

AZ ÁLTALÁNOS RELATIVITÁSELMÉLET MEGSZÜLETÉSE*

Illy József

Einstein Papers Project
California Institute of Technology, Pasadena, USA
illy.jozsef@upcmail.hu

„...csak az tudhatja, mit jelent évekig sötétben,
sejtések közt kutatni, feszült várakozással,
a bizakodás és a csalódás váltakozásával,
és végül az igazság feltárulásával,
aki maga is átélte.”
Albert Einstein

1914. december 1-én nagy összefoglaló cikk jelent meg *Max Abraham* tollából *Újabb gravitációelméletek* címmel (Abraham, 1914). Az elméleteket a gravitációs potenciál vektoriális, skaláris és tenzoriális mivolta szerint csoportosította. A vektoriális elméletek az elektrodinamikát tekintették modellnek, és *Hendrik A. Lorentz*hez hasonlóan az elektronelmélet felől közelítettek a gravitáció elméletéhez. A második csoportba Abraham két elméletét, *Gunnar Nordström* két elméletét és *Gustav Mie*, valamint *Erich Kretschmann* elméletét sorolta. A harmadik csoportot egyetlen szerző, *Albert Einstein* két elmélete alkotta. A gravitáció problémája „a levegőben lógott.”

* A téma legteljesebb földolgozása a négykötetes *The Genesis of General Relativity. Sources and Interpretations* (Renn, 2007), amelynek fejezeteit az Einstein-kutatás legnevesebb szakértői, Michel Janssen, John Norton, Jürgen Renn, Tilman Sauer és John Stachel írták. Magyarul lásd Vlagyimir P. Vizgin monográfiáját: *A modern gravitációelmélet kialakulása* (Vizgin, 1989).

A kezdet

„Amikor 1905-ben a speciális relativitáselmélet kimondta az összes ún. *inerciarendszer* egyenrangúságát a természettörvények leírásában – emlékezett vissza Einstein 1933-ban –, nagyon természetesen merült föl a kérdés: nem áll-e fönn a koordináta-rendszerek még átfogóbb egyenrangúsága. [...] Természetesen ismertem Mach álláspontját, amely szerint elképzelhető, hogy a tehetetlenség nem annyira az önmagában vett gyorsulással, mint inkább a világegyetem többi testéhez viszonyított gyorsulással szembeni ellenállás. Ez a gondolat elbűvölt ugyan, de új elmülethez semmilyen használható alapot sem szolgáltatott.” (Einstein, 1934, 249–250)

Johannes Stark 1907-ben felkérte Einsteint egy összefoglaló cikk megírására. „Amikor összegezni akartam a speciális relativitáselmélet eredményeit, [...] rájöttem – emlékezett vissza Einstein 1922-ben –, hogy míg a természet minden jelenségét lehet tárgyalni a speciális relativitáselmélettel, az egyetemes gravitáció törvényére nem lehet alkalmazni az elméletet. [...] a legnyugtalanítóbb a speciális relativitáselméletben az volt, hogy bár az elmélet szépen megmutatta a tehetetlenség és az energia kapcsolatát, a tehetetlen-

ség és a súly kapcsolata, azaz a gravitációs erőter energiája teljesen tisztázatlan maradt. Úgy éreztem, hogy a magyarázatot talán meg sem lehet találni a speciális relativitáselméleten belül.

Útem a székemben a berni Szabadalmi Hivatalban, amikor váratlanul belém hasított a gondolat: ha valaki szabadon esik, nem fogja érezni a saját súlyát. [...] [ezt] úgy magyarázhatjuk, hogy ez másik, új gravitációs erőternek tulajdonítható, amely ellensúlyozza a Föld gravitációs erőterét, más szóval a gyorsuló rendszer új gravitációs erőteret terem.” (Einstein, 1923)

A Starknak írt cikk utolsó fejezete elárulja, meddig jutott (Einstein, 1907).

Két koordináta-rendszert tekint: az egyik gyorsulva mozog gravitáció nélküli térben, a másik nyugszik, de homogén gravitációs erőterben. Mivel az első esetben a testek tehetetlensége szabja meg viselkedésüket, a másodikban pedig a testek súlya, és mivel a testek tehetetlen és súlyos tömege arányos egymással, nem tudunk különbséget tenni a két rendszer között, egymással egyenrangúak. Ezt Einstein majd 1912-ben *ekvivalenciaelvnek* fogja nevezni. A továbbiakban megmutatja, hogy gravitációs erőterben az órák lelassulnak, tehát a fény hullámhossza megnő (vöröseltolódás), és a fénysugár elhajlik a gravitáló tömeg felé.

A tehetetlen és a súlyos tömeg arányosságát *Eötvös Loránd* bizonyította be kísérletileg, még 1889-ben (Eötvös, 1893). „Abban, hogy a törvény szigorúan érvényes, komolyan nem kételkedtem, bár nem tudtam Eötvös azon finom kísérleteiről, amelyekről, ha jól emlékszem, csak később szereztem tudomást” – írta Einstein 1933-ban (Einstein, 1934, 251.).

Egy kicsit azonban mégis kételkednie kellett. 1912-ben a következő javaslattal for-

dult *Wilhelm Wienhez*: „Ha föltételezzük, hogy az ólom tehetetlen tömege annyival kisebb a (urán tömege – [mínusz, I. J.] a képződő hélium tömege) különbségnél, amennyi az urán energiájából képződő a-sugárzás mozgási energiája, de a súlyos tömeg egyensúlyban marad, akkor egy uráninga és egy ólom-inga relatív lengésideje különbségének ugyanazon nehézségi erőterben kb. 2×10^{-4} -nek kellene lennie, amit könnyen ki lehetne mutatni. [...] Ha be lehetne bizonyítani, hogy a $T_{\text{urán}}$ és $T_{\text{ólm}}$ lengési idő relatív különbsége nem haladja meg a 10^{-8} -t, akkor a tehetetlen és a súlyos tömeg arányossága kellően be lenne bizonyítva. Mit gondol, lehetne ilyen nagy kísérleti pontosságot elérni? Akárhogy is, ez nagyon fontos volna” (Einstein, 1912d).

Az aláírás után jutott eszébe egy érzékenyebb módszer, amit utóiratban részletezett. A Föld forgása révén fellépő centrifugális erő a testek tehetetlen tömegével arányos, súlyuk pedig súlyos tömegükkel. Függesszünk föl egy urántestet és egy ólomtestet egy rúd két végére. Ha súlyos tömegük nem volna egyenlő tehetetlen tömegükkel, forgatónyomaték lépne föl, amely 180 fokos elfordítás után ellenkező irányúvá válna. „Talán lenne olyan kedves – fejezi be Einstein az utóiratot –, hogy ezt az egyszerű kísérletet végrehajtja, amelynek *experimentum crucis* jelentősége lenne.”

Ebből tényleg az látható, hogy nem tudott Eötvös méréseiről, máskülönben nem találta volna föl újra az Eötvös-ingát több mint húsz évvel Eötvös után (Illy, 1989a). Arról sem tudhatott, hogy ugyancsak urán- és ólomingával *Leonard Southern*s már 1910-ben elvégezte ezt az összehasonlítást, és azt találta, hogy a két anyag tehetetlen és súlyos tömege arányainak különbsége nem nagyobb, mint 2×10^{-5} (Southern, 1910).

