

Tanulmány

ERDŐS PÁL A 21. SZÁZADBAN

Simonovits Miklós

az MTA rendes tagja, tudományos osztályvezető
MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet
simonovits.miklos@renyi.mta.hu

Bevezető

Száz éve, 1913. március 26-án született Erdős Pál, a világhírű matematikus, a magyar matematika, a modern kombinatorika és gráfelmélet egyik legmeghatározóbb alakja. Az évfordulóra világszerte nagyon készültek, számos konferenciát, megemlékezést szerveztek ez alkalomból, és fognak még szervezni. Az egyik legnagyobbat, és megkockáztatom, hogy a legfontosabbat itt, Budapesten rendezte a Magyar Tudományos Akadémia, a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet, a Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Tudományegyetem, ugyanott, ahol az 1999. évi Erdős-konferenciánkat: az Akadémia székházában.

Az alábbiakban írok néhány szót a konferenciáról, amely matematikai életünk egyik kiemelkedő eseménye volt. Ezután rátérek Erdős Pál mint matematikus és ember „ismeretetésére”, ahogyan én láttam Őt harmincöt éven át tartó kapcsolatunk alatt.

A konferencia

Amikor ezeket a sorokat írni kezdtem, alig néhány órája fejeződött be az Erdős Pál szü-

letésének 100. évfordulójára rendezett konferencia.¹ Ha eltekintek a kongresszusoktól, illetve az Amerikai Matematikai Társulat nagygyűléseitől, akkor nem emlékszem, hogy ekkora méretű matematikai konferenciát láttam volna. Hozzávetőleg hétszázötvenen vettek rajta részt, holott nálunk egy tipikus szakkonferencián százötven-kétszázötven résztvevő szokott megjelenni.

Természetesen itt nem a létszám a fontos, én magam minden ilyen számmisztika leghatározottabb ellensége vagyok. Félrevezető. Itt azonban *valódi* előadást csak a 15 főelőadó és a kb. 130 meghívott szekcióelőadó tarthatott. A *valódi* azt jelenti, hogy – talán csak technikai okokból –, kis számban voltak poszterek is. Ez nálunk nemigen szokás.

A konferenciánál, amely lényegében öt szekcióból állt, ügyeltünk arra is, hogy nagy hangsúlyt kapjanak az Erdős halála utáni eredmények, és az előadók többsége próbáljon valami Erdőshöz köthető, de új eredményről beszélni. Emellett ügyeltünk arra is, hogy nagyon sok fiatal tehetség is megszólalhasson.

¹ A konferencia társelnökei Lovász László és T. Sós Vera voltak.

Speciális előadássorozatot szenteltünk Erdős egyik legközelebbi barátja, a világhírű *Gallai Tibor* emlékének, és egy másik előadássorozatot a *számítástechnika* és a *diszkrét matematika* kapcsolatának. (Ahhoz, hogy a komputer gyorsan dolgozzanak, számtalan matematikai problémát kell megoldanunk, az elméleti számítógép-tudomány és a diszkrét matematika, kombinatorika, gráfelmélet igen szoros szimbiózisban vannak egymással.)

Nagyon megkínlódunk azzal, hogy a szóba jövő sok kiemelkedő potenciális előadó közül végül is kiket hívjunk meg.

(Itt jegyzem meg, hogy Erdős temetésekor egy minikonferenciát rendeztünk, ahová sok világhíres társszerzője, barátja jött el, majd három évvel később, 1999-ben egy akkori szempontból nagy konferenciát rendeztünk, ugyancsak az Akadémiával közösen, az Akadémián; igen nagy sikerrel, de a mostani, némi meglepetésünkre még az 1999-est is messze túlszárnyalta.)

Erdős Pál matematikai pályafutása

Nehéz helyzetben vagyok: úgy kell írnom egy matematikus teljesítményeiről, hogy az olvasórol csak annyit tételezek fel matematikából, amennyit a gimnáziumban megtanultunk, miközben tudom, hogy még ez is túl sok.

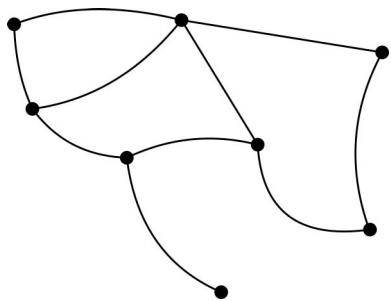
Erdős első matematikai eredménye Csebisev tételének elemi bizonyítása volt. A tétel azt mondja ki, hogy ha kiválasztunk egy tetszőleges egész számot, a szám és kétszerese között mindig van prímszám. Prímszámok azok a számok, amelyek csak 1-gyel és önmagukkal oszthatók, 2-től kezdve. Ilyenek a 2, 3, 5, 7, 11, 13... Lenyűgöző, hogy egyáltalán nem véletlenek, de nagyon véletlenszerűen viselkednek. Az is lenyűgöző, hogy számtalan rájuk vonatkozó kérdés minden matematikailag nem gyenge középiskolásnak tíz perc alatt



A fiatal Erdős Pál

elmondható, a megoldásuktól pedig nagyon távol vagyunk. Erdős bizonyítása Csebisev tételére valamilyen értelemben teljesen elemi volt, mi, matematikusok első évben tanultuk meg. *Kalmár László*, akiről a szegedi Informatika Intézet van elnevezve, segítette Erdősnek ezt a messze nem könnyű bizonyítást leírni, majd egy rövid cikksorozatban a *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapokban* is feldolgozta. Erdős teljesítménye világszenzáció volt. Ez persze azért volt fontos kérdés, mert Erdőst lényegében egész életében elkísérték a prímszámok. A prímszámok már a görögöket is nagyon foglalkoztatták, Erdős doktori értekezése is ezek számtani sorokban való eloszlására vonatkozott. Emellett életének egy meghatározó momentuma volt, amikor a *Karl Friedrich Gauss* által megsejtett, és csak sokkal később és nagyon bonyolultan bizonyított prímszám-tételre Erdős és *Atle Selberg* elemi bizonyítást adtak.

