ETO: 51 CONFERENCE PAPER

Jeges Zoltán

Újvidéki Egyetem, Magyar Tannyelvű Tanítóképző Kar, Szabadka–
Óbudai Egyetem, Budapest
zjeges@live.com

A MATEMATIKAI MODELLEZÉS REJTÉLYEI

The mystery of mathematical modelling

A matematikai modellek a valós rendszerek és folyamatok teljes vagy részleges viselkedésének leírásai a matematika eszközeivel. A modellalkotás fontos segédeszközzé vált ahhoz, hogy a meglévő tudományos ismeretek alapján új ismereteket szerezzünk. A számítástechnika rohamos fejlődésének köszönhetően a modellalkotásra és a modellezésre alapozott kísérletezések a műszaki tudományok mindennapi eszköztárává váltak. Minden kidolgozott modell számos kompromisszum eredménye a valóság, az elméleti ismeretek és a gyakorlati alkalmazás között. A ma kutatója sokszor vakon megbízik a számítógépes eredményekben. Vajon mikor és milyen mértékben fogadhatók el a modellek alkalmazásával nyert eredmények? Hol vannak azok a rejtett tények és források, amelyek miatt kételkedhetünk, vagy bizalommal fogadhatjuk-e azokat az eredményeket, amelyeket a matematikai modellek számítógépes megoldásaival nyerünk?

Kulcsszavak: rendszerek, matematikai modellek, modellezés, számítástechnika, numerikus matematika

BEVEZETÉS

„A tudomány kísérlet arra, hogy a kaotikus, sokfajta érzéki tapasztalatot valamilyen egységes gondolatrendszerrel összefüggésbe hozza."

(Albert Einstein)

Ha egy villamosmérnök tanár krétát vesz a kezébe, és a villanymotorokról szeretne előadni, akkor így kezdi előadását: Adott egy villanymotor. Ezután írni kezd a táblára, a táblán pedig egy ehhez hasonló szimbólumokat tartalmazó szöveg jelenik meg:

$$i_s(t) = \sqrt{2}\; I_s \cos(\omega t + 90 - \psi)$$

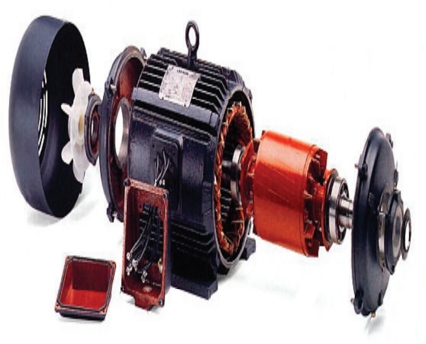
$$\Phi_s(t) = \Phi_s \cos(\omega t + 90 - \psi)$$

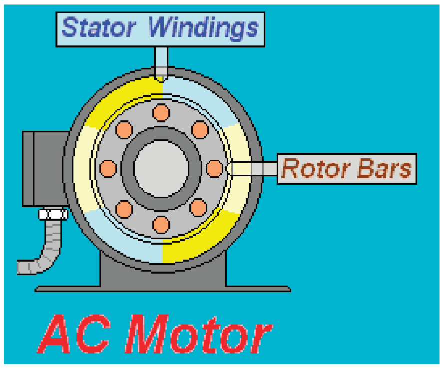
$$E_s(t) = N_s \frac{d\Phi_s(t)}{dt} = -N_s\, \Phi_s\, \omega \sin(\omega t + 90 - \psi)$$

$$E_s(t) = N_s\, \Phi_s\, \omega \sin(\omega t - 90 - \psi)$$

$$E_s = \frac{N_s\, \Phi_s\, \omega}{\sqrt{2}}$$

Ezen a hallgatók természetesen nem lepődnek meg, figyelik az egyenleteket, közben az agyukban egy kép és a képpel kapcsolatos folyamat jelenik meg.





1. ábra. A villanymotor részekre bontva és a benne lejátszódó folyamat animációja

Mindez nem azért történik, mert a tanár ellent akar mondani Shakespeare a *Makrancos hölgy* I. felvonásának 1. színében tett igen szellemes javaslatnak: *„Matematikát, metafizikát csak annyit, hogy gyomrodnak meg ne ártson."*

A természet- és műszaki tudományok területén a matematika, a modellezés és a matematikai modellezés a mindennapi munka eszköztárává vált.

MIÉRT VAN SZÜKSÉGÜNK A MODELLEZÉSRE, ÉS MI A MODELL?

A természetben és a társadalomban található és vizsgált folyamatok rendszerint mindig ismeretlen struktúrájúak, és ha nem is a 'black-box', de a 'gray-box' szemlélettel kezelendők. A róluk rendelkezésre álló ismeretek csak részben adnak képet a rendszerekről és a bennük lezajló folyamatokról.