Wien válaszát nem ismerjük, de bizonyára fölvilágosította Einstein arról, hogy Eötvös megelőzte, mivel Einstein 1913-ban, Grossmannal írt cikkében már így ír: „Hogy a tehetetlen és a súlyos tömeg arányosságának törvénye legalább is rendkívüli pontossággal érvényes, Eötvös alapvető fontosságú kutatásából tudjuk” (Einstein – Grossmann, 1914a).

Közben ezt a kérdést megvitatta *Paul Langevin* is. „Langevin úr szóban arra hívta föl a figyelmemet, hogy ellentmondásba keveredünk a tapasztalattal e föltevés [a tehetetlen és a súlyos tömeg egyenrangúsága – I. J.] nélkül. Mivel a radioaktív bomlásnál nagy energiamennyiség szabadul fel, az anyag súlyos tömegének is csökkennie kell. Ha a súlyos tömeg nem csökkenne arányosan, akkor a különféle elemekből álló testek nehézségi gyorsulásának ugyanazon nehézségi erőterben megfigyelhetően eltérőnek kellene lennie” (Einstein, 1912c).

Einstein megpróbálkozott azzal, hogy a gravitációt a speciális relativitáselméleten belül tárgyalja. Meghagyta a gravitációs erőter Laplace-féle skaláris potenciálját, és a Poisson-egyenletet olyan idő szerinti differenciálhányaddal egészítette ki, amely kielégítette volna a speciális elmélet követelményeit. Elképzelése szerint a teljes fizikai erőter skaláris erőterből (gravitáció) és vektortérből (elektromágnesség) tevődött volna össze. Az anyagi pont mozgásegyenleteinek felállításánál azonban nehézségbe ütközött: az energia tehetetlensége miatt a test tehetetlen tömegének függenie kellett volna a gravitációs potenciáltól. A klasszikus mechanika szerint a test gyorsulása vertikális gravitációs erőterben nem függ sebességének vízszintes komponensétől, „az általam kidolgozott elmélet szerint pedig – írja – az esés gyorsulása függött volna a vízszintes sebességtől. Ez ellentmondott

annak a jól ismert ténynek, hogy gravitációs erőterben minden test egyenlő gyorsulással esik” (Einstein, 1934, 261.).

E nehézségek láttán Einstein elállt attól a szándékától, hogy a gravitációt a speciális elméleten belül tárgyalja. Az általánosított elmélet e „nulladik” változatáról csupán idézett szavai tanúskodnak, nem publikált róluk semmit. Feltehetően 1907 tavaszától december végéig dolgozott ezen az ötleten.

A sztatikus elmélet

1911 elején váratlan hír jelent meg a svájci sajtóban: Ferenc József császár kinevezte Einsteint a prágai Német Egyetem elméletifizika-professzorává (Illy, 1979). Ez volt élete első professzori állása. A Prágában 1911. március végétől 1912. július végéig eltöltött másfél év alatt írt kilenc cikk és előadás közül hat a gravitáció elméletével foglalkozik.

Az elsöben (Einstein, 1911) a gravitációs erőternek a fény terjedésére gyakorolt hatását vizsgálja. Már 1907-ben megmutatta ugyan, hogy a gravitációs potenciál úgy befolyásolja a fény terjedését, hogy a gravitációs erőterrel nem párhuzamosan terjedő fénysugár elhajlik, de ennek kimutatását akkor még reménytelennek tartotta. Most viszont eszébe ötlött, hogy ha nem a Föld nehézségi erőterét használnánk a fényelhajlás kimutatására, hanem a Napét, a kísérlet pozitív eredménnyel kecsegtetne. Ha ugyanis megfigyelnénk napfogyatkozáskor a Nap korongjához közeli, fényes csillagok állását, majd ugyanezen csillagokét, amikor éjjel láthatók, kimérhetnénk, van-e különbség a két kép között. Ha van, annak az az oka, hogy a Napot súroló fénysugarak elhajlottak a Nap felé, tehát látszólagos helyzetük eltávolodott a Naptól. Számításai szerint ennek az elhajlásnak 0,87 szögmásodpercnek kellene lennie.

Ezután féléves szünet következett, amelynek Max Abraham cikkei vetettek véget. Abraham skaláris gravitációelméletet dolgozott ki (Abraham, 1912a,b), amely ugyan a speciális relativitáselmélet Minkowski-féle négydimenziós formalizmusát használta, de megengedte, hogy a fény sebessége függjön a gravitációs potenciáltól. Nagy érdeme, hogy bevezette a gravitációs erőter energia-impulzus tenzorát, magyarázta a Merkúr keringésében fellépő anomáliát (igaz, csak a harmadát), megjósolta, akár csak Einstein, a fényelhajlást és a vöröseltolódást, sőt elsőként következtetett a gravitációs hullám létezésére és arra, hogy fénysebességgel kell terjednie.

Einstein fölvette a kesztyűt, és 1912 februárjában kidolgozott egy elméletet (Einstein, 1912a), amelyet azonban sztatikus gravitációs erőterre korlátozott, mivel a relativitáselmélet tetszőleges erőterre való kiterjesztését szinte kilátástalannak ítélte. Az elmélet lényege, hogy megteremti a klasszikus Poisson-egyenlet analogonját, amelyben a potenciál szerepét a fénysebesség játssza, valamint, hogy a homogen gravitációs erőterben mozgó anyagi pont mozgásegyenletéből kiindulva állítja föl a tetszőleges sztatikus erőternek megfelelő egyenleteket.

Következő cikkében levezette a sztatikus nehézségi erőterben érvényes Maxwell-egyenleteket és az alapvető elektrodinamikai összefüggéseket (Einstein, 1912b). Ezzel a második elméletével sem volt elégedett: belátta, hogy a gravitációs erőter egyenletei ellentétben állnak a mozgásegyenletekkel. Súlyos döntésre kényszerült: meg kellett engednie, hogy az ekvivalenciaelv csak végtelen kis tartományban legyen érvényes.

Abraham kapva kapott ezen a visszavonuláson: „Az, aki, mint a szerző, ismételten figyelmeltetett ezen elmélet szírénekére,

megelégedéssel üdvözlí, hogy végre maga a szerzője is meggyőződött tarthatatlanságáról” (Abraham, 1912c). Hát igen: Einstein először lemondott a fénysebesség állandóságáról, a speciális relativitás egyik pilléréről, azután – az általánosítás ürügyén – a másodikról, a Lorentz-kovarianciáról, és most az általános kovarianciáról is.

Einstein választ az *Annalen der Physik* közvetlenül Abraham cikke után közölte. Válaszának lényege: „A jelenlegi relativitáselmélet [...] mindig meg fogja tartani azt a jelentőségét, hogy a legegyszerűbb elmélete a konstans gravitációs potenciál fontos határesetében lejátszódó téridőbeli eseményeknek” (Einstein, 1912c). A gravitációval felmerült problémák miatt nem elvetni kell, hanem továbbfejleszteni, mint ahogy a Brown-mozgás fölfedezése miatt sem kellett elvetni a termodinamikát és hidrodinamikát.

Abraham még egyszer visszavágott (Abraham, 1912d), de Einstein a maga részéről befejezettnek nyilvánította a vitát (Einstein, 1912f).