A prímszámtétel azt mondja ki, hogy a prímszámok egy nagy n számig körülbelül $n/\log n$ -nyien vannak. Engem nagyon megdöbentett, hogy a zseniális Gauss rájött erre a tételre, de nem tudta bizonyítani. Más ilyen esetről én nem tudok. (Ebből már a fenti Csebisev-tételnél sokkal erősebb állítás is következik.)



Egy gráf: pontokat és vonalakat kötünk össze. Objektumokat és kapcsolatokat modellez.

Erdős munkássága hihetetlenül nagy, mély és széles. A legfontosabb eredményei közül kiemelhetem a véletlen módszer szisztematikus használatát, elterjesztését, a véletlen objektumok tipikus struktúrájára vonatkozó eredményeit (ezek közül sokat Rényi Alfréd-dal közösen dolgozott ki). Talán ma a véletlen gráfokra vonatkozó munkássága a legfontosabb (ahol egy gráfon objektumokat és köztük futó vonalakat értünk, ilyenek például a térképek a városokkal és az utakkal, de ilyenekkel modellezük az emberi kapcsolatokat is, a világhálót, a betegségek terjedését és még sok minden más).

Erdősnek döntő szerepe volt a számelmélet bizonyos területeinek kibontakozásában, továbbá Turán Pállal számos tételt bizonyított a fizikában, matematikában alapvető fontosságú csoportok statisztikus tulajdonságainak

vizsgálatában. Rengeteg fontos eredménye volt az analízisben is, de legtöbb eredményének elmagyarázása itt túl bonyolult lenne. És persze kiemelem a modern kombinatorika kifejlődésében való óriási szerepét.

Eddig írtam már a számelméleti és a kombinatorikai-gráfelméleti kutatásairól. A polinomokkal, a függvényapproximációval, illetve -interpolációval kapcsolatos dolgairól nem írhatok, hiszen megígértem, hogy az 1960-as évek középiskolás anyagán keresztül is megérthető matematikai kérdésekre szorítkozom. Az „Erdős-típusú” geometriai kérdésekből egyet emelek ki mint meglepő és meglepően nehéz, mindmáig megoldatlan problémát. Ha a síkon felvesszünk n pontot, Erdős azt sejtette, hogy ezek között egy megadott távolság, mondjuk az 1 -távolság csak $n^{1/2}$ -szor fordulhat elő. (Ez akármilyen kis $\epsilon > 0$ -ra is igaz, ha n elég nagy.)

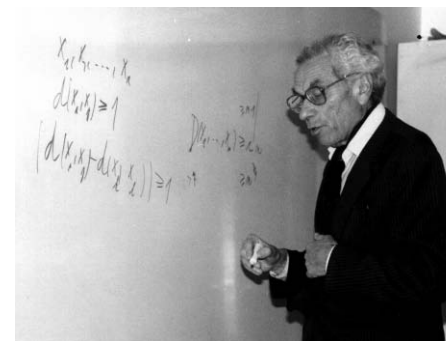
Erdős Pál hatása a magyar matematikára

Ha megnézzük, milyen magyar matematikai iskolák vannak, a kombinatorikai, a számelméleti és még jó néhány iskola erősen kapcsolódik ahhoz a matematikához, amelyet Erdős, Turán Pál² és még néhányan az 1930-as évek közepén indítottak el. Ahogyan ezt a konferencia is jól tükrözte, nekik kettőjüknek óriási hatásuk volt abban, hogy ma mi történik a kombinatorikában, és mi történik a számelmélet egyik ágában, a kombinatorikus számelméletben.

Erdős 1996 szeptemberében Varsóban megtartotta legutolsó előadását, és három nappal később meghalt. Ez majdnem az, amit megálmodott magának: megtartani az utolsó előadást, letenni a krétát, és meghalni. (De

² Turánról, akinek hatása szintén óriási, egy évvel korábban szerveztünk nagy és sikeres emlékkonferenciát.

hol van ma már a kréta?) Hazai matematikus szokásaink közé tartozik, hogy ha egy világnagyság matematikusunk meghalt, utána az összegyűjtött műveit kiadjuk. Ez történt Riesz Frigyes, Fejér Lipót, Haár Alfréd, Rényi Alfréd és Turán Pál esetében is.