A folyamatok részletes megismerésére gyakran valamilyen, a folyamatokhoz hasonló, de könnyen kezelhető másolatokat készítünk. Ezek a másolatok a modellek, létrehozásuknak a folyamata a modellezés.

„A tudomány nem próbál magyarázni, alig is próbál interpretálni, a tudomány főként modelleket állít fel."

(Neumann János)

Szó szerinti fordításban a latin modus, modulus szó mértéket, módot, módozatot jelent. A mindennapi életben azonban ennél jóval szélesebb körű az értelmezése.

A modell szóval jelöljük például:

– azt a rendszert, amely egy másik rendszerben (a modellezettben) végbemenő jelenséghez hasonló jelenséget valósít meg;
– egyes termékek mintáit (ruhamodell, gépmodell);
– közlekedési eszközök kicsinyített másár;
– épületek geometriailag hű kisebbítését, amelyek rendszerint szemléltető célt szolgálnak, és inkább kell makettnak nevezni;
– az olyan szemléltetőeszközöket, amelyek valamely nagyon nagy (vagy nagyon kis) objektum oktatási bemutatására szolgálnak (pl. a hidrogénatom modellje);
– irodalomban és képzőművészetben olyan személy, (ritkán) állat vagy tárgy, aki, amely minta (kép) valamely művészi alkotás megteremtéséhez;
– valaminek meghatározott méretarányban kicsinyített mása; makett;
– műszaki öntvény gyártásához használt, különféle anyagokból készített forma;
– mintadarab (ruházat) önálló tervezés alapján készült ruhadarab stb.

A modellezés széles körű alkalmazásához James Clark Maxwell következő észrevétele nyitott lehetőséget: „Megfigyelhető, hogy két különböző tudományban a változók olyan rendszere létezik, amelyek között a matematikai kapcsolat ugyanaz, tekintet nélkül arra, hogy a folyamatok fizikai lényege egészen különböző."

Fontos szerepe van a tanulás folyamatában is a modellek közötti hasonlóságnak. Erre utalnak Szent-Györgyi Albert szavai: „A diák csak akkor tud megérteni egy új fogalmat, egy új jelenséget, ha hasonlítani tudja valamilyen általa már ismert fogalomhoz, jelenséghez, és azt is megérti, hogy az »új« miben különbözik a már ismert »régi«-től."

A műszaki területen munkálkodó szakember általában elvont feladattípusokat vizsgál.

Ezek a feladattípusok részben a gyakorlatból származnak. A különböző vizsgált folyamatok bizonyos egyszerűsített matematikai leírást sugallnak, ezek az egyszerűsítések az áttekinthetőség, a számítástechnikai kezelhetőség, régebben ismert analógiák felhasználása érdekében rendszerint jól osztályozható, viszonylag egyszerű matematikai struktúrát adnak. Ezek a leírások a matematikai modellek.

Egy matematikai modell a matematikai egyenletek tetszőleges teljes és konzisztens halmaza, amelyet arra terveztek, hogy más tulajdonságok összességét, azok prototípusát írja le. A prototípus lehet fizikai, biológiai, társadalmi, pszichológiai vagy konceptuális (vázlatos) tulajdonság, vagy esetleg éppen egy másik matematikai modell.

Modellnek tekinthetjük azt az elképzelt, matematikailag leírható, idealizált, elvi másolatot is, amelyet egyenletek formájában adunk meg, ez a matematikai modell. A matematikai modell jelentőségét különösen az a körülmény emeli ki, hogy valóságos viszonyok között fizikailag meg sem valósítható folyamatok, vagy csak igen költségesen leképezhető folyamatok vizsgálatára alkalmas.

Néhány cél, amelynek érdekében matematikai modelleket szerkesztünk:

- arra keresünk választ, hogy mi fog történni a fizikai (biológiai stb.) világban, vagyis hogyan alakulnak az állapotok jellemzői bizonyos kezdeti és peremfeltételek előírása esetén;
- befolyásolni szeretnénk a további kísérleteket vagy megfigyeléseket;
- elő akarjuk mozdítani fogalmaink további fejlődését és megértését;
- tervezési célok elérhetőségét szeretnénk kivizsgálni stb.

A matematikai modellezés esetében rendszerint ismeretlen összefüggéseket tartalmazó, első látásra áttekinthetetlen rendszerekben lejátszódó folyamatokkal találkozunk, amelyekre rengeteg zavaró és szabályozó hatás, továbbá korlátozó tényező figyelembevételéről vagy figyelembe nem vételéről kell határoznunk.

