EGY NEVEZETES MATEMATIKATÖRTÉNETI ÉVFORDULÓ
400 ÉVE JELENT MEG AZ ELSŐ LOGARITMUSTÁBLÁZAT

Deák Ervin

a matematikai tudomány kandidátusa, ny. tudományos főmunkatárs,
MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet
Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar Matematikai Intézet
deak.ervin@freemail.hu

0. A logaritmus keletkezéstörténetének megértéséhez legfontosabb, hogy szem előtt tartsuk: *Ez a történet nem a logaritmus fogalmával kezdődött, hanem a logaritmustáblázatok szerkesztésével*, a numerikus számolás megkönnyítésére. Ez a mondat abszurdnak tűnhet, hiszen a mai matematikai felfogás szerint például a 10-es alapú logaritmustáblázat éppen a 10-es alapú logaritmusfüggvény táblázata, eszerint tehát a logaritmustáblázat fogalma és megszerkesztése feltételezi a logaritmusfüggvény fogalmát és apparátusát. Az első „logaritmustáblázatok" idejében – a 17. század elején – és még azután is sokáig azonban nem volt megalapozott logaritmusfogalom, és nem beszéltek (a mai értelemben) egy logaritmusrendszer alapszámáról (bázisáról); ezek nem is lettek volna lehetségesek, hiszen feltételezik a valós számtestet.

Azok a bizonyos táblázatok sem voltak logaritmustáblázatok a szó mai értelmében, bár kezdettől fogva így nevezték őket. A következőkben arra is kísérletet teszünk, hogy megmagyarázzuk ezeket a *látszólagos* ellentmondásokat. Ezzel

- történetileg korrekt képet nyerhetünk erről a tárgykörről,
- mélyebb betekintéshez jutunk a logaritmus mai fogalmába, és
- ezt a tisztánlátást didaktikailag és az ismeretterjesztésben is értékesíthetjük.

1. (a) A logaritmus történetének volt egy sajátos *előtörténete*. Ez abból az igényből fakadt, hogy a numerikus számolást megkönnyítsék. Ez az igény találkozott azzal a fölfedezéssel, hogy bizonyos goniometriai azonosságok lehetővé teszik a szorzás visszavezetését egyszerűbb aritmetikai műveletekre.

(b) Hangsúlyozni kell, hogy nem trigonometriáról, hanem goniometriáról van szó. A trigonometria: háromszögtan, ahol a szögfüggvényekkel háromszög-feladatokkal kapcsolatban, azokra vonatkoztatva foglalkozunk. A goniometria: a szögfüggvények vizsgálata önmagukban, háromszög-geometriai problémaháttér nélkül.[1]

[1] A megkülönböztetés a mai matematikában fogalmilag sem ennyire kategorikus, és nyelvileg sincs teljesen egységes szóhasználat. Nekünk azonban itt célszerű

(c) A 15. században egy kettős önállósulási folyamat zajlott a trigonometria területén.

Egyrészt maga a trigonometria vált le – önálló matematikai tudományágként – az asztronómiáról, amelynek sok-sok évszázadon át lényegében segédtudománya volt. Ilyen sajátos, önálló diszciplínaként jelent meg a trigonometria például *Johannes Müller* (*Regiomontanus*[2]) műveiben, továbbá – Regiomontanusra támaszkodva – *Johann Werner*[3] munkásságában.

Másrészt a trigonometriából is kezdett leválni a goniometria, egyre inkább önállósulva.

(d) Azt a felismerést, amelyben a goniometria összekapcsolódott a logaritmus előtörténetével, Johann Werner közölte 1514-ben (éppen száz évvel Napier első „logaritmustáblázatának" megjelenése előtt); ezzel bevezette a *prosztaferézist*[4] – más szóval a *prosztaferetikus módszert.*

2. (a) A módszer lényege ez: a szögfüggvénytáblázatokat bizonyos goniometriai azonosságok felhasználásával arra lehet használni, hogy a szorzást az összeadás, kivonás és felezés együttesére vezessük vissza. Erre alkalmas azonosság például:

$$\cos x \cdot \cos y = \tfrac{1}{2} \cdot [\cos(x+y) + \cos(y-x)].$$[5]

(b) A prosztaferézis rendkívül gyorsan terjedt el Európában, főleg asztronómiai számítások segédeszközeként, és igen nagy volt a népszerűsége. Mégis különös az a tény, hogy a logaritmikus számolás – amely szintén nagyon hamar ismertté vált, és sokan használták – csak százötven évvel az első „logaritmustáblázatok" megjelenése után, a 18. század

ilyen élesen fogalmaznunk, mert csak így tudjuk jól érzékeltetni azt a fontos történeti tényt, hogy a goniometria a trigonometria fejlődésének csak egy későbbi szakaszában – a 15–16. században – jelent meg a matematika *önálló* területeként.