Eközben svájci barátai nem nyugodtak bele, hogy Prága megelőzte Zürichet a professzori szék felajánlásában, és elintézték, hogy Einsteint egyetemi tanárrá nevezzék ki a zürichi Szövetségi Műszaki Főiskolára (ahogyan 1911 óta alma materét, a Polytechnikumot nevezték).

A relativitáselmélet általánosításának eddigi kudarca vitathatatlanul matematikai tudása hiányosságainak volt tulajdonítható, így első dolga volt, hogy erről tegyen.

A „Vázlat”

A matematikától már egyetemi éveiben húzódozott. „Természettudományos érdeklődésem nagyobb volt a matematikainál [...] matematikai intuíciónem volt elég erős hozzá, hogy határozottan meg tudtam volna

különböztetni az alapvetően fontosat a többi, többé-kevésbé elhanyagolható tudásanyagtól” (Einstein, 1949, 14–15.). A négydimenziós tárgyalásmóddal csak lassan békélt meg. *Hermann Minkowski* első relativitáselméleti cikkének (Minkowski, 1908) olvastán így fakadt ki: „[...] ez a munka matematikai szempontból meglehetősen nagy kívánalmakat támaszt az olvasóval szemben: mi nem tartjuk fölöslegesnek, hogy ezeket a fontos egyenleteket a továbbiakban [...] elemi úton vezessük le” (Einstein – Laub, 1908). A Prágában írt utolsó cikkében másik okot is találhatunk arra, hogy miért nem volt teljesen kibékülve a matematikával. „A gravitációt is fölölélő relativitáselmélet egyenleteinek invariánsaknak kell lenniük a gyorsulással és a forgással szemben is. Az oda vezető út azonban nagyon röggös [...] a téridő-koordináták elvesztik egyszerű fizikai jelentésüket” (Einstein, 1912c).

Mi a téridő-koordináták egyszerű fizikai jelentése? Az, hogy hossz- és időmérés eredményei. A hossz méréshez merev mérőrúdra van szükségünk, az idő méréshez szinkronizálható órákra. Miként lehet a merev test relativisztikus dinamikáját megalkotni? Ameddig csak egyenes, egyenes vonalú mozgásról van szó (azaz a speciális relativitáselméletéről), mindössze a Lorentz-kontrakciót kell figyelembe venni. Mihelyt azonban bármiféle gyorsulásról, például görbe vonalú mozgásról, forgásról, ellentmondásba ütközünk.

A probléma *Max Born* 1909-es előadásában merült föl (Born, 1910). Szerinte két pont véges távolságát ugyan nem lehet kifejezni koordinátakülönbségként, de két végtelen közeli pontét már lehet, így „infinitezimális merevséget” lehet definiálni. Az előadás után Born, Einstein és *Arnold Sommerfeld* azon morfondírozott, hogy a merev testet a speciális relativitáselmélet szerint nem lehet egyen-

letes forgásba hozni: „Az egyenletesen forgó merev test nagyon fontosnak tűnik számomra, – írta Einstein Sommerfeldnek 1909. szeptember 29-én – azért, hogy ki tudjam terjeszteni a relativitási elvet egyenletesen forgó rendszerekre ahhoz hasonló gondolatmenettel, amelyet az egyenletesen gyorsuló mozgásnál alkalmaztam a *Jahrbuch für Radioaktivität und Elektronik*-ba írt cikkem utolsó fejezetében” (Einstein, 1907). Ugyanezen a napon nyújtott be *Paul Ehrenfest* egy cikket ugyanerről a témáról (Ehrenfest, 1909), és ebből megtudhatjuk, miért volt jelentős ez a kérdés Einstein számára. Tekintsünk egy tengelye körül forgó merev hengert. Ha úgy fogjuk föl, hogy koncentrikus körökben elhelyezkedő elemekből áll, minden ilyen körnek, így a kerületének is össze kell húzódnia a Lorentz-kontrakció miatt. A henger sugara viszont nem fog összehúzódni, mivel mozgása merőleges a hosszára. Ha pedig a sugár nem változik, nem változhat a kerület sem. Ezt az ellentmondást később Ehrenfest-paradoxonnak nevezték el.

Az 1909–1910-ben e témában kibontakozott vitában *Vladimir Varičak* abban látta a megoldás útját, hogy a Lorentz-kontrakciót látszólagosnak jelentette ki. *Waldemar von Ignatowsky* azt javasolta, hogy a testek igazi méretétül a nyugalmi állapotukban végzett mérés eredményét kell elfogadni, máskülönbben csak virtuális méretet kaphatunk. *Max Planck* a relativisztikus rugalmasságtan felépítésében látta a megoldásra vezető utat. *Theodor Kaluza* pedig észrevette, hogy Euklidész geometriájában rejlik a probléma gyökere, és a hiperbolikus (Bolyai–Lobacsevszkij-féle) geometriát javasolta megoldásként (Kaluza, 1910). A vitában rajtuk kívül részt vett többek között *Arnold Sommerfeld*, *Fritz Noether* és *Tullio Levi-Civita*.

A relativisztikus merev test meghatározásának csődje a Helmholtz-féle „gyakorlati geometria” csődje is volt, azé a felfogásé, amely, szemben az axiomatikus felfogással, a geometria végső előfeltételét a fizikai merev testek viselkedésében látta, s amellyel Einstein még egyetemi évei alatt megismerkedett.

Az Ehrenfest-paradoxont Einstein a következőképpen használta föl a relativitáselmélet általánosítására. Tekintsünk egy nyugvó vonatkoztatási rendszerben lévő korongot. Mérjük meg a kerületét egységnyi hosszú mérőrúddal. Ha a korongot forgásba hozzuk, a nyugvó megfigyelő számára a kör kerülete nagyobb lesz, mivel a Lorentz-kontrakció miatt az egységnyi mérőrúd rövidebb lesz, a sugara viszont változatlan marad, mivel a sugárirányban elhelyezett mérőrúd hossza nem változik, mert hosszára merőlegesen mozog. Így a korong kerületének és átmérőjének hányadosa nagyobb lesz, mint π . „Ezzel már bebizonyítottuk, hogy az euklidészi geometria törvényei nem lehetnek pontosan érvényesek a forgó korongon és így általában [az ekvivalenciaelv miatt – I. J.] gravitációs erőterben” (Einstein, 1917). A forgó korong közepére és peremére helyezett órák járása is különbözik egymástól, így nemcsak a hosszúság nem definiálható úgy, mint a speciális elméletben, de az idő sem.

Prágában történt, hogy hosszú sétáikon Einstein bevallotta matematikus kollégájának, *Georg Pick*nek azokat a matematikai nehézségeket, amelyekkel szembetalálta magát a relativitáselmélet általánosítása során. Már felismerte, hogy az elmélet matematikai problémái és *Carl Friedrich Gauss* görbült felületekre vonatkozó elmélete között hasonlóság áll fenn (Einstein, 1922, 535.). Ezzel az elmélettel már az egyetemen találkozott *Carl Geiser* előadásain, „amelyek a pedagógiai művészet

mesterművei voltak, és később sokat segítettek az általános relativitáselmélettel való küszködésem során” (Einstein, 1955 előtt, II.). Pick már akkor javasolta, hogy a megfelelő eszköz *Gregorio Ricci-Curbastro* és *Tullio Levi-Civita* olasz matematikusok „abszolút differenciálkalkulusa” lenne (Frank, 1949, 103.).

