Dr. Pokorádi László
főiskolai docens
Kiképzési Osztály, tudományos főmunkatárs

A REPÜLŐGÉPEK ÜZEMELTETÉSE MINT MARKOV-FOLYAMAT (SORBANÁLLÁSI MODELL)

a szerző

Pannonian Applied Mathematical Meeting '95
4-7 of May, 1995, Balatonfüred

konferencián előadott és a

Bulletins for Applied Mathematics 1073/95

kiadványban (79 - 86 oldal) megjelent

AIRCRAFT OPERATION AS A MARKOV-PROCESS
(a Queuing Model)

című tanulmányának magyar nyelvű változata

A repülőgépek üzemeltetése egy diszkrét állapotokra bontható, utóhatásmentes sztochasztikus folyamat. Az üzemeltetés, matematikai szempontból, egy Markov-folyamat, és Markov--lánc-ként közelíthető. Az előadás a Markov-folyamatok elméletének alapjait, valamint a katonai repülőgépek kiképzési repülése műszaki kiszolgálásának markovi sorbanállási modelljét, annak felállítását és alkalmazását mutatja be.

1. Bevezetés

Az olyan sztochasztikus folyamatokat, amelynek jövőbeli alakulását a múltbeli alakulása csak a jelenlegi állapoton keresztül befolyásolja, azaz amelyek utóhatásmentesek, Markov-folyamatoknak nevezzük. Ezen folyamatok elméletének történetét Andrej Andrejevics Markov orosz matematikus munkássága (1856 - 1922) nyitotta meg.

A repülőtechnika üzemeltetése, a repülőgépekre, valamint azok kiszolgálására, a harcfeladatokra való előkészítésükre, különböző nagyságrendű javításukra szolgáló személyekre és előírásokra épülő sztochasztikus folyamat.

Ez a folyamat a repülőgéppel, vagy annak valamely rendszerével, berendezésével, azaz az üzemeltetés tárgyával, a gyártás és a kiselejtezés között történtek összessége.

A katonai repülőgépek üzemeltetésének egy jellegzetes és jelentős részét képezik a kiképzési repülések. Ekkor a hajózó állomány különböző repülési gyakorlatokat hajt végre, és a repülőgépek ismételt feladatra való előkészítését a műszaki állomány végzi a kisozlgáló zónában. Ez a műszaki kiszolgáló tevékenység matematikailag egy sorbanállási folyamatként közelíthető. A sorbalállási modell segítségével prognosztizálható befogadóképességű zóna és repülőgépszám esetén a zóna leterheltsége.

2. A Markov-folyamatok

Matematikailag felírva az $\eta(t)$ valószínűségi folyamatot Markov-folyamatnak nevezzük, ha 1 valószínűséggel teljesül minden $t_1<t_2< \dots <t_n<t_{n+1}$ és $X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}$ valós számra a:

$$P\left\{\eta(t_{n+1}) = X_{n+1} \;\middle|\; \eta(t_1) = X_1 ; \dots ; \eta(t_n) = X_n\right\} =$$

$$= P\left\{\eta(t_{n+1}) = X_{n+1} \;\middle|\; \eta(t_n) = X_n\right\} \qquad (1)$$

feltételes valószínűségek egyenlősége.

Ha az $\eta(t)$ folyamat a vizsgálati idő alatt bármely pillanatban felvehet valamilyen X értéket, akkor azt folytonos, ha η csak kitüntetett időpontokban rendelkezhet értékkel, diszkrét idejűnek nevezzük. Diszkrét állapotterűnek tekintjük azt a sztochasztikus folyamatot, ahol az η valószínűségi változó lehetséges értékei véges, vagy megszámlálhatóan végtelen elemű halmazt alkotnak.

A véges vagy megszámlálhatóan végtelen - azaz diszkrét - állapotterű, utóhatásmentes sztochasztikus folyamatokat Markov-láncnak nevezzük. Ekkor az (1) egyenletben meghatározott értéket átmenetvalószínűségnek nevezzük:

$$P_{ij}^{n,n+1} = P\left\{ \eta(t_{n+1}) = X_j \;\middle|\; \eta(t_n) = X_i \right\} . \qquad (2)$$

ami annak a valószínűségét fejezi ki, hogy $\eta(t_{n+1}) = X_j$, feltéve, hogy $\eta(t_n) = X_i$.