[2] Johannes Müller (német, 1436–1476), ismertebb, latinos nevén Regiomontanus (azaz „Királyhegyi", szülővárosa, a frankföldi Königsberg után, latinosan) a 15. századi tudósok élvonalába tartozott. Elsősorban a csillagászati számítások, a csillagászati megfigyelés és a csillagászati műszerek fejlesztésében tűnt ki, de vezető szerepe volt a matematika és a naptárszámítások területén is. Elméleti és megfigyelési eredményei arra indították, hogy kételkedni kezdjen a geocentrikus világképben.
Matematikai munkásságából a témánk vonatkozásában különösen kiemelendő, hogy a trigonometriát nem csak az asztronómia segédtudományaként kezelte. Öt kötetben foglalta össze, rendszerezte, bővítette és fejlesztette új eredményekkel a trigonometriát: *De triangulis omnimodis libri quinque* (Öt könyv mindenfajta háromszögekről) című műve csak 1533-ban jelent meg (évtizedekkel korábban készült el). Egyik úttörője volt az algebrai szimbolika és az arab (indiai) számírás használatának. Tudományos pályájának érdekes magyar vonatkozásai: *Vitéz János* (a nagy humanista esztergomi érsek) barátjaként éveket töltött Esztergomban; három évig Mátyás király udvarában dolgozott; a Pozsonyi Egyetem tanára is volt.

[3] Johann(es) Werner (német, 1468–1522) matematikus, földrajztudós és asztronómus. A szferikus trigonometriát és annak földrajzi és csillagászati alkalmazásait kezdeményező és úttörő módon dolgozta ki. Regiomontanus kézirataiból kiindulva továbbfejlesztette a trigonometriát. A szferikus koszinusz-tétel tárgyalásánál segédeszközként használta a $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$ azonosságot a szorzás összeadásra, kivonásra és felezésre való visszavezetésére; ezzel a prosztaferézis (lásd 4.) egyik előfutárává vált.

[4] A prosztaferézis (görög eredetű) szó jelentése: „összeadás és kivonás".

[5] Példa: 1. Számítsuk ki a $0{,}6394 \cdot 0{,}4779$ szorzatot négy tizedesre.

1. $x = \cos^{-1} 0{,}6394 = 502529°$, $y = \cos^{-1} 0{,}4779 = 61{,}4516°$ (x, illetve y olyan szög, amelynek a koszinusza 0,6394, illetve 0,4779).
2. $x+y = 111{,}7045°$, $y-x = 11{,}1987°$;
3. $\cos(x+y) = -0{,}3698$, $\cos(y-x) = 0{,}9809$;
4. $\tfrac{1}{2} \cdot [\cos(x+y)+\cos(y-x)] = 0{,}3055$
   (pontosan: $0{,}6394 \cdot 0{,}4779 = 0{,}30556926$)

közepén tudta teljesen és végleg kiszorítani a prosztaferézist a kétségtelen gyakorlati előnyei ellenére.[6]

(c) A prosztaferézisnek természetesen csak az alapgondolatát fogalmaztuk itt meg. Ahhoz, hogy ez jól működő és általánosan használható gyakorlati eszközzé váljék, sok technikai fogásra és kiegészítésre volt szükség. (Az (a) alatti azonosság például önmagában és közvetlenül még nem teszi lehetővé 1-nél nagyobb abszolút értékű számok szorzatának előállítását.) Az ilyen technikai részletekre azonban ebben az eszmetörténeti áttekintésben nem térhetünk ki.

3. (a) *A logaritmus ezen előtörténetének az a fő tanulsága számunkra, hogy a történeti fejlődés másként – bizonyos tekintetben éppen fordítva – ment végbe, mint ahogyan a mai iskolai-egyetemi matematika bemutatja és felépíti a logaritmus témakörét.*

(b) Tekintsük át először a mai gondolkodási szerkezetet.

(b_1) Az első lépcsőfok: Az élen a logaritmus definíciója áll (a valós számtest keretében), amit képletnyelven így írhatunk: $a^{\log_a b} = \mathrm{b}$ (vagyis: $\log_a b$ – olvasd: „a alapú logaritmus b" – az a kitevő, amelyre a-t emelve a hatvány értéke b). Itt a és b tetszőleges pozitív szám lehet, $\log_a b$ értékei között pedig minden valós szám előfordul.

(b_2) A második lépcsőfok: Észrevesszük, hogy $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$, amihez újból alaposan ki kell használni a valós számtest apparátusát.[7]

(b_3) A harmadik lépcsőfok: Észrevesszük, hogy egy $\log_a x$-függvény értéktáblázatát *(b_2)* alapján arra használhatjuk, hogy a numerikus számolásban a szorzást az összeadásra vezessük vissza.