Erdős előad

Amikor Erdős meghalt, azt rögtön lehetett látni, hogy nála a munkássága terjedelme miatt ez a módszer nem működne. Az 1500 körüli cikkszám és azok terjedelme ezt nem engedné meg. Ezért határoztunk úgy, hogy egy DVD-n adjuk ki (eddigre már az egész *Encyclopedia Britannicát*, a *Pallas Lexikont* vagy a *Révai Nagylexikont* is könnyedén rá tették egy CD-re vagy egy DVD-re.) Mire a munkával elkészültünk, az interneten való közzététel mellett döntöttünk. Az 1989-ig elkészült művek megtalálhatók az MTA Rényi Alfréd Matematikai Intézet honlapján: URL.³ Itt az is látható, hogy első cikkét még mint VI. osztályos tanuló írta, 1929-ben. A második cikke éppen a már említett Csebisev-tétel elemi bizonyítása volt, német nyelven. Korai cikkei túlnyomóan számelméleti témájúak, késői cikkei leginkább gráfelméletéről szólnak, és aránylag korán elkezdte a másokkal közös

³ Az elvágás *copyright* problémák miatt történt 1989-nél.

cikkek írását. Itt Turán Pállal és *Szekeres Györggyel* közös cikkeit emelem ki.

Hamarosan ösztöndíjat kapott Angliába, itt számtalan fontos újabb matematikai kapcsolatra tett szert. (Közben rendszeresen hazalátogatott.) Amikor Hitler elfoglalta Ausztriát, és a tárgyalásokon megállapodott Csehszlovákia felosztásáról, Erdős előbb Angliába ment, majd hajóra ült, és Amerikába utazott, mert korábban elnyert egy princetoni ösztöndíjat.

1938–39-ben, Princetonban, az Institute of Advanced Study-ban töltött egy évet, jellemzően eredeti látásmódja, szokatlan matematikai kérdései, a nagyobb elméleteket kis problémákon keresztül megközelítése nem annyira tetszett az intézet igazgatójának, tehát csak fél évre hosszabbították meg alkalmazását, nem tartották ott. (Erdős nem keserűséggel töltötte el, hogy *Neumann János* kiállhatott volna érte Princetonban, de nem tette.) Ez döntően megváltoztatta életét: ekkor kezdett bele abba az életmódba, amelyet az állandó helyváltoztatás jellemez.

Mitől jó a magyar matematika?

A magyar matematika nemzetközileg igen elismert, és ennek egyik legfontosabb oka az, hogy a nálunk divatos témákban kiemelkedő matematikusaink voltak/vannak. Emellett nagyon fontos az is, hogy a közoktatásunk nagyon jó volt. (Sajnos most lefelé megy.) Emellett nagyon fontosnak tartom a kiemelkedően jó tehetséggondozást is. Ehhez a tehetséggondozáshoz tanáraink, a „nagyjaink” nagyon különböző módon járultak hozzá.

Mivel elsősorban Erdős Pálról írok, most azt kell elmesélnem, hogy mint mindent, a tehetséggondozást is nagyon egyedi módon végezte. A háború után 1948-ban még egyszer hazajött, de azután évekig nem járt itthon.

Amikor elkezdett hazajárni, akkor valahányszor csak megismerkedett egy a matematikában kiemelkedő tehetségű gyerekkel, arra odafigyelt, felkarolta, és különös érzéssel kezdte olyan problémákkal „bombázni”, amelyek az illetőnek a legjobban megfeleltek. Életének egy bizonyos periódusában például – amikor Magyarországon volt – betült a Matematikai Kutatóintézet igazgatói szobájába, és ott fogadta a „látogatókat”. Amíg barátja, Rényi Alfréd (az intézet megalapítója) élt, gyakran megtörtént, hogy amikor megérkezett, kedvesen visszakérte a szobáját: ilyenkor más hely után kellett néznünk. (Ez aztán a későbbi igazgatókkal is hasonlóan ment.)

Furcsák voltak ezek a találkozások, mert Erdős számtalan különböző témával tudott egyszerre foglalkozni (ilyet másnál még nem láttam). Hárman, négyen, néha öten körbeültük, hol egyikőnkől kérdezett valamit, hol a másikunknak mondott el egy bizonyítást, néha többünknek, de mindig pontosan tudta, melyikünkől mit kérdezzon. Soha nem akart egyikünket sem olyan irányba terelni, amelyik az illetőtől távol állt volna.

Talán éppen ez az egyedi hozzáállása vezetett oda, hogy a 14 éves Pósa Lajostól olyasmit kérdezett, amiből egy nagyon fontos cikk keletkezett, ehhez Erdős is írt egy „kísérő” cikket, és később készítették olyan közös cikket is, amelyikhez kapcsolódóan nagyon sok további cikket írtak.⁴

Az is nagyon fontos volt nekünk, hogy megoldjuk a problémáit. Ha valaki megoldott egy Erdős-problémát, az már eleve rangot adott neki. Ez természetes volt, hiszen ezeket a problémákat a legtöbb oktatónk (később kollégánk) nem tudta volna megoldani.

⁴ Az Amerikai Matematikai Társulat referálói kötetében külön fejezet szól a Pósa típusú tételekről.

Az is érdekes része volt ennek a közös kutatásnak, hogy ha volt egy jó és kiemelkedően tehetséges barátunk, akkor néha egyikünk elhozta, hogy Erdős beszélgesse vele. Így vitte el Sárközi András Erdőshöz Szemereédi Endrét, és így találkoztam először Ruzsa Z. Imrével, aki akkor még csak középiskolás volt (a Fazekas tagozatára járt), és Pósa Lajos hozta el Pali bácsihoz. Miközben Erdős és a gyerek Ruzsa beszélgettek, láttam, hogy Ruzsának nagyon fontos, hogy Erdős meghallgassa, és Erdős valóban odafigyelt rá. Az is rögtön világos volt, hogy Ruzsa egy meglehetősen nehéz témában próbálja elmagyarázni Erdősnek a sejtését. Sós Verát középiskolai tanára, Erdős egyik legjobb barátja, Gallai Tibor mutatta be Erdősnek.