Amint tehát Einstein visszatért Prágából Zürichbe, barátjához, *Marcel Grossmann*hoz fordult: „Grossmann, segíts, különben megbolondulok!” (Kollros, 1956, 27.). Grossmann ekkor már a Polytechnikum matematikaprofesszora volt, érdeklődési területe pedig a nem-euklidészi geometria, nem volt reménytelen tehát, hogy tud segíteni.

Grossmann már többször megmentette a bukástól. „Éppen azon tulajdonságoknak volt bővében, amelyekben én szűkölködtem: gyors felfogás és rendszeresség minden tekintetben. – írta Einstein – Nemcsak, hogy látogatta az összes előadást [...], hanem olyan kiválóan jegyzetelte is őket, hogy füzeteit, átgépelés után azonnal ki lehetett volna adni. A vizsgákra való felkészülésre kölcsönadta ezeket a füzeteket, amelyek a mentőövet jelentették számomra” (Einstein, 1956 előtt, II.). Einstein mentségére szóljon, hogy az előadások helyett otthon azokat a fizikai műveket bújta, amelyek túl frissek voltak ahhoz, hogy bevonuljanak a tananyagba.

Mivel Grossmann Budapesten született, helyénvaló, hogy életének e korai szakaszára kitérjek (Fehér – Hajdú, 1995; Graf, 2014; Lukács, 1979).

1868-ban Grossmann apja, *Jules Grossmann* ellátogatott Budapestre, és látva a Kiegyezés utáni gazdasági föllendülést, úgy határozott, hogy itt folytatja vállalkozását. Először vasüzletet nyitott, majd 1882-ben, társával megalapította az Első Magyar Gazdasági Gépgyárat a Külső Váci út 7. szám alatt.

Fia, Marcel, 1878. április 9-én született. Elemi iskoláit és a középiskola öt osztályát Budapesten végezte. A „Budapesti V. kerületi Állami Főreáliskola” (a Berzsényi Dániel Gimnázium egyik elődje a Markó utcában) évi értesítőiben 1889-től 1893-ig a II–V. osztályban található Grossmann (vagy Groszmann) Marczell, a jövőben egyetemi matematikatanár, mennyiségtanból következetesen hármast kapott, ami mindössze eggyel volt jobb, mint az akkori legrosszabb jegy, a négyes. Magyar nyelvből viszont szépen „feljött” a kis svájci: 1890-ben még csak hármast érdemelt, de 1893-ban már egyesre vizsgázott!

A család 1893-ban költözött vissza Zürichbe. Marcel Bazelban fejezte be a középiskolát, majd Zürichben, a Polytechnikumon, matematika–fizika szakos tanári diplomát szerzett évfolyamtársával, Einsteinnel együtt.

Grossmann a *Georg Riemann*, *Elwin Bruno Christoffel*, Ricci-Curbastro és Levi-Civita által kidolgozott ún. abszolút differenciálkalkulusban találta meg Einstein számára a megoldást, egyezően Pick javaslatával.

Einstein nekilátott, hogy megtanulja a részben Grossmann által általánosított tenzorszámítást. Ez irányban tett erőfeszítéseit az 1912 augusztusa körül megkezdett ún. *Zürichi jegyzetfüzet*ből követhetjük nyomon (Einstein, 1912e).

Az együttműködés eredményéről írt cikket 1913. május 28. előtt fejezték be (Einstein – Grossmann, 1914a). Június 25. előtt jelent meg, először különlenyomatként, majd 1914. január 30-án a *Zeitschrift für Mathematik und Physik*ben. 1913. szeptember 9-én pedig előadták a Svájci Természetkutató Társaság évi közgyűlésén. Einstein a relativitáselmélet általánosításának fizikai szempontjait foglalta össze, Grossmann a matematikáját. Ez az elmélet, amelyet a cikk címének első szava

után *Vázlatnak* (*Entwurf*) neveznek, már minden lényeges jegyében hasonlít a két év múlva megjelenő végleges elmülethez: matematikája az abszolút differenciálkalkulusra alapul; a nehézségi erőteret metrikus tenzor képviseli, és a gravitációnak más fizikai folyamatokra gyakorolt hatását általánosan kovariáns egyenletek határozzák meg. De, amiért az elméletet vázlatnak nevezték, a nehézségi erőteret meghatározó egyenletek csak lineáris koordinátatranszformációval szemben bizonyultak kovariánsoknak.

Alighogy megjelent a cikk, Einstein küldött egy különlenyomatot Ernst Machnak azzal a megjegyzéssel, hogy amennyiben majd sikerül az 1914-es napfogyatkozásakor megfigyelni a fényelhajlást, és ezzel alátámasztani az elméletet, „az Önnek a mechanika alapjaira vonatkozó zseniális kutatásai [...] ragyogó igazolásra találnak,” mivel az elmélet szerint, ha egy véges tömegű gömbhéjat gyorsítunk, a belé zárt testre gyorsító erő, ha pedig forgatjuk, Coriolis-erő hat. Einstein itt Mach azon állítására gondol, hogy a testek tehetetlensége a világegyetem tömegeihez viszonyított gyorsulásuk eredménye, nem pedig, mint Newton állította, az abszolút térhez viszonyított gyorsulásuké (Einstein, 1913a).

Visszatérve a „Vázlat” nem teljes kovarianciájára, felmerült a kérdés, vajon tovább kell-e kutatnia, hogy megtalálja az általánosan kovariáns téregyenleteket, vagy, ahogy Lorentznek augusztus 16-án írta, ez „a gyűlöletes sötét pont” nem hiányosság, hanem annak bizonyítéka, hogy ez lehetetlen.

A „lyukérv”

1913. augusztus 15-én Einstein ez utóbbi mellett talált érvet. Be lehet ugyanis bizonyítani, írta Lorentznek másnap (Einstein, 1913b), majd Ehrenfestnek november elején (Ein-

stein 1913c), hogy olyan általánosan kovariáns gravitációs téregyenletek nem is létezhetnek, amelyek az erőteret az anyagtenzorból teljesen meghatározzák.

Az érvelést (Einstein, 1914a) még sikerült Grossmannal írt cikkük megjelenése előtt elküldenie a folyóirat szerkesztőségének, így annak függelékeként jelent meg 1914 januárjában. Ebben megmutatja, hogy ki lehet választani a négydimenziós sokaságból egy részt, amelyben koordinátatranszformációval a többi rész gravitációs tenzorától eltérő tenzort lehet előállítani, habár az anyagtenzor ugyanaz marad. Ez ui. azt jelenti, hogy ha általános kovarianciát tételezünk föl, az anyag nem határozza meg egyértelműen a gravitációs erőteret. Mivel a gondolatmenetben azt tételezi föl, hogy ebben a kiválasztott részben az anyagtenzor zérus, ezt az érvelést „lyukérvenek” (*hole argument, Lochbetrachtung*) szokás nevezni.