(c) A történeti megismerési folyamatnak viszont ez a szerkezete:

(c_1) Az első lépcsőfok: Feltámad az igény a numerikus számolás könnyítésére azáltal, hogy a „nehéz" szorzás helyett lényegében csak a „könnyebb" összeadást kelljen végezni.

(c_2) A második lépcsőfok: a prosztaferézis. Ez annak a fölfedezése, hogy az egyébként már meglévő szögfüggvénytáblázatokat hogyan lehet a mondott célra felhasználni.

Ezek azonban nem közvetlenül, hanem közvetve – s így körülményesen – szolgálják a mondott célt. Ezért felmerül a probléma, hogy miként lehet közvetlenül a gyakorlati célra szerkesztett „számolótáblázatokat" előállítani. Ennek több lehetősége van.

(c_3) A történetileg első ilyen kihasznált lehetőséget *nem* a logaritmusfüggvények értéktáblázatai nyújtották. Ez lehetetlen lett volna a 17. század elején, hiszen feltételezi a valós számtestet, annak teljes apparátusával, ami a 19. század végének algebrai és halmazelméleti fogalmi eszközrendszerét és gondolkodásmódját igényli.

(d) Tömören összefoglalva: A mai felfogásban a logaritmusfüggvények az elsődlegesek (ez elméleti matematikai téma), a gyakor-

[6] Érdekes, hogy a 20. században – az analóg számítógépek konstruálása területén – újjáéledt a prosztaferézis alapgondolata: Olyan azonosságokat, mint például $u_1 \cdot u_2 \equiv \frac{1}{4} \cdot [(u_1+u_2)^2 - (u_1-u_2)^2]$,
$\sin x \cdot \sin y \equiv \frac{1}{2} \cdot [\cos(x+y) - (\cos(x-y)]$
(de főleg az elsőt) használták pontosan arra a célra, amit a prosztaferézis kitűzött, ti. a szorzás összeadásra, kivonásra és felezésre való visszavezetésére.

[7] Az azonosság magyarázata:
$a^{\log_a xy} = xy = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a x}$.
(Az első két egyenlőség a logaritmus fogalmából – lásd (b_1) – következik; a harmadik pedig messzemenő – és egyáltalán nem egyszerű – általánosítása annak a nagyon elemi ténynek, hogy $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, ha n és m pozitív egész számok.

lati eszközök, a logaritmustáblázatok – vagyis az ilyen függvények értéktáblázatai – pedig azokból a függvényekből származnak, tehát másodlagosak.

A történetileg eredeti felfogásban – éppen fordítva – a „számolótáblázat" az elsődleges (nem mint elméleti matematikai, hanem mint gyakorlati eszköz), másodlagos pedig az az elméleti matematikai probléma: miféle függvények értéktáblázatai lehetnek „számolótáblázatok"?

4. (a) A történet tehát az olyan *számolótáblázatokkal* kezdődött, amelyek azt tették lehetővé – ahogyan a mai logaritmustáblázatokkal kapcsolatban mondani szokás –, hogy „a szorzást összeadásra vezessük vissza": A táblázatnak két oszlopa van, és két bal oldali érték bal oldali szorzatának a megfelelő jobb oldali értékek jobb oldali összege felel meg. Egy ilyen táblázat – mai matematikai fogalommal kifejezve – egy olyan f függvény értéktáblázata, amely eleget tesz az $f(xy) = f(x) + f(y)$ *additív függvényegyenletnek;* az ilyen függvényt most *additív függvénynek* fogjuk nevezni.[8]

Ez teljesen *gyakorlati indítékú* kezdet. A *matematikai* kérdés az, hogy mik ennek a függvényegyenletnek a megoldásai, vagyis hogy melyek az additív függvények.

(b) Ma számunkra kézenfekvő a válasz: a logaritmusfüggvények mindenesetre ilyenek (lásd 3.(b_2).)

(c) *A logaritmus korai történetében azonban a logaritmusfogalom és a logaritmusrendszer bázisának fogalma egyáltalán nem is merült fel!*[9]

Mai gondolkodásunkban – vagyis a matematikatudomány mai állapotából visszatekintve – két lehetséges magyarázata van ennek.

1. Nem érezték szükségét annak, hogy a számolótáblázatok készítését fogalmilag alátámasszák, és nem akartak ebből a nagyon gyakorlati dologból matematikai elméletet építeni.
2. Ha viszont ezt akarták volna, akkor sem lett volna lehetséges – a ma ismert módon –, hiszen a logaritmus mai fogalma a hatványozás általános fogalmán alapszik (a valós számtesten belül), márpedig ennek a fogalomnak nem voltak a birtokában, és a valós szám fogalma hiányában nem is alkothatták volna meg.[10]

(d) Az 1. magyarázatot erősíti a prosztaferézis története (lásd 1. és 2.). A 2. magyarázatot is fontos történelmi tények támasztják alá. Az a felfogás, hogy a logaritmus hatványkitevő, csak a 18. században – vagyis legalább száz évvel az első ún. logaritmustáblázatok megjelenése után – bukkant fel, és csak *Leonhard Euler*[11] műveiben – e század közepén és harmadik negyedében – kristályosodott ki világosan; az igazi megalapozást azonban csak a 19. század utolsó harmadában, a valós számtest fogalmának korrekt felépítése keretében nyerte el ez a felfogás.