A fenti $P_{ij}^{n,n+1}$ jelölés azt is mutatja, hogy az átmeneti valószínűség nemcsak az i kezdeti és a j végállapot, hanem az idő (t_n) függvénye is. Ezt a valószínűséget a továbbiakban - az egyszerűség érdekében - a

$$P_{ij}^{n,n+1} = P_{ij}(t_n) = P_{ij}(t) \qquad (3)$$

módon jelöljük.

Véges, N számú állapot esetén a P_{ij} átmeneti valószínűségeket mátrixba szokás rendezni. Ezt a

$$\underset{=N\times N}{P}(t) = \left[P_{ij}(t) \right] \qquad (4)$$

mátrixot a folyamat Markov-mátrixának vagy átmenetvalószínűség mátrixnak nevezzük.

Ha a fenti egylépéses átmenetvalószínűségek függetlenek az időtől, akkor azt mondjuk, hogy a Markov-folyamat stacioner. Ebben az esetben felírható, hogy

$$P_{ij}^{n,n+1} = P_{ij} , \qquad (5)$$

illetve

$$\underset{=N\times N}{P} = \left[P_{ij} \right] \qquad (6)$$

mivel az független az n értékétől és P_{ij} annak a valószínűségét jelenti, hogy az $\eta(t)$ értéke X_i-ből X_j-be vált át a $(t_{n+1}; t_n)$ időintervallumban.

Egy Markov-folyamat egyértelműen az állapotokból való távozások eloszlásai és az átmenetvalószínűségek megadásával jellemezhető. Ha valamely állapotból való távozás eloszlásának jellege nem exponenciális, az adott sztochasztikus folyamatot félmarkovinak nevezzük.

3. A kiképzési repülések vizsgálata

A kiképzési repülés műszaki kiszolgálása matematikai szempontból egy többcsatornás, korlátozott tárolási méretű, markovi, vagy fél-markovi sorbanállási rendszert alkot.

1.ábra

Sorbanállási, kiszolgálási rendszeren olyan rendszert értünk, amelybe a *fogyasztók* véletlenszerűen érkeznek be, eltérő igényeik kielégítésére várnak, majd a kiszolgálásuk után rendszerből távoznak [4]. A kiképzési repülések műszaki kiszolgálása is egy ilyen rendszerben végbemenő sztochasztikus folyamatnak tekinthető. Ekkor a repülésen résztvevő gépeket tekintjük a *fogyasztók*-nak, a repülőműszaki állományt pedig a *kiszolgálók*-nak.

A fogyasztók rendszerbe való belépését - esetünkben a repülőgépek repülési feladatokról való visszatérését - *érkezési folyamat*-nak nevezzük. Ez matematikai szempontból egy felújítási folyamatot alkot [2].

Tekintsük az érkezések közti időket egy X_1 ; X_2 ; X_3 ... sorozatnak. Ekkor X_1 az első fogyasztó rendszerbe történő beérkezéséig eltelt időt; X_2 az első és a második gép beérkezése közti időt jelenti. Ez a sztochasztikus sorozat egy diszkrét állapotterű véletlen folyamatot alkot és az n-edik beérkezés ideje

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{7}$$

módon határozható meg. Az érkezési folyamatot az érkezések közti (X_n) idők megadása helyett le lehet írni az Y_t érkezések teljes számával. Az Y_t egy folytonos idejű véletlen folyamat, jelentése matematikailag az

$$\left[Y_t = n\right] \equiv \left[T_n \le t < T_{n+1}\right] \tag{8}$$

formában írható fel.

Vizsgálatunkban a kiszolgálás alatt nem csak a repülőgépek ismételt feladatra való előkészítését, hanem a következő feladatra való várakozását is értjük, mivel mindkét dolog a zónában (a kiszolgáló helyen) megy végbe. Így a *távozási folyamat*-on a gépek a zónából a következő feladatra való távozását értjük. Ezt a folyamatot - mely szintén egy felújítási folyamat - alapvetően a repülési tervtábla határozza meg. Mivel a kiképzési repülés során az egyéb, véletlenszerű külső hatások miatt (például az időjárási viszonyok változása) a tervtáblától történő eltérés léphet fel, ezt a folyamatot is sztochasztikusnak tekinthetjük.