1913 őszén Einstein részt vett a Német Természetkutatók és Orvosok Társaságának bécsi ülésén, és ott is összefoglalta addigi eredményeiket (Einstein, 1913d). A jelen levő Gustav Mie sértődötten jegyezte meg, hogy az ő elméletét meg sem említette (Einstein et al., 1913), de Gunnar Nordströmét igen. „Azért nem tértem ki Mie úr elméletére – választotta Einstein –, mert a tehetetlen és a súlyos tömeg ekvivalenciája nincs benne szigorúan kidolgozva.” A vita folytatásában megjegyezte: „Abban látom az egyik legfontosabb útnmutatót az elmélet kidolgozására, hogy a tehetetlen és a súlyos tömeg azonossága oly jelentős közelítésben bizonyult igazoltnak. Egyáltalán, az a szükség volt az indok, hogy foglalkozzam a gravitáció problémájával, hogy ez az azonosság mélyebb magyarázatot kapjon, emellett Machnak a tehetetlenség relativitásáról vallott véleménye is. Így érthe-

tő, hogy távol állnak tőlem az olyan elméletek, amelyek az én kiinduló meggyőződésemnek nem felelnek meg.”

Nordström elméletét nagyra becsülte. Ennek 1914 februárjában adta jelentős tanúbizonyságát, amikor *Adriaan Fokkerrel* együtt írt cikkében (Einstein – Fokker, 1914) megmutatta, milyen közel áll egymáshoz a *Vázlat* és Nordström elmélete: elegendő, ha a koordináta-rendszerre (a *Vázlat* kikötésein túl) azt is kikötjük, hogy a fénysebesség legyen állandó, máris megkapjuk Nordström (második) elméletét (Nordström, 1913).

Visszatérve a bécsi találkozóra, az előadások vitájában részt vett *Zemplén Győző*, a budapesti Műszaki Egyetem elméletifizika-professzora. Egy kérdésre válaszolva elmagyarázta Eötvös Loránd ingás kísérletét, majd hozzátette: míg Eötvös a súlyos tömegnek az anyag minőségétől való függetlenségét 2×10^{-7} pontossággal igazolta, *Pekár Dezső* és *Fekete Jenő* 1909-es mérései ezt az értéket 10^{-8} -ra javították (Eötvös, 1910).

Az általánosan kovariáns elmélet

Einstein a következő cikkét már Berlinben írta. 1913. november 22-én ugyanis a Porosz Tudományos Akadémia értesítette, hogy megválasztotta rendes tagjának, s ezért Berlinbe költözött.

Az új cikkben megmutatta, hogy a *Vázlatban* igenis van bizonyos nemlineáris transzformációkkal szembeni kovariancia, ha nem is tetszőleges transzformációval szembeni (Einstein – Grossmann, 1914b).

Az egymást követő és egymást helyesbítő cikkeinek sora láttán Einstein elhatározta, hogy rendet teremt. „Az utóbbi években részben magam, részben barátommal, Grossmannal együtt kidolgoztam a relativitáselmélet egyfajta általánosítását. E kutatás során

heurisztikus segítségként fizikai és matematikai követelmények tarka egyvelegét használtam, úgyhogy nem könnyű az elméletet e munkákból formális matematikai szempontból áttekinteni és jellemezni” (Einstein, 1914b). A cikk hosszú és meglehetősen bonyolult. A fő problémában viszont, abban ugyanis, hogy milyen transzformációkkal szemben kovariáns az elmélet, nem hozott újat.

Forrás híján csak sejteni lehet, hogyan küszködött tovább Einstein e problémával. 1915 őszére több hibát is talált ebben a cikkben, többek között azt, hogy az elmélet forgással szemben nem volt kovariáns, és hogy a Merkúr-anomália a megfigyelt 45 ± 5 szögmásodperc helyett 18 másodpercnek adódott. „Miután elvesztettem minden bizalmamat a korábbi elmélet eredményei és módszere iránt, világosan beláttam, hogy csak az általános kovariáns elmülethez, azaz a Riemann-kovariáns-hoz való csatlakozás hozhat megnyugtató megoldást” – írta Arnold Sommerfeldnek (Einstein, 1915). Lorentznek további részleteket árult el. „A mostani egyenleteket lényegében már három évvel ezelőtt számításba vettük Grossmannal, aki felhívta figyelmemet a Riemann-tenzorra. Mivel azonban nem tudtam, mi a formális jelentősége, nem láttam tisztán, és nem tudtam igazolni a megmaradási tételeket. Azt sem tudtam felismerni, hogy Newton elmélete első közelítésben benne van: sőt azt hittem, hogy az ellenkezője várható. Így őserdőben találtam magam!” (Einstein, 1916a)

Erőfeszítése végül sikerrel járt. Az általános kovariáns relativitáselméletet 1915. november 4-én adta elő a berlini Akadémián (Einstein, 1915c). November 11-én utánaküldött egy rövid cikket, amelyben az elméletet logikusabb alakra hozta annak a feltevésnek a bevezetésével, hogy a molekuláris gravitációs

erőtér jelentős alkotórésze az anyagnak (Einstein, 1915e). November 18-án pedig arról számolt be az Akadémián, hogy az új elmélettel 43 szögmásodpercet kapott a Merkúr-anomáliára, ami a megfigyelt 45 ± 5 -tel összevetve „teljes egyezés” (Einstein, 1915i). Végül november 25-én benyújtott egy cikket, amelyben lényegében megismétli november 4-i cikke levezetését, de most azon speciális kikötés nélkül, amellyel a koordináta-rendszert eddig leszűkítette (Einstein, 1915j).

„Általánosan kovariáns gravitációs egyenletek, a perihéliummozgás kvantitatív megmagyarázása, a gravitáció szerepe az anyag fölépítésében. Ámulni fogsz.” – írta büszkén Michele Bessonak. „Mégfeszített erővel dolgoztam. Csoda, hogy kibírtam.” (Einstein, 1915g)

Így 1915. november 11. és december 1. között megjelent az a négy cikk, amelynek századik évfordulóját ünnepeljük.

Tényleg csak ezeket a cikkeket kell ünnepelnünk? Másképp fölvetve, Einstein elméletét ünnepeljük vagy az általános relativitáselméletet?

A kérdés jogos, mivel az általános relativitáselmületről, egy egységes térelméleti próbálkozás részeként, november 20-án Göttingában is elhangzott egy előadás, de nem Einstein tartotta, hanem a világ akkori legnagyobb matematikusa, David Hilbert (Hilbert, 1915b).

Einstein vagy Hilbert?

Az előadás, majd a belőle készült cikk része volt Hilbert azon programjának, hogy a geometria mintájára a fizikát is axiomatizálja. Ezzel mintegy könnyíteni akart a megértésében, mivel, mint sokszor idézett mondása tartja, „a fizika túl nehéz a fizikusoknak”.

Függetlenül találták meg az általános kovariáns gravitációs egyenleteket? Erről a

Hilbertet és Einsteint egyaránt ismerő kortársak és a későbbi tudománytörténészek sokat vitáztak, ami nem utolsósorban annak volt tulajdonítható, hogy nem ismerték Einstein idevágó levelezését. Az azóta megismert dokumentumok fényében ma már teljesebb képet kaphatunk arról, mi is történt.