(e) Mindezek után most már elodázhatatlan, hogy leírjuk: mégis miféle táblázatok

[8] Ezek az elnevezések nem egyértelműek a mai matematikában. Szokás pl. az $f(xy) = f(x) + f(y)$ függvényegyenlet megoldásait is additív függvényeknek nevezni.

[9] Ne tévesszen meg bennünket az a már említett körülmény, hogy a „logaritmus" szót a kezdettől fogva használták! (Csak éppen nem azt értették rajta, amit ma így nevezünk, hanem egy számolótáblázat azon oszlopában lévő értékeket, ahol az összeadást végezzük a táblázat használata során.)

[10] A mai matematika a valós számokon túl a komplex számokra is kiterjeszti a logaritmus fogalmát.

[11] Leonhard Euler (svájci, 1707–1783) a 18. század legjelentősebb matematikusa és a matematika egész történetének egyik legjelentősebb alakja.

voltak azok a bizonyos „számolótáblázatok", és hogyan szerkesztették azokat? A következőkben erről fogunk szólni.

5. A számolótáblázatok (amelyeket akkor logaritmustáblázatoknak neveztek, de – a szó mai értelmében – fogalmilag nem azok voltak[12]) előállításának történetileg legfontosabb (szinte kizárólagos) módszere az volt, hogy szembeállítottak egy mértani és egy számtani sorozatot.

A módszert először – eltérve a történeti tényektől – kissé egyszerűsítve mutatjuk be. Ezzel két célt követünk:

- könnyebben átláthatóvá tesszük az alapgondolatot, és
- könnyebben érthetővé tesszük az ilyen táblázatok és az „igazi" logaritmustáblázatok viszonyát.

6. (a) Tekintsük tehát az

x: $1, q, q^2, q^3, \ldots, q^k, \ldots \ (q > 1)$

$f(x)$: $0, \delta, 2\delta, 3\delta, \ldots, k\delta, \ldots \ (\delta > 1)$

szerkezetű táblázatokat (amelyek végtelen sokan vannak, és a q, δ paraméterek értékének megválasztásában különböznek egymástól).[13] Az ilyen táblázattal reprezentált f függvény triviálisan teljesíti az $f(xy) = f(x) + f(y)$ függvényegyenletet, hiszen csak pozitív egész kitevőkkel való hatványozást használunk.

(Az a gondolat, hogy ki kellene használni az $x^r \cdot x^s = x^{r+s}$ azonosságot, ahol r és s természetes számok, akár *Arkhimédészre* is visszavezethető, tehát abban az időben már egyáltalán nem számított újdonságnak; lásd még a 8.-hoz, illetve 10.-hez fűzött, *John Napierről*, illetve *Jost Bürgiről* szóló lábjegyzetet.)

(b) A táblázat úgy „működik", hogy a felső sorozat (x-értékek) két eleme szorzatához az alsó sorozatban ($f(x)$-értékek) a megfelelő elemek összege tartozik (például $q^2 \cdot q^3 = q^5 = q^{2+3}$).

(c) Fontos szempont, hogy a táblázat annál „sűrűbb", minél kisebbre – azaz 1-hez minél közelebb – választjuk a $q > 1$ szám értékét. Így érjük el ugyanis, hogy a majdani gyakorlati munkában előadódó szorzásműveletek tényezőit – vagy legalább azokhoz „közeli" számokat – valóban megtaláljuk a felső sorozat elemei között.

7. A mi szempontunkból természetesen elsőrendűen fontos kérdés, hogy az ilyen f függvény logaritmusfüggvény-e a „modern" értelemben, és ha igen, akkor mi a bázisa.

Mármost – mai szemmel nézve – a 6.(a) alatti táblázat valóban logaritmusfüggvény, mégpedig a $\sqrt[\delta]{q}$-alapú logaritmusfüggvény értéktáblázatának „kivonata".

8. A Napier[14]-féle táblázatoknak (ezek a ténylegesen első „számolótáblázatok") ennél bonyolultabb volt a szerkezetük, a modern logaritmushoz való viszonya és a használata egyaránt.

[12] A *logaritmus* szót a *logosz* (λογος = szó, beszéd, [ki]számítás, értelem, viszony) és *aritmosz* (αρισμος = sor, szám, számlálás) görög szavakból rakták össze.