A kiszolgálási mechanizmus leírható az egymásután beérkezett fogyasztók W_1 ; W_2 ; W_3 ... kiszolgálási idejeinek véletlen sorával. A beérkezés vizsgálatánál leírttal analóg módon definiálhatunk a Z_t folytonos idejű, kiszolgálási folyamatot.

A *kiszolgáló állomások* vagy másnéven a *kiszolgálási csatornák* száma alatt az egyszerre, párhuzamossan és egymástól függetlenül működő kiszolgálók számát értjük. Esetünkben ez alapvetően - a műszaki értelemben vett - kiszolgáló helyek (a töltőkutak vagy töltő kocsik, földi áramforrások) számát jelenti.

A vizsgált rendszer többcsatornásnak tekinthető, mert a zónában a műszaki állomány a kiszolgáló helyeken egyszerre, párhuzamosan végezheti az ismételt feladatra való előkészítések. A csatornák számát r-el jelöljük.

A korlátozott tárolási méretet a repülésen résztvevő gépek számaként - mint a rendszer jellemzőjét - kell felvennünk. Feltételezzük, hogy a kiképzési repülés során újabb, illetve nem a repülőegységhez tartozó gép vagy gépek kiszolgálására nem kerül sor. Ezzel a feltétellel a később felállítandó átmenetvalószínűségi mátrix méretét határoztuk meg. A rendszer maximális tárolási méretét K-val jelöljük. A korlátozott tárolási méret azt jelenti, hogy ha a sorbanállók száma eléri a maximális K értéket, az újabb beérkező fogyasztókat a rendszer elutasítja, míg a sor hossza K alá nem csökken.

Jelentse N_t a várakozó sor hosszát a t időpillanatban, azaz azon fogyasztók számát, akik kiszolgálása folyamatban van, vagy kiszolgálásra várnak. Ez az elözőekhez hasonlóan, egy folytonos idejű, diszkrét állapotterű sztochasztikus folyamatot alkot.

Jelen vizsgálatunk során egy várakozási-hossz problémát kell megoldani. Ekkor a kiszolgálásra váró fogyasztók számát, amely tartalmazza azokat is, melyek kiszolgálása éppen folyik, vizsgáljuk az idő függvényében. Ugyanis a rendszerben lévő igények száma határozza meg elemzésünk során a kiszolgáló zóna szükséges befogadó képességét.

4. A sorbanállási modell felállítása

A fent leírt $\langle X_n \rangle$ és $\langle W_n \rangle$ véletlen sorozatok, illetve a velük analóg Y_t és Z_t folyamatok meghatározzák a kiszolgálási rendszer, a várakozási sor viselkedését. Jellemzésükre szolgál a λ jelű beérkezési intenzitás, illetve a μ kiszolgálási intenzitás. E két paraméter statisztikai meghatározása az alábbi módon történhet:

$$\lambda = \frac{1}{\tilde{X}} \quad ; \quad \mu = \frac{1}{\tilde{W}} \quad . \tag{8}$$

ahol:

$\tilde{X}$ - a beérkezések közti idők átlaga;

$\tilde{W}$ - a kiszolgálási idők átlaga.

Az így felállított rendszermodell az alábbi tulajdonságokkal bír:

(I) - Ha a sor hossza kisebb a K maximális tárolási méretnél, annak a valószínűsége, hogy a sor Δt időintervallum alatt eggyel növekszik:

$$\lambda\, \Delta t + o(\Delta t) \qquad \text{ha } N_t < K \;;$$

- Ha a sor hossza egyenlő a maximális tárolási mérettel, ez a valószínűség

$$o(\Delta t) \qquad \text{ha } N_t = K$$

lesz.