Mindenekelőtt Hilbert elismerte Einstein addigi eredményeit. „Einstein erős problémát látása, valamint a megoldásukra készült éles elméjű módszerei és azok a mélyenszántó gondolatok és az az eredeti fogalomalkotás, amelynek révén Mie fölépítette elektrodinamikáját, új utat nyitott a fizika alapjainak kutatásában. A következőkben – az axiomatikus módszert követve – lényegében két egyszerű axiómából szeretném fölláttani a fizikai alapegyenletek új rendszerét, amelyek eszményien szépek, s amelyekben, úgy hiszem, egyszerűen megtalálható Einstein és Mie problémájának megoldása” (Hilbert, 1915b), azaz mind a gravitációnak, mind az anyag szerkezetének magyarázata. Más szóval, amit alkotott, egységes térelméletnek szánta. A gravitációs erőtér az elsődleges, az elektromágneses erőtér ennek származéka, az anyag pedig ez utóbbi erőtér sajátos formája, sűrűsödése, szingularitása. Hilbert matematikai eszköztára megegyezik Einsteinéval, de a Hamilton-elv jelentősebb szerepet játszik benne. Hilbert említi is Einstein valamennyi novemberi cikkét, és megállapítja, hogy „az így kapott gravitációs differenciálegyenletek, úgy hiszem, egybecsengenek azokkal, amelyeket Einstein az utóbbi időben nagyszabású általános relativitáselméleti cikkeiben fölláttott.” Az elsőbbség kérdését ezzel el is lehetne dönteni Einstein javára, de előbb tisztázni kell, hogyan olvashatta Hilbert november 20-án Einstein december 1-én megjelent cikkét.

Einstein először 1915 nyarán találkozott Hilberttel, amikor hat kétórás előadást tartott Göttingában „a most már letisztult gravitációelméletéről, és az az öröm ért, hogy sikerült az ottani matematikusokat teljesen meggyőzőnöm” – írta *Heinrich Zanggernek* (Einstein, 1915a). Mivel az első jelét annak, hogy kételkedni kezdett a *Vázlat* helyességében, szeptember 30-án adta (Einstein, 1915b), így Göttingában a *Vázlatot* kellett hogy megvitassák.

November 7-én azonban már el tudta küldeni Hilbertnek a „kijavított” elmélet korrekcióját, azzal a megjegyzéssel, hogy a hibákat mintegy négy héttel azelőtt fedezte föl (Einstein, 1915d). Ez jól egyezik azzal, amit Freundlichnek írt.

Hilbert válaszában meghívta Einsteint a Göttingai Matematikai Társulatban november 16-án tartandó előadására, amelyen saját elméletét előadja. „Egy általános matematikai tétel következtében az elektrodinamikai egyenletek [...] a gravitációs egyenletek matematikai következményének bizonyulnak, úgyhogy a gravitáció és az elektrodinamika valójában egyáltalán nem különbözik egymástól” – írta (Hilbert, 1915a). Einstein nem tudott elmenni, de megjegyezte: „Nagyon érdekel a kutatása, mivel már oly gyakran törtem rajta a fejem, hogyan verjek hidat a gravitáció és az elektromágnesség közé” (Einstein, 1915f). Einstein korai egységes térelméleti próbálkozásai azonban kívül esnek e cikk keretein.

Kissé meglepő, hogy november 18-án Einstein már ismerte Hilbert elméletét, sőt meg is állapította róla, hogy „Az Ön által megadott rendszer [...] pontosan megegyezik azzal, amit én az utóbbi hetekben találtam, és az Akadémiának átadtam” (Einstein, 1915h). A *Vázlat* nehézségei abból adódtak, folytatta, hogy nem tudta fölismerni, hogy „az általa-

nosan kovariáns egyenletek a newtoni törvény általánosításai, mégpedig egyszerű és természetes általánosításai”. Büszkén jelentette be, hogy aznap, november 18-án mutat be az Akadémián egy munkát, amelyben a Merkúr perihéliumának mozgását számította ki. „Ez eddig egyetlen gravitációelméletnek sem sikerült” – tette hozzá. Ez a cikk gyorsan készült, és ennek az az oka, hogy a számítás módszere már készen állt: ugyanígy dolgozott barátjával, Michele Bessoval 1913 júniusában. Akkor a *Vázlat* alapján próbálták kiszámítani a Merkúr-anomáliát, de eredményül csak 17 szögmásodpercet kaptak (Einstein – Besso, 1913).

Csak találgatni lehet, hogyan szerzett Einstein tudomást november 18-án arról, amit Hilbert két nappal azelőtt és két nap múlva adott elő. Valószínű, hogy Hilbert elküldte valamelyik előadásának kéziratát. Mivel pedig Einstein az elmélet általánosan kovariáns változatát november 25-én adta elő, megvolt a lehetősége, hogy Hilbert cikkét fölhasználja, anélkül, hogy hivatkozott volna rá. Hilberté az elsőbbség?

Amint Hilbert cikkének első, decemberi kefelevonatából kiderül, a lényeges kérdésekben oly mértékben eltér az 1916 márciusában megjelent végleges cikktől, hogy az Einsteinnek elküldött kéziratából Einstein novemberben nem tudott volna semmit sem fölhasználni.

Hilbert egyik munkatársának kései visszaemlékezése szerint (Straus, 1982 előtt) az Einstein november 18-i levelében fölsorolt eredményeket Hilbert úgy értelmezte, hogy Einstein a prioritását igyekszik hangsúlyozni, és burkoltan azzal vádolja, hogy göttingai előadásait használta föl anélkül, hogy Einsteint említette volna. Hilbert erre szabadkozó levelet írt Einsteinnek: az előadásokról

akaratlanul feledkezett meg. Sajnos, ez a levél nem maradt fenn.

Einstein meglegedetten írta ugyan Heinrich Zanggernek, hogy a Merkúr-anomália sikeres kiszámítása, a csillagoknál megfigyelhető vöröseltolódás, valamint a csillagok által előidézett fényelhajlásra a *Vázlathoz* képest kapott kétszeres érték, mind jelentősen alátámasztja az elméletet, és hogy az elmélet „semmihez sem hasonlíthatóan szép”, de nem tudta elhallgatni csalódását sem. „Egyetlen kolléga értette meg tényleg, és ő ügyesen igyekszik »honosítani« [...] Személyes tapasztalatom szerint soha nem tanultam meg jobban, mekkora az emberi hitványosság, mint ennek az elméletnek és annak kapcsán, ami vele összefügg.” (Einstein, 1915k)

Hilbert nem vitatta a prioritást, pedig Einstein egyik cikkében sem említi az ő eredményeit. Mégis, „[v]an köztünk bizonyos lehangoltság – írta Hilbertnek –, aminek az okát nem akarom boncolgatni. Küzdöttem a vele kapcsolatos keserűség érzése ellen, és teljes sikerrel. Ismét zavartalan barátsággal gondolok Önre, és kérem, Ön is kísérelje meg velem kapcsolatban ugyanezt. Igazán kár lenne, ha két ilyen helyre legény, aki előbbá-nyászott valamit ebből a hitvány világból, nem lenné örömet egymásban” (Einstein, 1915m). Szép gesztus, annál is inkább, mert nem tudhatta, hogy Hilbert a decemberi kefelevonatban már több, Einstein elsőbbségét elismerő kijelentést hozzáadott a kéziratához.

Ez a békülékeny hang azonban nem jelentette azt, hogy Hilbert elméletével is ki lett volna békülve. „Szükségtelenül speciális, ami az „anyagot” illeti – írta Ehrenfestnek (Einstein, 1916b) –, szükségtelenül bonyolult, fölépítésében nem alapos (= gaussi) (az Übermensch szemfényvesztése a módszerekkel való kódosítás révén).”