[13] A történeti szituációnak megfelelően q és δ helyébe racionális számokat, sőt (véges) tizedes törteket képzeljünk. (A 17. század elején már *eléggé* általánosnak mondható a tizedes törtek használata; ahhoz pedig, hogy teljesen általánossá váljék, éppen a logaritmustáblázatok gyors elterjedése járult hozzá lényegesen.)

[14] John Napier (olykor Neper-nek is írják, 1550–1617), skót földbirtokos. Már régóta érlelődött benne a „logaritmustáblázat" gondolata (biztos, hogy ő és Jost Bürgi is értékes ösztönzést nyert ehhez Michael Stifel kiváló német matematikus fél évszázaddal korábbi kezdeményezéseiből), amikor (1614-ben) megjelentette első – hétjegyű – *Mirifici Logarithmorum canonis descriptio…* (A logaritmusok csodálatos kánonjának leírása …) című „logaritmus-táblázatát". Később,

(1) A szerkezet a következő:

$$b, bq, bq^2, bq^3, \ldots, bq^k, \ldots \ (b > 0, q > 0)$$
$$0, \delta, 2\delta, 3\delta, \ldots, k\delta, \ldots \ (\delta > 0)$$

($k = 0, 1, 2, \ldots$). Ez abban tér el a 6.(a) alatti – nem eredeti, hanem értelmezési céllal konstruált – táblázatszerkezettől, hogy Napier választásában $b \neq 1$ és q nem okvetlenül > 1. Napier választása az első táblázatában $q = 1\!-\!10^{-7}$, a másodikban $q = 1\!-\!10^{-5}$ és mindkettőben $b = 10^8$, és $\delta = 10$ volt.

(2) *Ezek nem voltak logaritmustáblázatok a „logaritmus" mai értelmében:* $f_b^{(N)}$-vel jelölve a megfelelő függvényeket,

$$(\mathrm{N})\ f_b^{(N)}\left(\frac{xy}{b}\right) = f_b^{(N)}(x) + f_b^{(N)}(x),$$

vagyis, ha $f_b^{(N)}(x)$-et az x szám „logaritmusának" nevezzük – ahogyan Napier is tette –, akkor nem igaz az, hogy „két szám logaritmusainak összege egyenlő a két szám szorzatának logaritmusával", hiszen előbbi az utóbbi *b-edrészének* a „logaritmusával" egyenlő!

(3) A gyakorlati használatra nézve ez azt jelentette, hogy minden „szorzatnak összeadásra való visszavezetésénél" a visszakeresésénél kapott xy/b számot még szorozni kellett b-vel, hogy a keresett xy szorzatot megkapják.[15]

9. A valóságban ezek nem maguk a gyakorlatilag használható Napier-féle táblázatok, hanem csak a táblázatok „gyártási technológiájának" bizonyos elemei. Más ilyen elemek: a – részint igen rafinált – interpolációs és extrapolációs módszerek a táblázatsűrítéshez és -folytatáshoz. E technikai részletek ismerete nem okvetlenül szükséges az eszmetörténeti mondanivalónk megértéséhez.

10. (a) Hasonló táblázatot szerkesztett *Jost Bürgi*[16] is, a $q = 1\!+\!10^{-4}$, $b = 10^8$, $\delta = 10$ paraméterértékekkel.

(b) Mindezek a táblázatok tulajdonképpen „antilogaritmus-táblázatok" voltak (a logaritmus szót mindig fenntartással használva), vagyis fordított logaritmustáblázatok; ui. nem a numeruszokhoz rendelték hozzá a „logaritmusokat", hanem fordítva, a – Bürgi által „piros számoknak" nevezett – „logaritmusokhoz" a – „fekete számoknak" nevezett – numeruszokat. Így a szereplő „logaritmusok" számtani sorozatot alkottak, a numeruszok viszont nem egyenletesen növekedtek.[17] (Ez megnehezítette a gyakorlati alkalmazást, amit

1619-ben adta ki *Mirifici Logarithmorum canonis constructio* (A logaritmusok csodálatos kánonjának fölépítése) című írását, amelyben a táblázat szerkesztésének elveit mutatta be. Kezdeményezése gyorsan ismertté vált, és széles körben nagy hatást váltott ki. Érdekességként említjük meg, hogy – 1617-ben – ő használta először, bár még nem következetesen, a tizedesvesszőt. (Akkor még nem létezett sztenderd aritmetikai jelölésrendszer.)

[15] Ez nem volt nagy fáradság az említett két táblázat esetében. Ez a tízes számrendszer használatának volt köszönhető (amelynek elterjedéséhez éppen ezek a táblázatok is hozzájárultak), hiszen a *b*-vel való osztáshoz csupán a tizedesvesszőt kellett áthelyezni. (A tizedesvessző szerepét más jelzések töltötték be abban a korban; lásd a 8.-hoz fűzött, Napierről szóló lábjegyzetet is.) Ebben rejlik annak is a magyarázata, hogy Napier miért éppen 10-hatványt választott a *b* értékeként.