(II) - Egy kiszolgálás valószínűsége a fentivel egyező Δt idő alatt az $N_t = i$ egyenlőség esetén:

$$\mu_i = i\,\mu\,\Delta t + o(\Delta t) \qquad \text{ha} \quad i \le r \;,$$
$$\mu_i = r\,\mu\,\Delta t + o(\Delta t) \qquad \text{ha} \quad i > r \;. \qquad (10)$$

(III) - Annak a valószínűsége, hogy egynél több beérkezés vagy kiszolgálás történik a vizsgált Δt idő alatt:

$$o(\Delta t) \quad .$$

melynek a határértéke:

$$\lim_{\Delta t \to 0} o(\Delta t) = 0 \quad .$$

(IV) - Az I és II tulajdonságok a rendszerben korábban történtektől és minden más feltételtől függetlenek.

Az (I) - (IV) tulajdonságokból következik, hogy az (X_n) érkezési és a (W_n) kiszolgálási idők kielégítik a felújítási folyamatok exponenciális eloszlására jellemző "feledékenység" tulajdonságát. Mindkét sor - egymástól is - független valószínűségi változók sora

$$\lambda\, e^{-\lambda t} \quad , \text{ illetve } \quad \mu\, e^{-\mu t}$$

sűrűség függvénnyel. Az W_t és Z_t folyamatok pedig Poisson (nulladrendű Markov) típusú folyamatok.

Így N_t egy folytonos idejű, (0;1;2; ... K) véges állapotterű Markov-láncot alkot, az alábbi valószínűségi derivált mátrixszal:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -\lambda & \mu_1 & 0 & 0 & \dots & & & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda-\mu_1) & \lambda & 0 & \dots & & & 0 \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda-\mu_2) & \lambda & \dots & & & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \mu_i & -(\lambda-\mu_i) & \lambda & & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & & & & \dots & 0 & \lambda & -\mu_K \end{bmatrix} \tag{11}$$

ahol μ_i értékeit a (II) feltétel - a (10) egyenlet - alapján lehet meghatározni.

A (11) egyenlet felhasználásával felírható az alábbi mátrixegyenlet:

$$\frac{d\underline{p}(t)}{dt} = \underline{\underline{A}}\,\underline{p}(t) \quad , \tag{12}$$

ahol:

$\underline{p}(t)$ - az N_t folyamat állapotokban való tartózkodásának valószinűség-vektora a t időpillanatban.

A (12) egyenlet jelenti a kiképzési repülések műszaki kiszolgálásának sorbanállási modelljét.

5. A feladat megoldása

Stacioner, azaz már beállt, kiszolgálási folyamat esetén az N_t folyamat állapotokban tartózkodás valószínűségének

$$\underline{p} = \underline{p}(t)$$

vektorát a

$$\underline{A}\,\underline{p} = \underline{0} \qquad (13)$$

egyenlet megoldásaként kaphatjuk meg, mivel a (12) egyenlet bal oldala ekkor:

$$\frac{d\underline{p}(t)}{dt} \equiv \underline{0} \; .$$

A fenti lineáris egyenletrendszer esetén problémaként jelentkezik, hogy a numerikus algoritmusok a

$$\underline{p} = \underline{0}$$

triviális megoldást adják meg. Viszont könnyen belátható, hogy minket az egyenlet ettől eltérő megoldás érdekel. Mivel célom egy könnyen algoritmizálható eljárás kidolgozása, a [6] cikkben már korábban ismertetett eljárást alkalmaztuk. A "K ismeretlenes"[1] (13) egyenletet "K+1 ismeretlenes"-re alakítottuk át. Az $\underline{p}'$ vektor K+1-edik elemének azt a biztos esemény valószínűségét tekintve, amikor az N_t folyamat a lehetséges állapotok valamelyikében tartózkodik. Ekkor az K+1-edik egyenlet a:

$$p_{K+1} = \sum_{j=0}^{K} p_j = 1 \quad . \qquad (14)$$

mely a (15) mátrixegyenlet K+1-edik sorát alkotja. Valamint a (13) egyenlet mindegyik sorához hozzáadtuk a K+1-edik (biztos) esemény valószínűségét. Így az egyenletrendszer - kiegészítve a (14) egyenlettel az alábbi mátrixalakot veszi fel:

---

1 Valójában a (13) egyenlet K+1 ismeretlenes, mivel a folyamat (0;1;2; ... K) állapotterű, így az egyenletrendszernek van egy nulladik sora is. A fenti megfogalmazást az egyszerűség miatt alkalmaztam.

$$\left[\begin{array}{c|c} \underline{\underline{A}} & \begin{matrix}1\\ \vdots \\ 1\end{matrix} \\ \hline 1\quad 1\quad \ldots\quad 1 & 0\end{array}\right] \left[\begin{array}{c} p_0 \\ \vdots \\ p_K \\ \hline 1\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 1\\ \vdots\\ 1\\ \hline 1\end{array}\right] . \qquad (15)$$

E lineáris egyenletrendszer bármely ismert numerikus módszerrel kapott eredménye a (13) egyenlet triviálistól eltérő megoldása lesz.