Sajátos helyet foglal el Hendrik A. Lorentz az általános elmélet kialakulásában (Illy, 1989b). Mondhatjuk, hogy „együttműködött” Einsteinnel abban az értelemben, hogy személyes találkozásai és levelezésük során hosszasan vitatták az elmélet alapvető kérdéseit, mindenekelőtt a kovariancia lényegét, valamint a téridő és az éter kapcsolatát. A kovariancia mindkettejük számára vitathatatlanul fontos volt. Míg azonban Einstein úgy vélte, hogy a kovarianciát nem kell tovább magyarázni, Lorentznek egy törvény kovarianciája azt jelentette, hogy a mért és mért testekben végbemenő változások egymást pontosan kompenzálják, és ezt a kompenzálást egy olyan közeg garantálja, amelynek belső állapotát mind a benne levő testek, mind saját energiája változtatja. Ez a közeg az éter. Lorentz szerint a testeknek van igazi méretük és ritmusuk (idejük): az éterben nyugvó vonatkoztatási rendszerben mért méret és ritmus.

Lorentz néhány cikkében már 1914-ben és 1915-ben közzétette véleményét a relativitáselmélet kiterjesztéséről. Legfontosabb azonban az a cikksorozata, amelyben kifejti, hogyan képzei el ő az elméletet (Lorentz, 1916–1917). A cikkek 1916 és 1918 közt jelentek meg, így már nem az elmélet születésénél bábáskodtak, hanem az újszülött további nevelésében.

Utóhang

Végül is hogyan „győzött” Einstein elmélete ebben a népes mezőnyben?

Hilbert mindig is elismerte, hogy az általános relativitáselmélet alap gondolata Einsteintől származik, habár egyik megjegyzése kissé éles: „Minden göttingai utcagyerek jobban tudja a négydimenziós geometriát, mint Einstein, ennek ellenére mégis Einstein vé-

gezte el a munkát, nem a matematikusok” (Reid, 1970, 142).

Kis idő múltán Einstein tárgyilagosabban ítélte meg két nagy kollégája munkáját. „Az utóbbi időben H. A. Lorentznek és D. Hilbertnek sikerült az általános relativitáselméletet különösen áttekinthető alakra hoznia azáltal, hogy egyenleteit variációs elvből vezette le” (Einstein, 1916c).

Mie tovább levelezett és vitatkozott Einsteinnel (Illy, 1992). Végül mindketten földalták. A nézetkülönbség alapját Einstein abban látta, hogy „az általános relativitáselmélet szerint az egyenletekben szereplő mennyiségek és a mérhető mennyiségek közti kapcsolat sokkal közvetettebb, mint a szokásos elméletekben” (Einstein, 1918).

Abraham haláláig elutasította a relativisztikus programot. „Nincs semmilyen ellenvetése az einsteini elmélet logikai zártága ellen – nyilatkozta 1920-ban, három évvel halála előtt –, és elismeri, és csodálja mint az általános relativitás gondolatának egyedül lehetséges megvalósítását. Ez a gondolat azonban számára nagyon ellenszenves, és reméli, hogy a csillagászati megfigyelés megcáfolja, és visszaadja a jó öreg, abszolút éter becsületét” (Born – Laue, 1923, 52.).

Végül is Max Plancknak kell igazat adnunk: „Valamely új tudományos igazság nem úgy szokott győzelemre jutni, hogy az ellenfelek meggyőződnek róla, és kijelentik, hogy megtértek – írta 1945-ben –, hanem inkább úgy, hogy az ellenfelek lassanként kihalnak, és a felnövekvő nemzedék már eleve hozzászokik az igazsághoz” (Planck, 1982, 55.).

Kulcsszavak: *általános relativitáselmélet, gravitációelmélet, fizikatörténet, Albert Einstein, David Hilbert, Marcel Grossmann*

AZ EINSTEIN-ÖSSZKIADÁS EDDIG MEGJELENT KÖTETEI

(*The Collected Papers of Albert Einstein* – CPAE) elérhető a *Digital Einstein Papers* webhelyen (URL1). A kiadás történetét az első kötet előszava mondja el.

HIVATKOZOTT

EINSTEIN-DOKUMENTUMOK

Einstein, Albert (1907): *Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen*. CPAE 2/47.

Einstein, Albert (1909): Arnold Sommerfeldnek, szeptember 29. CPAE 5/179.

Einstein, Albert (1911): *Über den Einfluß der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes*. CPAE 3/23.

Einstein, Albert (1912a): *Lichtgeschwindigkeit und Statik des Gravitationsfeldes*. CPAE 4/3.

Einstein, Albert (1912b): *Zur Theorie des statischen Gravitationsfeldes*. CPAE 4/4.

Einstein, Albert (1912c): *Relativität und Gravitation. Erwiderung auf eine Bemerkung von M. Abraham*. CPAE 4/8.

Einstein, Albert (1912d): Wilhelm Wiennek, július 10. CPAE 5/413.

Einstein, Albert (1912e): *Research Notes on a Generalized Theory of Relativity*. CPAE 4/10.

Einstein, Albert (1912f): *Bemerkung zu Abrahams vorangehender Auseinandersetzung „Nochmals Relativität und Gravitation“*. CPAE 4/9. 22.

Einstein, Albert (1913a): Ernst Machnak, június 23. CPAE 5/448.

Einstein, Albert (1913b): Hendrik A. Lorentznek, augusztus 16. CPAE 5/470.

Einstein, Albert (1913c): Paul Ehrenfestnek, november 7. elött. CPAE 5/481.

Einstein, Albert (1913d): *Zum gegenwärtigen Stande des Gravitationsproblems*. CPAE 4/17.

Einstein, Albert (1914a): *Bemerkungen*. CPAE 4/26.

Einstein, Albert (1914b): *Die formale Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*. CPAE 6/9.

Einstein, Albert (1915a): Heinrich Zanggernek, július 7. CPAE 8/94.

Einstein, Albert (1915b): Erwin Freundlichnak, szeptember 30. CPAE 8/123.

Einstein, Albert (1915c): *Zur allgemeinen Relativitätstheorie*. CPAE 6/21.

Einstein, Albert (1915d): David Hilbertnek, november 7. CPAE 8/136.

Einstein, Albert (1915e): *Zur allgemeinen Relativitätstheorie* (Nachtrag). CPAE 6/22.

Einstein, Albert (1915f): David Hilbertnek, november 15. CPAE 8/144.

Einstein, Albert (1915g): Michele Bessonak, november

17, CPAE 8/147.

Einstein, Albert (1915h): David Hilbertnek, november 18. CPAE 8/148.

Einstein, Albert, (1915i): *Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie*. CPAE 6/24.

Einstein, Albert (1915j): *Die Feldgleichungen der Gravitation*. CPAE 6/25.

Einstein, Albert (1915k): Heinrich Zanggernek, november 26. CPAE 8/152.

Einstein, Albert (1915l): Arnold Sommerfeldnek, november 28. CPAE 8/153.

Einstein, Albert (1915m): David Hilbertnek, december 20. CPAE 8/167.

Einstein, Albert (1916a): Hendrik A. Lorentznek, január 1. CPAE 8/177.

Einstein, Albert (1916b): Paul Ehrenfestnek, május 24. CPAE 8/220.

Einstein, Albert (1916c): *Hamiltonsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie*. CPAE 6/41.