[16] Jost Bürgi (svájci, 1552–1632) órásmester és műszerész, órákat, csillagászati és matematikai eszközöket készített, köztük egy széles körben ismert műszert a perspektivikus rajzoláshoz. A prosztaferézis tökéletesítésére törekedett. Michael Stifel és Johannes Kepler hatására tért át a számtani és geometriai sorok szembeállításán alapuló számolótáblázat szerkesztésére.

[17] Az általunk ismert és megszokott „igazi" logaritmustáblázatoknál ez éppen fordítva van. Ez az eltérés nem csupán *formai* (vagyis hogy egy „történelmi" táblázatot nem lehet egyszerűen a két oszlop fölcserélésével „modern táblázattá" alakítani), hanem – a táblázat előállítása és használata tekintetében egyaránt – *lényegi* (*fogalmi*) természetű.

viszont enyhített a numerusz-sorozat igen nagy sűrűsége.[18])

11. (a) Ezek a szerzők kifejezetten praktikus okokból választották *q* értékének a 0,9999999, 0,99999, illetve 1,0001 számokat. Mai szemmel természetesen lehet ehhez és más sajátságokhoz olyan matematikai reflexiókat fűzni, amelyek segítenek abban, hogy ezeket a 17. századi fejleményeket kapcsolatba hozzuk a matematika mai rendszerével. Ezeknek azonban vajmi kevés közük lehet a szóban forgó matematikusoknak és az ő korszakuk matematikai kultúrájának eredeti motívumaihoz, elképzeléseihez és módszereihez.

Ez lehet a háttere az olyan megállapításoknak (ezek nem ritkák a fogalmi tisztaságot illetően kevésbé szigorú matematikatörténeti és népszerű tudományos leírásokban), hogy „Napier és Bürgi fölfedezték a természetes logaritmust".[19]

(c) Ezt a kapcsolatot így is leírhatjuk: Ha egy Napier-táblázat minden „piros" és minden „fekete" számát elosztjuk 10^7-nel, akkor olyan táblázat keletkezik, amelynek értékpárjai „közelítőleg" egyenlők egy $1/e$ alapú „igazi" logaritmustáblázat értékpárjaival (e = 2,718281828459… a *természetes logaritmus* alapszáma). Ez az utóbbi azonban fogalmilag egészen más, mint amire Napier gondolhatott: egy *logaritmusrendszer bázisának* nemcsak a határozott fogalma hiányzik teljesen Napier, Bürgi és az összes kortársaik munkásságából, hanem még erre irányuló valamiféle elképzelésnek sincs nyoma.

12. (a) 1624-ben jelent meg *Henry Briggs*[20] *Arithmetica Logarithmica* című, még hiányos táblázata; a szükséges kiegészítésekkel *Adriaen Vlacq*[21] jelentette meg 1628-ban. Ezt gyakran az első közönséges (vagyis dekadikus, anakronisztikus kifejezéssel „10 alapú") „logaritmustáblázatnak" mondják.[22]

[18] További specialitás, hogy Napier táblázatában a numeruszok 0° és 90° közötti szögek szinusz értékei voltak; mai szóval kifejezve tehát – ebben a tekintetben – log sin táblázatokról van szó.

[19] Igaz, hogy Napier más módon is megalapozta a táblázatát, ti. egy bizonyos *folytonos* fizikai folyamat elképzelésével, amely hasonlít a *szerves növekedés* mai fogalmára. (Ez értékes gondolat volt a matematikai analízis kifejlődésének *előtörténete* szempontjából.) Ennek diszkrét numerikus kezelését összhangba tudta hozni azzal a táblázatkészítési technikával, amely a számtani és a mértani sorozatokra épült. A *mai* analízisből visszatekintve itt valóban fölfedezhető egy kapcsolat a természetes logaritmussal; mégis anakronisztikus lenne a Napier-táblázatot természeteslogaritmus-táblázatnak tekinteni.
Ezzel egyáltalán nem kisebbítjük Napier gondolatainak zsenialitását és teljesítményének matematikatörténeti jelentőségét. Célunk a tárgyszerű elemzés fogalmi, eszmetörténeti és praktikus szempontból egyaránt.