Rényi Kató, Turán Pál, T. Sós Vera és Erdős Pál (Lake Louise, 1969)

Hosszan folytathatnám az ilyen és hasonló történeteket. Erdősről nagyon sokan írtunk már, és amikor róla írunk, gyakran elmondjuk, hogyan találkoztunk vele először. Bollobás Béla elmesélte, hogyan üzent Erdős utána, hogy látni szeretné, és hívta meg a Royal cukrászdájába. Hajnal András leírta, hogyan találkozott aspiránsként Kalmár László szobájában Erdőssel, aki egyebek között megkérdezte, nem mennének-e fel együtt a Sze-

gedi Fogadalmi Templom tornyába. (Erdős nagyon szeretett magas tornyokba felmenni, magas hegyeket megmászni.) Persze Hajnal, az ifjú aspiráns, aki addig még soha nem ment fel a toronyba, nem is gondolta, hogy erre a kérdésre nemmel is felelhetne. Menet közben elkezdtek matematikáról beszélgetni, és mire visszatértek a szegedi Matematika Intézetbe, addigra már tartalmilag meg is volt az első közös cikkük.



Kalmár László

Munkám első idézése is meglepő körülmények között született. Szüleim jól ismerték Erdőst, édesanyám matematika-fizika tanári szakot végzett, Erdős évfolyamtársa volt, és közös kirándulásokra jártak, még a 30-as években. Így, amikor érettségi előtt álltam, és már jó néhány középiskolás matematikai versenyen jó eredménnyel vettem részt, egyszer szüleim meghívták hozzánk Erdőst. Miközben beszélgettek, Erdős egy matematikai kérdést tett fel, amelyet én úgy fogtam fel,

mintha csak egy versenyfeladat lenne. Átmentem a másik szobába, ahol talán húsz perc alatt megoldottam a kérdést. Ezzel én elégedett voltam, hiszen igazoltam, hogy jó vagyok az ilyesmikben, de utána el is felejtettem az egészet. Sok évvel később olvastam el Erdős egyik híres cikkét, (az Erdős–Kó–Rado-cikket, amelynek nyomán egy egész elmélet alakult ki a kombinatorikában), amelyben megemlíttette, hogy az ottani legutolsó tételt bebizonyították rajtuk kívül Pósa Lajos, Hajós György, Pollák György és Simonovits Miklós.

Ezek az első találkozások nagyon sokunk egész életére kihatottak.

Erdős, az ember és a barát

Erdősről eddig gyakorlatilag háromfajta cikk vagy könyv jelent meg. Az egyikben matematikusok írnak róla, megpróbálják leírni emberségét, nagyságát, és kifejezni hálájukat azért a sok segítségért, amelyet tőle kaptak.

A másik típusú elemzés gyakorlatilag a nem-matematikuskok számára próbál meg egy jól eladható, érdekes, mulatságos írásművet kreálni. Ezeket gyakran profi írók írják, matematikusokkal összedolgozva. Sajnos Erdős lényegtelen „furcsaságait” túlhangsúlyozzák. Ezekon az írásokon csak azért nem szoktam nagyon bosszankodni, mert el sem olvasom őket. Az egyik első ilyen cikk még Erdős életében jelent meg, és láttam, hogy Erdőst nagyon felbosszantotta.

Van egy harmadik típusú cikk, amelyikben Erdős matematizálási stílusát elemzik. Erre a kérdésre még visszatérek. Nekünk a második típusú legendákkal kell megküzdőnünk.

Azt ígértem, írok arról, hogy Erdős milyen barát volt. Először is, nagyon közvetlen volt. Ha valakivel leült beszélgetni, matema-

tikáról vagy másról, az illetővel úgy beszélgett, mintha ezer éve ismernék egymást, és teljesen egyenrangúak lennének. Ez az együtt-dolgozást is nagyon megkönnyítette. Ha látta, hogy valakinek anyagi gondjai vannak, annak igen gyakran ajánlotta fel a segítségét.

Szeretett kirándulni, szerette a szép tájakat, szeretett pingpongozni, igen sokoldalú volt. És nagyon igényelte az emberek társaságát, a barátokat. Sokat levelezett. El szokták róla mondani, hogy leveleiben azonnal a matematikára tért. Ez igaz ugyan, de a beszélgetésekből kiderült, hogy nagyon is odafigyel az emberekre.

