}$

Az (32) egyenletrendszerből a CRAMER szabály segítségével határozzuk meg az átviteli függvényt:

$$\omega_z = \frac{D_{\omega_z}}{D_1}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} s + a_{\omega_z}'' & a_{\omega_z}'' \\ -1 & s - a_{\omega_z}'' \end{vmatrix} = (s + a_{\omega_z}'')(s - a_{\omega_z}'') + a_{\omega_z}'' = a_{\omega_z}'' s^2 + a_{\omega_z}'' s + a_{\omega_z}'' = 0 \quad (33)$$

$$D_{\omega_z} = \begin{vmatrix} a_{\omega_z}'' \delta_y(s) & a_{\omega_z}'' \\ 0 & s - a_{\omega_z}'' \end{vmatrix} = (s - a_{\omega_z}'') a_{\omega_z}'' \delta_y(s) \quad (34)$$

ahol  $a_1 = a_{\omega_z}'' - a_{\omega_z}''$ ;  $a_2 = a_{\omega_z}'' - a_{\omega_z}'' a_{\omega_z}''$

Tehát

$$\omega_z = \frac{D_{\omega_z}}{D_1} = \frac{(s - a_{\omega_z}'') a_{\omega_z}'' \delta_y(s)}{a_{\omega_z}'' s^2 + a_{\omega_z}'' s + a_{\omega_z}''} \quad (35)$$

Az (34) egyenletnek, amely a rövidperiódusú hosszirányú mozgást leírja, a következők a megoldásai:

$$\omega_z(s) = \frac{a_{\omega_z}'' (s - a_{\omega_z}'')}{a_{\omega_z}'' s^2 + a_{\omega_z}'' s + a_{\omega_z}''} \delta_y(s) \quad (36)$$

$$\alpha(s) = \frac{a_{\omega_z}''}{a_{\omega_z}'' s^2 + a_{\omega_z}'' s + a_{\omega_z}''} \delta_y(s) \quad (37)$$

Vezessük be a következő jelöléseket

$$\omega_n^2 = a_1; \quad \xi_s = \frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}; \quad T_0 = \frac{1}{a_{\omega_z}''}; \quad K_{\omega_z}^s = \frac{a_{\omega_z}''}{\omega_n^2}; \quad K_{\omega_z}^s = \frac{K_{\omega_z}^s}{T_0} \quad (38)$$

Figyelembevétel az (25), (36), (37), (38), összefüggéseket megkapjuk az átviteli függvényeket bőlöntési irány és bedöntési szögek alapján.

$$W_a^n(s) = \frac{\alpha(s)}{-\delta_a(s)} = \frac{K_a^n \omega_a^2}{s^2 + 2\xi_a \omega_a s + \omega_a^2} \quad (39)$$

$$W_{\omega_r}^n(s) = \frac{\omega_r(s)}{-\delta_a(s)} = \frac{K_a^n \omega_a^2 (T_0 s + 1)}{s^2 + 2\xi_a \omega_a s + \omega_a^2} \quad (40)$$

$$W_{\theta}^n(s) = W_{\omega_r}^n(s) \frac{1}{s} = \frac{\vartheta(s)}{-\delta_a(s)} = \frac{K_a^n \omega_a^2 (T_0 s + 1)}{(s^2 + 2\xi_a \omega_a s + \omega_a^2) s} \quad (41)$$

$$W_o^n(s) = W_{\theta}^n(s) - W_a^n(s) = \frac{\Theta(s)}{-\delta_a(s)} = \frac{K_a^n \omega_a^2}{(s^2 + 2\xi_a \omega_a s + \omega_a^2) s} \quad (42)$$

ahol

$$K_a^n = \frac{a_{m_r}^{n_r}}{\omega_a^2} a_r^n = \frac{a_{m_r}^{n_r}}{\omega_a^2 T_0}$$

Határozzuk meg a repülőgép átviteli függvényét az  $n_r$  normál túlterhelés szerint, amely igen fontos szerepet játszik a repülési folyamatok irányításában.

$$W_{n_r}^n(s) = \frac{n_r(s)}{-\delta_a(s)} = \frac{K_{n_r}^n \omega_a^2}{s^2 + 2\xi_a \omega_a s + \omega_a^2} \quad (43)$$

ahol

$$K_{n_r}^n = K_a^n \frac{V}{g T_0} \quad - \text{a túlterhelés arányossági tényezője}$$

#### Felhasznált irodalom

- [1] - Aszlanjan A. E. Szisztyemi avtomatycieszkovo upravlenyija poljotom letatelnih apparatov, Kijevszkoje vizssee voennoe aviacionnoe inzenyermoe ucilise, Kijev, 1984.
- [2] - Bajborogyina J. V. Bortovije szisztyemi upravlenyija poljotom, Transzport, Moszkva, 1984.

- [3] - Belogorodszkij Sz. L. Automatizacija upravlenija poszadkoj szamoljota. Transzport, Moszkva, 1972.
- [4] - Blakelock H. John Automatic Control of Aircraft and Missiles. John Wiley & Sons, Inc. New York/London/Sydney, 1965.
- [5] - Bjugensz G. Sz., Sztudnev R. V. Dinamika prodolnovo i bokovovo dvizsenyija. Masinosztroenyije, Moszkva, 1979.
- [6] - Bjugensz G. Sz., Sztudnev R. V. Dinamika poljota. Prosztranzstvennoje dvizsenyije, Masinosztroenyije, Moszkva, 1983.
- [7] - Dickinson B. Aircraft Stability and Control for Pilots and Engineers, Sir Isaac Pitman & Sons LTD, London, 1968
- [8] - Dobrolenszkij J. P. Dinamika poljota v nyeszpakojnoj atmosfere, Masinosztroenyije, Moszkva, 1969.
- [9] - Hacker T. Flight Stability and Control, American Elsevier Publishing Company, Inc., New York, 1970.
- [10] - Horváth Dezső A repülőgép dinamikai tulajdonságának vizsgálata hosszirányú mozgás esetén. Tudományos Kiképzési Közlemények, Szolnok, 1994/2-3.
- [11] - McCormick W. B. Aerodynamics, Aeronautics, and Flight Mechanics, John Wiley & Sons, New York - Chichester - Brisbane - Toronto, 1964.
- [12] - Dr. Rácz Elemér Repülőgépek, Tankönyvkiadó, Budapest, 1985.
- [13] - Szabolcsi Róbert Légijárművek nemlineáris mozgásegyenleteinek linearizálása Tudományos Kiképzési Közlemények, Szolnok, 1992/2-3.
- [14] - Sznyesko J. I. Iszledovanyija v poljote usztojcsivosztyi i upravljaemosztyi szamoljota. Masinosztroenyije, Moszkva, 1971.