Einstein, Albert (1917): *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie (Gemeinverständlich)*. Vieweg, Braunschweig. CPAE, 6/42, 479. Idézet az 1963-as magyar fordításból, 83.

Einstein, Albert (1918): *Dialog über Einwände gegen die Relativitätstheorie*. CPAE 7/13.

Einstein, Albert (1919): Joseph Petzoldnak, augusztus 19. CPAE 9/93.

Einstein, Albert (1922): Előszó *A speciális és általános relativitás elmélete* cseh kiadásához. CPAE 6/42, 535.

Einstein, Albert (1923): *How I Created the Theory of Relativity*. CPAE 13/399.

Einstein, Albert (1934): Einiges über die Entstehung der allgemeinen Relativitätstheorie. In: *Mein Weltbild*. Querido, Amsterdam. 249–250.

Einstein, Albert (1949): Autobiographisches. In: *Albert Einstein Philosoph-Scientist*. Schilpp, Paul Arthur (ed.) Tudor, New York. 2–95.

Einstein, Albert (1955 elött): Autobiographische Skizze. In *Helle Zeit–dunkle Zeit: in memoriam Albert Einstein*. Seelig, Carl (Hrsg.). Europa, Zürich–Stuttgart–Wien, 9–17.

Einstein, Albert – Besso, Michele (1913): *Zürichi jegyzetfüzet*. CPAE 4/14.

Einstein, Albert et al. (1913): *Diskussion*. CPAE 4/18.

Einstein, Albert – Fokker, Adriaan (1914): *Die Nordströmsche Gravitationstheorie vom Standpunkte des absoluten Differentialkalküls*. CPAE 4/28.

Einstein, Albert – Grossmann, Marcel (1914a): *Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation*. CPAE 4/13.

Einstein, Albert – Grossmann, Marcel (1914b): *Kova-*

- rianzeigenschaften der Feldgleichungen auf die verallgemeinerte Relativitätstheorie gegründeten Gravitationstheorie.* CPAE 6/2.
- Einstein, Albert – Laub, Jakob (1908): *Über die elektromagnetischen Grundgleichungen für bewegte Körper.* CPAE 2/51.
- IRODALOM**
- Abraham, Max (1912a): Zur Theorie der Gravitation. *Physikalische Zeitschrift.* 13, 1–4.
- Abraham, Max (1912b): Das Elementargesetz der Gravitation. *Physikalische Zeitschrift.* 13, 4–5.
- Abraham, Max (1912c): Relativität und Gravitation. Erwiderung auf eine Bemerkung des Hrn. A. Einstein. *Annalen der Physik.* 38, 1056–1058.
- Abraham, Max (1912d): Nochmals Relativität und Gravitation. Bemerkungen zu A. Einsteins Erwiderung. *Annalen der Physik.* 39, 444–448.
- Abraham, Max (1914): Neuere Gravitationstheorien. *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik.* 11, 470–520.
- Born, Max (1910): Über die Definition des starren Körpers in der Kinematik des Relativitätsprinzips. *Physikalische Zeitschrift.* 11, 233–234.
- Born, Max – Laue, Max von (1923): Max Abraham. *Physikalische Zeitschrift.* 24, 49–53.
- Ehrenfest, Paul (1909): Gleichförmige Rotation starrer Körper und Relativitätstheorie. *Physikalische Zeitschrift.* 10, 918.
- Eötvös Loránd (1893): Über die Anziehung der Erde auf verschiedene Substanzen. *Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn.* 8, 65–68.
- Eötvös Loránd (1910): Bericht über geodätische Arbeiten in Ungarn, besonders über Beobachtungen mit der Drehwage. In: *Verhandlungen der vom 21. bis 29. September 1909 in London und Cambridge abgehaltenen sechszehnten allgemeinen Konferenz der Internationalen Erdmessung.* Theil I, Sande Bakhuyzen, H. G. van de (Hrsg.) Reiner, Berlin.
- Fehér Péter – Hajdú Mária (1995): Einstein „matematikus” – Marcel Grossmann. *Fizikai Szemle.* 14, 221–224.
- Frank, Philipp (1949): *Einstein. His Life and Times.* Cape, London
- Graf, Claudia (2014) (Grossmann unokája): magánközlemény.
- Hilbert, David (1915a): Einsteinnek, 1915. november 13. CPAE 8/140.
- Hilbert, David (1915b): Die Grundlagen der Physik. Erste Mitteilung. *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse.* 395–407.
- Illy József (1979): Albert Einstein in Prague. *Isis.* 70, 76–84.
- Illy József (1989a): Einstein und der Eötvös-Versuch. Ein Brief Albert Einsteins an Willy Wien. *Annals of Science.* 46, 417–422.
- Illy József (1989b): Einstein Teaches Lorentz, Lorentz Teaches Einstein: Their Collaboration in General Relativity, 1913–1920. *Archive for History of Exact Sciences.* 39, 247–289.
- Illy József (1992): The Correspondence of Albert Einstein and Gustav Mie, 1917–1918. In: Eisenstaedt, Jean – Cox, A. J. (eds.): *Studies in the History of General Relativity.* Birkhäuser, Boston–Basel–Berlin, 244–259.
- Kaluza, Theodor (1910): Zur Relativitätstheorie. *Physikalische Zeitschrift.* 11, 977–978.
- Kollros, Louis (1956): Erinnerungen eines Kommilitonen. In: Seelig, Carl (Hrsg.): *Helle Zeit–dunkle Zeit: in memoriam Albert Einstein.* Europa, Zürich–Stuttgart–Wien, 17–31.
- Lorentz, Hendrik A. (1916–1917): On Einstein’s Theory of Gravitation, I–IV. In: Lorentz, Hendrik A.: *Collected Papers.* Nijhoff, Amsterdam, 1960, 9. kötet.
- Lukács Béla (1979): Aki Einsteint matematikára tanította: Marcel Grossmann (1878–1936). *Természet Világa.* 10, 43.
- Mie, Gustav (1912–1913): Grundlagen einer Theorie der Materie. I–III. *Annalen der Physik.* 37, 511–534; 39, 1–40; 40, 1–66.
- Minkowski, Hermann (1908): Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Klasse Mathematik und Physik.* 53–III.
- Nordström, Gunnar (1913): Zur Theorie der Gravitation vom Standpunkt des Relativitätsprinzips. *Annalen der Physik.* 42, 533–554.
- Planck, Max (1982): Tudományos önéletrajz. In: Planck, Max: *Válogatott tanulmányok.* (ford. M. Zemplén Jolán) Gondolat, Budapest, 55.
- Reid, Constanz (1970): *Hilbert.* Springer, Berlin
- Renn, Jürgen (ed.) (2007): *The Genesis of General Relativity. Sources and Interpretations.* Springer, Berlin
- Straus, E. G. to Abraham Pais, (1982 előtt) in Pais, Abraham: „*Subtle Is the Lord . . .*” *The Science and the Life of Albert Einstein.* Oxford University Press., 261.
- Southern, Leonard (1910): A Determination of the Ratio of Mass to Weight for a Radioactive Substance. *Proceedings of the Royal Society of London.* A, 84, 324–344. Vizgin, Vlagyimir P. (1989): *A modern gravitációelmélet kialakulása.* (ford. Illy József) Gondolat, Budapest
- URL: <http://einsteinpapers.press.princeton.edu>