Erdős matematikai stílusa

A matematikában talán könnyű azt eldönteni, hogy egy tétel igaz-e, vagy sem,⁵ de azt már nehezebb megítélni, hogy mi fontos és mi nem az. Ez azt jelenti, hogy vannak egymásnak feszülő, teljesen eltérő matematikai hozzáállást valló iskolák. Mindezt nagyon plasztikusan írja le *Tim Gowers* Fields-érmes matematikus (Gowers, 2000). A dolog lényege, hogy vannak induktív és deduktív gondolkodású matematikusok. Erdős, Turán és a ma élő legtöbb magyar matematikus az induktív matematizálást követi: még ha kitűz is egy távolabbi, nagyobb célt, gyakran először annak a legegyszerűbb alesetét támadja meg, próbálja bebizonyítani. Ha azt elintézte,

⁵ Ez sem teljesen igaz. Egy állítás akkor válik tétellé, amikor egy bizonyítást találunk rá, azonban egy bizonyítás ellenőrzése távolról sem egyszerű. Ezt bonyolítja még az is, hogy a modern korban megjelentek az olyan nagyméretű bizonyításrendszerek, amelyeket már egy ember nem is láthat át egészében és minden részletében. Ilyen például a véges egyszerű csoportok osztályozása. És ha mindez még nem lenne elég, megjelentek a géppel segített bizonyítások is. Ilyen például az a tétel, hogy minden síkbeli „normális” térkép négy színnel kiszínezhető.



Erdős go játékot játszik (1941)

megy az általánosabb felé. Ezzel szemben áll a deduktív módszer, ahol a legáltalánosabbat próbáljuk először elintézni, majd abból vezetni le a kisebb, fontosabb tételeket. Az utóbbinak az egyik áága az, amit bourbakizmusnak nevezünk. Ez a hozzáállás mindig a lehető legáltalánosabb tételt keresi, még ha az olyan bonyolult is, hogy gyakran a jelenség lényegét elhomályosítja. Bourbaki egy közismert francia tábornok volt. Francia matematikusok egy csoportja elhatározta, hogy nem a saját nevükön fognak publikálni, hanem Nicholas Bourbaki néven. Ezzel a saját ambíciójukat háttérbe szorítva a matematikailag legjobbat akarták adni. Nagyon magas színvonalon dolgoztak, és a világ matematikájára nagyon nagy hatással voltak. Arról azonban mindmáig vita folyik, hogy eljárásukkal, azaz a túlzott absztraktságukkal több kárt okoztak-e, mint hasznot. Magam számtalan Bourbaki-tankönyvet megvettem, bizonyos dolgokat ezekből értettem meg, a végén azonban kiábrándultam belőlük. Erdős stílusa a bourbakizmusnak pontosan a fordítottja volt.

Szóval, a magyar matematika lényegében induktív, ez volt jellemző Erdősre, Turánra, Gallaira, Szekeresre... (azokra, akik az 1930-as években jártak az ELTE-re, ottan egy baráti kört alkottak, együtt matematizáltak, és a mai magyar és nemzetközi matematikára jelentős hatást gyakoroltak.) Erdősre tehát az volt a jellemző, hogy feltett egy apró matematikai kérdést, s ha azt megoldotta, rögtön feltett egy következőt, majd egyre újabbakat, és ezekkel hihetetlen magasságokig ért el.



Grätzer György, Erdős Pál, Turán Pál és Rényi Alfréd

Ennek jó példája, ahogyan Rényi Alfréddal kidolgozta a véletlen gráfok evolúciójának elméletét. A legelső lépés az volt, hogy barátja, Turán Pál egy levelében feltett gráf-kérdésére azt válaszolta – kissé más nyelven –, hogy egy véletlenül kiválasztott gráf ellenpélda Turán sejtésére. Körülbelül tíz évvel később több kérdésre is hasonló választ adott: ha egy állításra (ellen)példát keresünk, azt megtehetjük úgy is, hogy egy nagyobb sokaságból véletlenszerűen kiválasztunk egy tipikus egyedet, majd azt egy kicsit átalakítjuk. Ez a „véletlen konstrukció”⁶ hamarosan tudományterületünk egyik leghatékonyabb módszeré-

⁶ Fából vaskarika

vé vált. Az egyik legfontosabb, amit Erdős matematikájában ki szoktak emelni, hogy rendszeressé tette ezt a konstrukcióhelyettesítő eljárást. Ám ehhez hozzájött a következő lépés, amikor Rényi Alfréddal közösen elkezdtek kutatni a véletlen gráfok viselkedését, majd a véletlen gráfok evolúcióját. Milyen is a véletlen gráfok evolúciója? Kicsit olyan, mint a fázisátalakulás, kristályosodás. Amikor például egy 100 millió pontú gráfhoz egyesével adogatjuk hozzá az éleket, eleinte sok apró szigetet látunk, majd egy hirtelen átmenettel kialakul néhány nagyobb földrész a tengerben, majd ezek is összekötődnek egyetlen óriási földrésszé és néhány izolált ponttá, legvégül pedig az izolált pontok is bekötődnek a nagy földrészhez. Érdekes mindezt a matematikai formulákon keresztül megfigyelni. Mindennek a megértéséhez az Erdős–Rényi-féle véletlen gráfmodell, majd a legutóbbi időkben a Barabási–Albert-modell⁷ is nagyon sokat segít.

Erdős, a csodagyerek

Ez az, amiről nem akarok sokat írni. A matematikában gyakran találkozunk csodagyerekekkel, akik felnőttként kiemelkedő matematikusokká válnak. De a legtöbb matematikus esetében fogalmam sincs, hogy csodagyerek volt-e, és az sem világos számomra, hogy a csodagyerekek hány százaléka kallódik el (a matematika szempontjából), mire felnőtt. Sok ilyen elkallódást láttam magam is.