A rendszeren bármilyen egyszerű vagy bonyolult fizikai, kémiai, biológiai vagy információs kapcsolatot értünk, ahol ezen különböző anyag- és mozgásformák elemei egymást befolyásolják.

A rendszerek vizsgálata során felmerülő feladatokat két alapvető osztályba sorolhatjuk:

1. a *rendszeranalízis* azt vizsgálja, hogy ha a rendszer struktúrája és paraméterei előre adottak, akkor ezekből kiindulva hogyan állapítható meg a rendszer viselkedése és tulajdonságai;
2. a *rendszerszintézis* azzal foglalkozik, hogy a rendszertől megkövetelt tulajdonságokból kiindulva, hogyan kell a rendszer struktúráját kialakítani és paramétereinek értékeit meghatározni.

A MODELLALKOTÁS FOLYAMATA

A matematikai modellezés feladata egy, a matematikában ismert szimbolikus nyelven megírt relációk halmazának megalkotása.

P

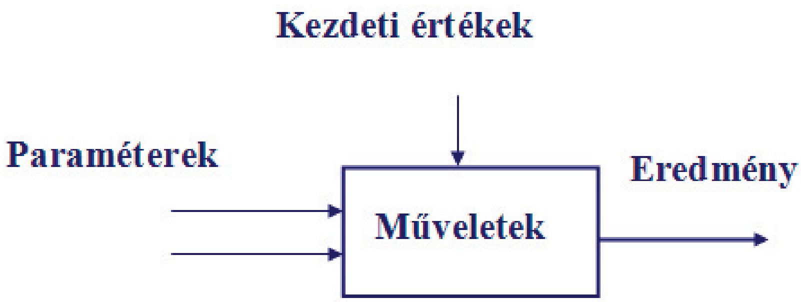
amely a rendszerben lejátszódó vizsgált folyamatot számunkra a legkedvezőbb módon írja le.

Mindenesetre a fizikai elméletek is kicserélődhetnek vagy megváltozhatnak (lásd pl. newtoni mechanika – einsteini mechanika), de tipikus, hogy a rendelkezésünkre álló matematikai apparátus nem alkalmas arra, hogy minden körülményt figyelembe vegyünk.

Mindezek a felismerések és tapasztalatok arra vezettek, hogy a modellt ne az örök igazság kifejeződésének, hanem egy „időleges valaminek", a helyzet kényelmes közelítésének tekintsük. Ezek szerint a modellt inkább jónak vagy rossznak, túlegyszerűsítettnek, túlbonyolítottnak, szépnek vagy csúnyának, hasznosnak vagy haszontalannak, mintsem *„igaz"-nak vagy „hamis"-nak* tartjuk.

Az általánosítás felé törekvő gondolkodás eredményei visszafelé is hatnak: bizonyos elméleti-matematikai osztályozásból leszűrődött feladattípusok kezelését az elméleti szakemberek kidolgozzák, a gyakorlati szakember – bízva az elméleti szakemberek tudásában – igyekszik sajátos feladatát e kész típustárba beilleszteni.

A matematikai modellek tulajdonképpen változókat és együtthatókat összekapcsoló absztrakt szerkezetek, azaz relációk. A valós rendszereket leíró matematikai modellek változói és együtthatói mérhetőek.



2. ábra. A matematikai modell blokkvázlata

Összetett jelenségek, folyamatok esetén igen gyakran nem lehet egzakt matematikai megoldásra jutnunk. Szükség van arra, hogy méréssel határozzuk meg a folyamat jellemzői közötti összefüggéseket. Ilyenkor válik nélkülözhetetlenné a hasonlósági módszer. A folyamatjellemzők nagy száma miatt szinte végtelen sok változat mérése látszik szükségesnek. Minden egyes rendszer látszólag különbözik a többitől, és így mindegyiket külön kellene mérni. A gyakorlatban jártas szakember feladata, hogy a gyakran költséges mérések mennyiségét elfogadható szintre hozza. Itt talán személyi tapasztalatról is beszámolhatok, hisz egy valós rendszeren történt méréskor – amelynek részkivitelezője voltam – négyszáz tonna kerozint égettünk el.