[20] Henry Briggs (1561–1630) a geometria professzora volt Londonban, majd Oxfordban. 1615-től a „logaritmussal" foglalkozott; személyes kontaktusban volt Napierrel. 1617-ben adta ki az első – 14 jegyű – *Logarithmorum chilias prima* (Az első 1000 szám logaritmusai) c. táblázatát. Az *Arithmetica Logarithmica* már 30 000 természetes szám logaritmusait tartalmazta. Briggs jelentősen fejlesztette a korabeli logaritmustáblázatok szerkesztéséhez szükséges interpolációs módszereket. Részlegesen kiadta (1620-ban) Eukleidész *Elemek* c. művét. Érdekes tudománytörténeti adat: elsőként szorgalmazta az Északnyugati-átjáró megkeresését.

[21] Adriaen Vlacq (németalföldi, 1600?–1667?) könyvkereskedő és könyvkiadó. Jelentős szerepet vitt Briggs táblázatainak újraszerkesztésével és nagyarányú kibővítésével a logaritmus korai történetében. Megszerkesztette a trigonometrikus függvények logaritmustáblázatait is. Vlacq táblázatszerkesztőként, de könyvkiadói tevékenységével is nagymértékben járult hozzá a Briggs-féle logaritmusok gyors elterjedéséhez. Kitűnően szerkesztett táblázatait két–három évszázadig a táblázatkészítés példaképeinek tartották.

[22] Tulajdonképpen az első ilyen táblázatot Briggs adta ki 1617-ben; ez az 1-től 1000-ig terjedő számok „loga-

(b) A Briggs-táblázat és a Napier-táblázat kapcsolatát egy viszonylag egyszerű képlettel lehet kifejezni, amely lehetővé teszi az előbbi előállítását az utóbbiból.

A Briggs-táblázatnak három jelentős előnye van a Napier-táblázathoz képest:

1. $B(xy) = B(x) + B(y)$, vagyis ez az első olyan táblázat, amely valóban additív függvényt reprezentál.[23]
2. $B(1) = 0$ és $B(10) = 1$.
3. $B(10^n x) = n + B(x)$ (ez 1. és 2. következménye).

(c) Ezen előnyök által a Briggs-táblázat *használata* egyszerűbb és könnyebb volt, mint a Napier-táblázaté; igen fontos továbbá, hogy ez az új táblázat nagyon jól illeszkedett a 10 alapú helyiértékrendszerhez. Visszatekintve és összefoglalva azt mondhatjuk, hogy a Briggs-táblázat erősen közelített a mai értelemben vett, „igazi" logaritmustáblázatokhoz.

A (b) alatti 3. tulajdonságon alapuló jelentős előny történetileg abban is kifejeződik, hogy az *Arithmetica Logarithmicában* bevezetett *mantissza* és *karakterisztika* műszavak a mai napig használatban vannak, változatlan jelentéssel![24]

(c) A Briggs-táblázat még mindig antilogaritmus-táblázat volt [lásd 10.(b).] A táblázat azonban más technikával készült, mint a Napier-táblázatok.

13. (a) A logaritmus egész korai történetének egyik fő jellemzője, hogy nem volt általános, átfogó, egységes módszer a táblázatok előállítására (pontosabban: egy adott „logaritmushoz" tartozó numerusz kiszámítására); a mindenkori táblázatok alapelve nem szolgáltatott ilyen algoritmust. Ezért sok – olykor nagyon bonyolult – *ad hoc* módszert találtak ki, amelyek használata meglehetősen nehéz volt.

(b) Annak, hogy a logaritmus területén az algoritmizálás irányában meginduljon az erőteljesebb fejlődés, csak fél évszázaddal később teremthették meg a szükséges eszközeit, ti. amikor az analízis építése az elemi függvények hatványsorba fejtéseinek fázisába jutott.[25] Pl.: ebben a korszakban fedezte föl *Isaac Newton* (1665-ben) és *Gerardus Mercator* (1668-ban) az $\ln(1+x)$ függvény hatványsorát.[26]

14. (a) A mai matematikából visszatekintve a logaritmus történetére nem kerülhetjük ki azt a kérdést, hogy mi a magyarázata a következő meghökkentő jelenségnek, amelyet most a szemléletesség érdekében egy speciális esetre, a 10 alapú logaritmus példáján fogalmazunk meg. (A következő táblázat mindkét oldalán a pozitív számokon értelmezett tetszőleges valós értékű f függvényekről van szó.)

(b) Ez a valóban feltűnő és zavarba ejtő jelenség az egyik oka annak, hogy az oktatás-

ritmusait" tartalmazta. Az *Arithmetica Logarithmicában* az 1-től 20 000-ig és a 90 000-től 100 000-ig terjedő numeruszok szerepeltek. Vlacq 1628-ban ezt a hézagot töltötte be; az *Arithmetica Logarithmica* új, bővített kiadásaként megjelent táblázatában a numeruszok 1-től 100 000-ig terjedtek, igaz, hogy „csak" 10 tizedesjeggyel (!), szemben a Napier-táblázat 14 tizedesjegyével.