Erdős csodagyerek volt (Erdős, 1997), és matematikai óriássá nőtte ki magát, szerepe meghatározó a mai matematika számos területén, és emellett az egyik legismertebb

⁷ A félreértések elkerülésére: Barabási Albert-Lászlónak volt egy Albert Réka nevű tanítványa, a modell kettőjük nevéhez fűződik.

matematikus egyéniség a világon. Számomra a legfontosabb nem az ismertsége, hanem az óriási hatása. Ezt Magyarországon is, és bárhova megyek, a nagyvilágban ugyanígy, nagyon-nagyon érzem.

Egyik barátom harminc-harmincöt éve azt mondta, hogy akit a középiskola nem tesz tönkre, annak az egyetem sem árthat már sokat. Ezen a mondaton, amelyik talán túl sarkos, de sajnos mégis túl sok benne az igazság, érdemes elgondolkodnunk. A lényege, hogy az iskola megpróbál bennünket egyformára gyúrni, és csak azok élnek túl, akik a középiskolai egyen-gyúrászt ignorálni tudják. Erdős iskolái egy részét magánúton végezte el, és az biztos, hogy az egyéni gondolkodásmódján nem változtatott a külvilág. (A régebbi példák közül talán Charles Darwin emelendő ki, aki híresen rossz tanuló volt, s akinek korunk tudományára talán a legnagyobb hatása volt. De kiemelhetem még Fejér Lipót is, a professzoraim professzorai közül az egyik legismertebb matematikust, akinek azonban iskolás korában gondjai voltak a matematikával.⁸) Szóval, Erdős gondolkodása nagyon egyedi volt, amikor megismertük, és ha később nem annyira lepett már meg bennünket, az elsősorban azért volt, mert sokat – amit lehetett – eltanultuk tőle.

Sokan elmondhatjuk itt Pesten, hogy sikeres matematikusok lettünk, és elsősorban azért, mert nagyon sokat tanultunk tanárainktól, közülük pedig kiemelnénk Erdős Pált, Turán Pált és Rényi Alfrédot, de emellett még sokukat (én T. Sós Verát szoktam az első helyen említeni). Kitűnő tanáraink mellett

⁸ Ha azt mondom, hogy Erdős és Turán voltak a professzoraim – ami nagyon durva leegyszerűsítés –, akkor az ő professzorai közül Fejért emelném ki, és talán Kónig Dénest. A nagyon nagy hatású Riesz Frigyes talán azért nem, mert akkor még Szegeden dolgozott.

igen sokat jelentett számunkra a kiváló matematikai *curriculum* is. Ezt is a tanárainknak köszönhetjük. De hasonlóan sokan mondanák el Prágában, Cambridge-ben, Oxfordban, Poznańban és még a világ sok más kutatóhelyén, hogy sikerüket nagy részben Erdősnek köszönhetik.

Milyennek láttuk Erdős Pált?

Ha körülnézek, nagyon sok egymásnak ellentmondó Erdős-képet látok. De a legtöbbször van egy nagy hibája: *egy* Erdősöt mutat be, holott Erdős 83 évig élt, és ha meg akarjuk érteni egyéniségét, több periódusát kellene megkülönböztetnünk. Én legalább három periódusát különböztetem meg:

- az első ötven év;
- édesanyja halála utáni évek;
- az utolsó évek.

Talán azért ezt a felosztást használom, mert Erdősöt valójában 1961 körül ismertem meg, ezután, egészen a haláláig folyamatos kapcsolatban voltam vele. Matematikájából sokat értettem meg Turán Pál egy gyönyörű matematikai cikkéből, amelyet Erdős ötvenedik születésnapjára írt róla (Turán, 1963). Édesanyja halála után (1970) azonban szemünk látára változott meg. Mindezt nehezen értettem meg, hiszen előtte éveket élt külföldön, míg édesanyja itthon volt, de tény, hogy Erdős rohamosan fogyott, kevesebbet aludt, és láthatóan megváltozott. Amikor idősebb lett, sokan, ha nem is látványosan, de lényegében elfordultak tőle, kevesebbet hívták meg, míg az igaz barátok kitarítottak mellette.

Utolsó mondatom félreérthető, mert azt látszik sugallni, hogy a végén már Erdős nem igazán matematizált. Ez nem így volt. Éppen az volt jellemző rá, hogy mindvégig matematizált, és rettegett attól, hogy mi lesz, ha egyszer már nem lesz képes rá. Mindvégig kitűnő

matematikus volt, de természetesen a végére csökkent az az idő, ameddig egy-egy hosszabb bizonyításra oda tudott figyelni, követelte, hogy mondjuk el a bizonyítást, de néha elszundított; ha abbahagytuk, felriadt, majd követelte, hogy folytassuk.

Erdős és a politika

Kell néhány szót ejtenem Erdős politikához való viszonyáról is. Barátai között sok volt a baloldali vagy kicsit kiábrándult, de baloldali értelmiségi. Én Erdősöt is ilyennek láttam. De nem szerettem megalkudni, így az államokkal is szélmalomharcot vívott. Először elvesztette a „visszatérő” vízumát az USA-ba, amikor megkérdezték tőle, mi a véleménye Marxról, és azt válaszolta, hogy nagy tudós. Másodszor megsértődött a Kádár-rendszerre, mert a 60. születésnapjára szervezett konferenciára az akkori külpolitikának megfelelően nem engedték be *Schönheim János* romániai, magyar anyanyelvű Tel Aviv-i matematikust. Évekig nem tért haza. Turán Pál haldokolt már, amikor Erdős újra hazatért. Formailag magyar állampolgár volt izraeli lakhellyel, amire azért volt szüksége, mert barátai így tudták elintéztetni, hogy konzuli útlevelet kapjon, amivel igényeinek megfelelően utazgathatott.

