Dr. Pokorádi László mk.őrnagy, főiskolai docens

REPÜLŐGÉPEK ÜZEMELTETÉSI RENDSZEREINEK
VIZSGÁLATA
MARKOV-MÁTRIX FELHASZNÁLÁSÁVAL

a szerző

4^{th} Mini Conference on Vehicle System Dynamics,
Identification and Anomalies
7-9 of November, 1994, Budapest

kiadványában megjelent

INVESTIGATION OF AIRCRAFT OPERATIONAL SYSTEM WITH MARKOV-MATRIX

című tanulmányának magyar nyelvű változata

1. Bevezetés

A repüléstechnika üzemeltetése, a repülőgépekre, valamint azok kiszolgálására, az előkészítésükre, különböző nagyságrendű javításukra szolgáló személyekre és előírásokra épülő rendszerben lejátszódó sztochasztikus folyamat.

Ez a folyamat, amely lényegében az üzemeltetés tárgyával, annak gyártása és kiselejtezése között történtek összessége, az üzemeltetési állapotok - időben és gyakoriságban véletlenszerű - egymásutánisága.

Mivel az egyes üzemeltetési állapotból való távozás független az azt megelőző állapotoktól és azok sorrendjétől (azaz a folyamat utóhatásmentes), az üzemeltetés matematikailag egy folytonos idejű, diszkrét állapoterű Markov-folyamatnak tekinthető. Ez a sztochasztikus folyamat pedig Markov lánccal approximálható.

Az üzemeltetési rendszerről, illetve irányításának hatásosságáról bizonyos jellemzők ismeretében dönthetünk. Ezen jellemzők meghatározása az adott üzemeltetési folyamat rendszerszemléletű vizsgálatakor annak folytonos idejű, diszkrét állapotterű markovi, vagy fél-markovi modelljeinek segítségével történhet.

2. A Markov-folyamatokról általában

Az olyan $\eta(t)$ sztochasztikus folyamatot, amelynek jövőbeli alakulását a múltbeli alakulása csak a jelenlegi állapoton keresztül befolyásolja, azaz amely utóhatásmentes, Markov-folyamatoknak nevezzük.

Ha ez az $\eta(t)$ folyamat a vizsgálati idő alatt bármely pillanatban felvehet valamilyen értéket, akkor azt folytonos, ha η csak kitüntetett időpontokban rendelkezhet értékkel, diszkrét idejűnek nevezzük. Diszkrét állapotterűnek tekintjük azt a sztochasztikus folyamatot, ahol az η valószínűségi változó lehetséges értékei véges, vagy megszámlálhatóan végtelen elemű halmazt alkotnak.

A véges vagy megszámlálhatóan végtelen - azaz diszkrét - állapotterű, utóhatásmentes sztochasztikus folyamatokat Markov-láncnak nevezzük. Ekkor a

$$P_{ij}^{n,n+1} = P\left\{ \eta(t_{n+1}) = X_j \;\middle|\; \eta(t_n) = X_i \right\} \qquad (1)$$

feltételes valószínűséget átmenetvalószínűségnek nevezzük, amely annak a valószínűségét fejezi ki, hogy $\eta(t_{n+1}) = X_j$ feltéve, hogy $\eta(t_n) = X_i$ [1].

A fenti $P_{ij}^{n,n+1}$ jelölés azt is mutatja, hogy az átmeneti valószínűség nemcsak az i kezdeti és a j végállapot, hanem az idő (t_n) függvénye is. Ezt a valószínűséget a továbbiakban - az egyszerűség érdekében - a

$$P_{ij}^{n,n+1} = P_{ij}(t_n) = P_{ij}(t) \qquad (2)$$

módon jelöljük.

Véges, N számú állapot esetén a P_{ij} átmeneti valószínűségeket mátrixba szokás rendezni. Ezt a

$$\underset{=N\times N}{P}(t) = \left[P_{ij}(t) \right] \tag{3}$$

mátrixot az $\eta(t)$ véletlen folyamat Markov-mátrixának vagy átmenetvalószínűség mátrixnak nevezzük [2].

Ha a fenti egylépéses átmenetvalószínűségek függetlenek az időtől, akkor azt mondjuk, hogy a Markov-folyamat stacionárius. Ebben az esetben felírható, hogy

$$P_{ij}^{n,n+1} = P_{ij} \quad , \tag{4}$$

illetve

$$\underset{=N\times N}{P} = \left[P_{ij} \right] \tag{5}$$

mivel az független az n értékétől és P_{ij} annak a valószínűségét jelenti, hogy az $\eta(t)$ értéke X_i-ből X_j-be vált át a Δt hosszú $(t_{n+1};\ t_n)$ időintervallumban.