A matematikai modell a rendszer formális működési folyamatának csak az alapvetően jellemző törvényszerűségeit írja le, a lényegtelen tényezőket elhanyagolja. Az egyszerűsített modell már nem a valóságot, hanem a valódi rendszernek többnyire csak a főbb tulajdonságait tükrözi, egyszerűsített formában. A jól szerkesztett egyszerűsített modell alkalmas a jelenségek vizsgálatára, következtetések vonhatók le belőle a modellezett rendszer viselkedését illetően. A valóságot híven tükröző **P** operátorhalmaz (amelyet gyakorlatilag sohasem ismerünk) mellett így megjelenik egy már ismert, de leegyszerűsített operátorhalmaz, a P_1. Az eltérés operátorát Δ_1-gyel jelöljük. Az ideális és a rendelkezésre álló modellek viszonya egy multiplikatív forma alkalmazásával a következő lesz:

$$\mathbf{P}=\mathbf{P}_1(1+\Delta_1)$$

Az energia és az anyagi folyamatok a természetben folytonosak. A folytonosság leírására a matematikai analízis módszerei alkalmazhatók. A modellek így valamilyen differenciálegyenleti formát vesznek fel. A differenciálegyenletek megfejtése, megoldása úgynevezett analitikusan zárt formában nem mindig lehetséges. Itt hívja segítségül a matematika a számítógépet. A számítógépek – mint ahogy arra a nevük is utal – számokkal számolnak. A folytonossági jelleggel rendelkező differenciálegyenleteket kiszámítható formába kell átalakítani. Ezt a feladatot a matematika numerikus módszereinek alkalmazásával végezhetjük el. Hogy érzékeljük a feladatot, figyeljük meg, hogyan lehet a legegyszerűbben a differenciálhányadost kiszámítható alakra hozni:

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \approx \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}$$

Ez az egyszerűsítés egy újabb hibaforrást hoz a matematikai modellek alkalmazásának a területére. Ha az aprokszimáció hibaoperátorát Δ_2-vel jelöljük, a numerikus formát felvett modellt pedig $\mathbf{P}_2$-vel, akkor a további feldolgozásra váró modell és az eredeti közötti viszony a következőképpen írható le:

$$\mathbf{P}=\mathbf{P}_1(1+\Delta_1)=\mathbf{P}_2(1+\Delta_1)(1+\Delta_2)$$

A továbbiakban már programozható a feladat egy, a számítástechnikában ismert kódrendszert (programozási nyelvet) alkalmazva.

A számítógépek a véges automaták csoportjába tartoznak. Egy számot csakis korlátos bináris számrendszerben lehet leírni. Ha a matematikai modell együtthatói, kezdő értékei, valamint változói csak sok helyértékű számokkal írhatók le, akkor úgynevezett alul- vagy felülkerekítéseket kell alkalmazni. Ez újabb

3. ábra. Korszerű szuperszámítógép

hibaforrást jelent a modellkezelés és modellmegoldás folyamatában. Ha ennek a hibaforrásnak az operátorát Δ_3-mal, és a számítási folyamatba elindított matematikai modellt $\mathbf{P_3}$-mal jelöljük, akkor a szimulációban részt vevő modell és a valós rendszer között a következő összefüggés állapítható meg:

$$\mathbf{P = P_1 (1+\Delta_1) = P_2 (1+\Delta_1)(1+\Delta_2) = P_3 (1+\Delta_1)(1+\Delta_2)(1+\Delta_3)}$$

HIBAELEMZÉS

Az előbbi elemzések három inherens hibaforrásra hívták fel a figyelmet a modellalkotás és modellalkalmazás folyamatában:

– Δ_1 – a természet törvényszerűségeinek nem ismerését és az egyszerűsítéseknek az alkalmazását képviselő hibaoperátor,

– Δ_2 – a numerikus matematika alkalmazásával jelentkező hibaforrások operátora,

– Δ_3 – a számítógép-szerkezet felépítésének járulékos hibaforrása.

A természetet folyamatosan tanulmányozza az ember, de valószínűleg sohasem fogja elérni a tökéletességet. Így ez a hiba minden modellezés esetében fennáll.

A numerikus matematika állandó kutatási terület. Napról napra újabb és újabb eljárások csökkentik ennek a hibaforrásnak a kihatását.

A számítástechnika korunk talán legintenzívebben fejlesztett területe.

Mindez mellett a hibaforrások mindig jelen lesznek a modellezési folyamatokban. Ezért a modellezés nem ad soha pontos eredményeket. Eredményei becslések, amelyeknek az alkalmazásáról a témakör ismerője dönthet csak.

Illuzórikus lenne azt feltételezni, hogy a hibák majd semlegesítik egymást.

The mystery of mathematical modelling

Mathematical models are descriptions of complete or partial behaviour of real systems and processes, using mathematical concepts. Model forming has become an important device in gaining new knowledge based on existing scientific knowledge. By the fast development of computer science, experiments based on model forming and modelling have grown to be part of the everyday toolkit of technical sciences. Each developed model is a result of many compromises between reality, theoretical knowledge and practical application. The present-day researcher often blindly trusts the results gained by computer. The question is when and to what extent can the results obtained by applying mathematical models be accepted. Where are the hidden facts and resources that could make us doubt, or can we acknowledge the results obtained through mathematical models solved by computer?

Keywords: systems, mathematical models, modelling, information technology, numerical mathematics