[23] Hogy ennek ellenére még itt is idézőjelbe tesszük a „logaritmus" szót, annak az az indoka, hogy a *B(x)* függvény fogalmi származtatása szerint nem a modern, az általános hatványozáson alapuló logaritmusfüggvény.

[24] A 12. alatti 2. tulajdonság gondolata Napiertől sem volt idegen. Amikor Briggs 1615-ben meglátogatta, megvitatták ezt, és végül egyetértettek abban, hogy egyaránt hasznos és lehetséges lenne ilyen irányban megváltoztatni az eredeti Napier-féle koncepciót. (Napier azonban eredetileg – Briggstől eltérően – az $f(1) = 0$ és $f(10) = 10^{10}$ „normálásra" gondolt, a törtszámok elkerülése végett.)

[25] Más kérdés, hogy az analízis apparátusa is igazi fogalmi megalapozottság nélkül épült a 19. század közepéig.

[26] ln a természetes logaritmus szimbóluma.

A mai értelemben vett 10 alapú (valahány jegyű) logaritmustáblázat annak az *f* függvénynek értéktáblázata,[*] amely eleget tesz a $10^{f(x)} = x$ ($x>0$) feltételnek.	Briggs (ugyanannyi jegyű) „logaritmustáblázata” egy olyan *f* függvény értéktáblázata[*], amely eleget tesz az $f(xy) = f(x) + f(y)$ függvényegyenletnek és az $f(10) = 1$ feltételnek (lásd 12.).
[*] Ez a tényleges megvalósításban úgy értendő, hogy az *x*-értékek véges tizedes törtek, a függvényértékek pedig a megadott tizedesjegyszámra rövidítve jelennek meg.	
A jelenség: A két táblázat megegyezik (eltekintve az adott jegyszámra rövidítésnél alkalmazott kerekítések okozta torzításoktól).	

ban és a matematikatörténet-írásban egyaránt nehéz megértetni, hogy például Briggs *nem* „az első 10 alapú logaritmustáblázatot” szerkesztette meg (hiszen az ő táblázata egészen más fogalmi alapon épült, mint a mai 10 alapú logaritmustáblázat).

(c) Ezt a zavart erősíti az a sajátos nyelvi körülmény is, hogy Napier, Briggs és kortársaik eleve *logaritmustáblázatoknak* nevezték a táblázataikat. Márpedig a matematika további fejlődése folyamatában *lényegesen megváltozott ennek a ma is használt szónak a jelentése* (ezért voltunk kénytelenek ezt a szót a 17. század vonatkozásában következetesen idézőjelekkel megkülönböztetni). Nem evidens tehát, hogy – bár fogalmilag különböző – matematikailag ekvivalens dolgokról van szó.

(d) Ezt a „nagyon szakmai” jellegű témakört itt nem ismertethetjük. Fontos azonban legalább annyit kijelentenünk, hogy a mai matematikában – a függvényegyenletek elméletének eszközeivel – teljesen tisztázhatók az idevágó kérdések.

15. Ez az írás, amelynek egyik célja (lásd 0.) a logaritmus *korai* történetével kapcsolatos, a köztudatban élő félreértelmezések korrekciója, ugyanakkor maga is indukálhat súlyos félreértéseket a logaritmus *mai* szerepét illetően. Ennek a problematikának három fontos aspektusa van:

(1) Napier és kortársai számára a *logaritmus* egyedüli és kizárólagos szerepe annak a gyakorlati-számolási igénynek a kielégítése volt, amely őket inspirálta (lásd 3.(c_1)).

(2) A mai matematikában a logaritmus ezen messze túlmenően és a legkülönbözőbb területeken mélyen beágyazott fogalom.

(3) A történetileg eredeti gyakorlati igény jelentősége mára elhalványodott. Ez a több évszázados, eleinte nagyon lassú folyamat a mi korunkban nagyon fölgyorsult (amiben persze óriási szerepük van az elektronikus számítógépeknek).

(1)-ről igyekeztünk valamilyen képet adni, és (3) második mondatát ma nem kell magyarázni. Habár (2)-t nem lehet érzékeltetni magasabb matematikai felkészültség föltételezése nélkül, szükséges legalább megemlíteni a matematika iránt érdeklődők számára.

A legfőbb célunk ezzel a dolgozattal mégiscsak az volt, hogy megemlékezzünk – nemcsak dicsőítő szavakkal, de mélyebb betekintést nyújtó elemzéssel is – egy négyszáz évvel ezelőtti, nagy intellektuális bátorságról, nagyszerű invencióról és óriási szorgalomról tanúskodó fölfedezésről, amelyet a maga korában is óriási szenzációként élt meg a művelt világ.

Kulcsszavak: *logaritmus, logaritmustáblázat, prosztaferézis, matematikatörténet, Napier, Bürgi, Regiomontanus, Briggs*