Általában nem alkudott meg.

Erdős és a KÖNYV

Erdősnek sajátos humora és sajátos nyelvezete volt, amely részben kifejezte a véleményét, de nem mindig. A hölgyeket uraknak nevezte, a gyerekeket epszilonoknak, a zenét lármanának. Az utóbbiból arra is következtethetnénk, hogy nem szerette a zenét, de ez nem így volt. Volt egy hosszabb periódusa, amikor barátai rendszeresen – mondjuk hetente egyszer – meghívták vacsorára, és amikor megérkezett, aránylag hamar rátért a matemati-

kára. Emellett persze sokat beszélt politikáról, orvostudományról, történelemről és még sok minden másról. Míg egyik oldalról elterjedt róla az a hibás legenda, hogy csak a matematika érdekli, engem nagyon gyakran lepett meg a humán dolgokban való jártasságával is. Meglepett, amikor a barátom lánya a japán irodalomról írt szakdolgozatot, erről én semmit nem tudtam, de Erdős igen tájékozottnak bizonyult a témában. Ha feleséggel beszélgetett, aki gyógyszervegyész, Erdős a gyógyszerekről kérdezte. Minden érdekelt.

Mint írtam, abból, hogy a zenét lármanak nevezte, egyesek arra következtettek, hogy nem szerette. A valóság a fordítottja. Egy idő után mindig megkért bennünket, hogy tegyünk fel valami komolyzenét, Bachot, Mozartot, Beethont, vagy akár Pachelbelt is. Ízlése teljesen megfelelt az én ízlésemnek. Volt olyan periódusa is, amikor valahányszor meglátogattam az Akadémia várbeli vendégházában, egy közepes minőségű táskarádiót hallgatott. Hogy mit hallgatott? Híreket vagy zenét. Az ma sem világos számomra, hogy szeretett-e hangversenyre járni, bár barátaival elment néha. Kicsit másként volt a képzőművészettel. Amikor erről beszélgettünk, már nem volt fiatal, a szemei már nem voltak a legjobbak (volt valami ritka szembetegsége), és talán ezzel magyarázta, hogy múzeumokba – nem járt. Sokat olvasott. Néha meglátott a barátainál egy könyvet, elkérte, villámgyorsan elolvasta, majd visszaadta néhány szó kíséretében.

De én nem ezekről a könyvekről akartam írni, hanem a KÖNYVRŐL. Erdős kitalálta, hogy van egy könyv, amelyikben minden (fontos) tételnek benne van a bizonyítása, és ha van egyszerű, szép bizonyítása, akkor ebben azt megtaláljuk. Ha egy bizonyítás nagyon szép, rövid vagy valamilyen más módon

frappáns volt, Erdős (és egy idő után a környezete is) azt mondta: ez a bizonyítás a könyvből van. Halála után *Martin Aigner* és *Günter M. Ziegler* berlini matematikusok meg is jelentettek egy ilyen könyvet: *Bizonyítások a könyvből*.⁹ Hogy ez miért lényeges? Mert a matematika sok különböző aspektusa közül annak szépsége is nagyon fontos. (Egy matematikai tétel vagy bizonyítás szépsége nem öncélú; valamilyen lényegrelátást tükröz.)

Néhány adat Erdősről

Erdős körülbelül 1500 cikket írt, és 500 szerzőtársa volt. El szokták róla mondani, hogy hozzá hasonló produktivitás csak Leonhard Eulert jellemezte. Ez is kicsit félrevezető, mert

⁹ Magyar fordítás: Typotex Kiadó, 2009.

IRODALOM

Az alábbi bibliográfiában könyvet nem említék, az általános olvasónak inkább *Babai László* cikkét ajánlom, amelyik Erdőssel való beszélgetések alapján készült, vagy *T. Sós Vera* cikkét, amelyik a háború alatti Erdős–Turán-levelezést tükrözi. Erdős személyisége tükröződik a Turán Pál halálára írt cikkéből, illetve a magáról írt cikkéből, és a matematika nagy filozófiai problémáiról szól *Tim Gowers* cikke.

János Bolyai Mathematical Society (1993, 1996): *Paul Erdős is Eighty*. (Bolyai Society Mathematical Studies 1–2.) Budapest

Babai László (1993): In and Out of Hungary, Paul Erdős, His Friends, and Times, in *Combinatorics: Paul Erdős is Eighty*. In: János Bolyai Mathematical Society (1996): *Paul Erdős is Eighty*. (Bolyai Society Mathematical Studies 2.) Budapest, 7–95.

Babai László – Spencer, Joel (1997): Paul Erdős, (1913–1996). *Notices of AMS*. 45, 1,

Bollobás Béla (1997): Erdős Pál (1913–1996). *Természet Világa*. 2, • <http://www.termeszetvilaga.hu/tv9702/bollobas.html>

Bollobás Béla (1998): To Prove and Conjecture. *American Mathematical Monthly*. 105, 3, 209–234.

Erdős Pál (1997): Hogyan lettem matematikus és világvándor. *Természet Világa*. 2, • <http://www.termeszetvilaga.hu/tv9702/erdos.html>

sem Euler, sem Erdős nagysága és hatása nem a cikkeik számában fejezhető ki.