Az eljáráshoz az irodalomban található algoritmusokhoz képest ekkor nincs szükség megfontolásokat igénylő egyedi egyenletrendszer megoldásokra. Például behelyettesítésre, vagy valamely egyenlet helyett a (14) egyenlet bevezetésére. Nem a legcélszerűbben választott egyedi algoritmus esetén a megoldás nagyon bonyolulttá, kezelhetetlenné vagy a végeredmény numerikusan pontatlanná válhat.

6. Példa az alkalmazásra

Szemléltetésképpen az I.Táblázatban található kiinduló adatok felhasználásával modelleztünk egy kiképzési repülés műszaki kiszolgálását.

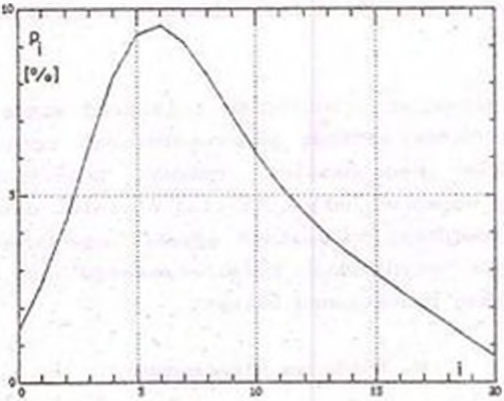
repülőgépek száma:	$K = 20$
kiszolgáló csatornák száma:	$r = 15$
beérkezési intenzitás:	$\lambda = 0{,}136$
kiszolgálási intenzitás:	$\mu = 0{,}029$

I.Táblázat
Kinduló adatok

Az állandósult N_t folyamat állapotokban való tartózkodás valószínűségeit szemlélteti a 2.ábra.

Összefoglaló

Az előadás bemutatta a Markov-folyamatok elméletének alkalmazási lehetőségét a katonai repülők kiképzési repülésének matematikai modellvizsgálatára. Felállítottuk a folyamat többcsatornás, korlátozott tárolási méretű sorbanállási modelljét. Egy könnyen algoritmizásható eljárás bemutatására került a stacioner modell megoldására.



2. ábra
Az állapotokban való tartózkodások valószínűségei állandósult folyamat esetén

A felállított modell alkalmazási lehetőségét egy egyszerű példa szemléltette. A bemutatott matematikai modell felhasználható például adott számú repülőgép kiszolgálásához szükséges zónakapacitás meghatározására.

Felhasznált irodalom

[1] - Clarke A.B., Disney R.L., Probability and Random Processes for Engineers and Scientists, John Wiely & Sons Inc., New York, 1970.

[2] - Karlin S., Taylor H.M., Sztochasztikus folyamatok, Gondolat, Budapest, 1985.

[3] - Kleinrock L., Sorbanállás - kiszolgálás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.

[4] - Papoulis A., Probability, Random Variables and Stochastic Processes, McGraw-Hill Book Company, Singapore, Hamburg, 1984.

[5] - Pokorádi László, Application of Markov Process Theory to Investigation of Aircraft Operational Processes, Proceeding of 19th Congress of the ICAS, Anaheim (California, USA), 1994 September 18-23. 2172-2180.

[6] - Pokorádi László, Investigation of Aircraft Operation System with Markov-Matrix, Proceeding of 4th Mini Conference on Veicle System Dynamics, Identification and Animalies, Budapest, 1994 november 7-9. (megjelenés alatt).

[7] - Prékopa András, Valószínűségelmélet műszaki alkalmazásokkal, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1980.

[8] - Rohács József, Műszaki üzemeltetési folyamatok optimális irányítása markovi modellek alapján, AUTOMATIKA '86, Nyiregyháza, 1986 április 15-17., 423-435.