Amikor egy nagy tudós nagyságát akarjuk illusztrálni, az egyik legegyszerűbb mód, hogy felsoroljuk a kitüntetések, amelyekkel a tudományos környezet elismerte teljesítményét. Ezt sem teszem. Ezek megtalálhatóak az URL2-ben. Amikor az ELTE díszdoktorává avatta, Erdős egy Arany János-idézetet mondott el:

*Ha én egy jót alhatnám –
Száz keresztért nem adnám.*

Persze ezt a saját átköltésében is elmondta, szeretett verseket átkölni. Nála az alvás helyett egy szép új tétel bizonyítása szerepelt.

Kulcsszavak: *Erdős Pál, Turán Pál, magyar matematika, matematikortörténet*

Erdős Paul (1977): Paul Turán, 1910–1976: His Work in Graph Theory. *Journal of Graph Theory*. 1, 2, 97–101. DOI: 10.1002/jgt.3190010204

Gowers, Tim (2000): Two Cultures of Mathematics. In: Arnold, Vladimir Igorevich – Atiyah, M. – Lax, P. – Mazur, B. (eds.): *Mathematics: Frontiers and Perspectives*. American Mathematical Society, Providence, RI, 65–78, tanulmány • <http://www.dpmms.cam.ac.uk/~wtg10/2cultures.pdf> teljes kötet: <http://books.google.hu/books?id=qjVaDrOQbxEC&printsec=frontcover&hl=hu#v=onepage&q&f=false>

T. Sós Vera ([1999] 2002): Turbulent Years: Erdős in His Correspondence with Turán from 1934 to 1940. In: Halász Gábor – Lovász L. – Simonovits M. – T. Sós V. (eds.): *Paul Erdős and his Mathematics*, I. (Bolyai Society Mathematical Studies 11) János Bolyai Mathematical Society, Budapest, 85–146,

Turán Pál (1963): Erdős Pál 50 éves. *Matematikai Lapok*. 14, 1–28.

URL1: Erdős Pál 1989-ig elkészült művei • http://www.renyi.hu/~p_erdos/

URL2: László Babai's Erdős page: • <http://theory.cs.uchicago.edu/erdos.html>

URL3: St Andrew College Math History: On Erdős; • <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Erdos.html>

KÉTSZÁZTÍZ ÉVE SZÜLETETT JUSTUS VON LIEBIG, AZ MTA KÜLSŐ TAGJA

Kádár Imre

az MTA doktora, kutató professor emeritus,
MTA Agrártudományi Kutatóközpont Talajtani és Agrokémiai Intézet
kadar@rissac.hu

*„A kémia azon csendes erők birodalmába
kalauzol, amelyek minden létezés
és elmúlás feltételei a Földön.”*
Justus v. Liebig

Bevezetés

Justus von Liebig, a Magyar Tudományos Akadémia külső tagja, jelentős befolyást gyakorolt egy sor tudomány fejlődésére, mint a kémia, gyógyszer-tan, orvostudomány, agrókémia, takarmányozás-tan, élelmiszer-kémia. *Samuel Cecil Salmon* és *Angus Alexander Hanson* (1970) szerint Liebig munkássága olyan vízvázlatot a mezőgazdaságban, mint a keresztény világban a Krisztus előtti vagy utáni időszámítás. Valóban *Agrikulturkémia*-ja olyan viharokat kavart szakkörökben, melyek hatása a mai napig tart. A korszakalkotónak minősített munka jelentősége és kisugárzása talán csak a kortárs *Charles Darwin A fajok eredete*, illetve *Az ember származása* című munkáihoz hasonlítható. A Liebig utáni mezőgazdaságban beköszöntött a műtrágyák kora. A gyümölcsöző viták, illetve a liebigi hagyaték sokoldalú pozitívumait az utókor, így a jelen generáció élvezi igazán. Munkánk célja áttekinteni az elmúlt két év-

század főbb eseményeit, megvilágítani az előzményeket és a liebigi kort, bemutatni e nagy gondolkodó életútjának jelentősebb állomásait. Vizsgáljuk Liebig hatását a magyar tudomány fejlődésére, valamint megkíséreljük összefoglalni munkásságának általános, elvi-módszertani tanulságait. Vagyis azt, hogy mit nyújthat a ma emberének a liebigi szemlélet? Segíthet-e eligazodni napjaink globalizálódó világában? Áldás vagy talán átok ma a Liebig által elindított műtrágyahasználat?

Liebig és kora. Előzmények

Liebig (1876) a mezőgazdaság jelentőségét az alábbi szavakkal méltatja: „Nincs olyan tevékenység, mely jelentőségében a mezőgazdasághoz hasonló. A mezőgazdaság állítja elő az ember és állat táplálékát, tőle függ az egész emberi faj jóléte és fejlődése, államok gazdagsága és a kereskedelem. Nincs olyan gazdasági ág, ahol a helyes irányelvek alkalmazása oly áldásos, nagy és döntő hatású lenne.”

T. Bedford Franklin (1948) szerint egy angol farmer az 1600-as években kb. 4 hektár földet tudott kezdetleges eszközeivel művelni, míg további 4 ha-t a következő évi vetés alá ugarolt. A 4 hektáron kapott 5–6 t gabona-