A további vizsgálatok elvégzése érdekében célszerű átmenetnek tekintenünk azt az esetet is, amikor az η által felvett érték kiválasztott Δt idő elteltével az intervallum előtti X_i értékű maradt. Igy a mátrix főátlójában lévő változók meghatározása a következő módon történik:

$$P_{ii} = 1 - \sum_{j=1}^{N} P_{ji} \qquad (\text{ha } i \neq j) \quad . \tag{6}$$

Mivel ekkor a teljes eseménytér az, hogy az $\eta(t+\Delta t)$ vagy valamely másik értéket vesz fel, vagy a kiindulási marad.

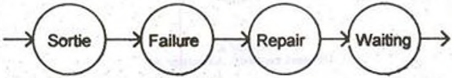
A Markov-mátrix felhasználásával az állapotokban való tartózkodás valószínűségének időbeni változása az

$$\underline{A}(t+\Delta t) = \underline{\underline{P}}^{*}(t)\ \underline{A}(t) \qquad (7)$$

egyenlettel történhet, ahol $\underline{\underline{P}}^{*}$ a $\underline{\underline{P}}$ Markov-mátrix transzponált mátrixa [4].

3. Az üzemeltetés

A repülőtechnika üzemeltetési folyamatát gépenként az úgynevezett üzemeltetési lánccal (amely matematikai szempontból Markov-lánc) ábrázolhatjuk (1. ábra).

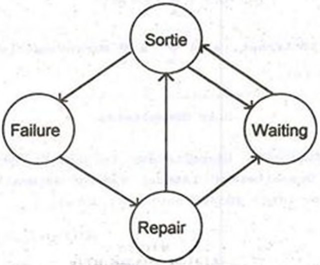


1. ábra
Üzemeltetési lánc

Az üzemeltetési folyamatok rendszerszemléletű vizsgálatakor nem érdekel minket az egyes állapotok gépenkénti tényleges egymásutánisága. A teljes üzemeltetési folyamat üzemeltetési lánccal történő ábrázolása körülményes, ezért érdemes az üzemeltetési folyamatot, a jobb áttekintés érdekében, irányított gráfként ábrázolni.

Az üzemeltetés típusgráfjában az állapotokat a gráf szögpontjai, az állapotváltozásokat pedig a gráf irányitott élei szemléltetik (2. ábra).

Az üzemeltetési lánc vagy a típusgráf vizsgálatakor feltételezzük, hogy az állapotok élesen elhatárolódnak egymástól és az átváltások zérus idő alatt mennek végbe. Az állapotváltozások jellemzésére azok átmenetvalószínűségét használjuk.



2. ábra
Üzemeltetési típusgráf

A P_{ij} átmenetvalószínűség alábbi határértékét az átmenetvalószínűség sűrűségének nevezzük és β_{ij}- vel jelöljük:

$$\beta_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{ij}(\Delta t)}{\Delta t} , \tag{8}$$

ahol:

Δt - a vizsgált időintervallum hossza.

Természetesen ezek a β_{ij} átmenetvalószínűség sűrűségeket - a (3) egyenlettel analóg módon - egy $\underline{B}$ mátrixba rendezhetjük:

$$\underset{=N \times N}{B}(t) = \left[\beta_{ij}(t) \right] . \tag{9}$$

Másik jellemző az i-edik állapotban való tartózkodás relatív gyakorisága, azaz valószínűsége:

$$P_i(\Delta t) \cong \frac{n_i(\Delta t)}{\sum\limits_{j=1}^{N} n_j(\Delta t)} . \tag{10}$$

ahol:

$n_i(\Delta t)$ - a Δt idő alatti i-edik állapotba való lépések száma.

Ezeket a valószínűségeket az állapotokban tartózkodás valószínűségek $\underline{A}$ vektorába tudjuk rendezni.

Az üzemeltetés tárgyának állapotokban való tartózkodását jellemezheti még az állapotokban eltöltött átlagidők $\underline{t}$ vektora is.

Természetesen a $\underline{t}$ vektor helyett, a vizsgálati szempontok függvényében, felhasználható például az állapotba kerüléssel kapcsolatos költségek $\underline{C}$ vagy a munkaráfordítások $\underline{M}$ vektorai is.

A fent említett jellemzők ismeretében meghatározhatjuk az állapotokban való tartózkodás valószínűségek időbeni változását, az üzemeltetés költség vagy munkaidő igényét. Ekkor annyi egyenletből álló egyenletrendszert kapunk, ahány állapotból áll az üzemeltetési folyamat, illetve ahány állapotra bontottuk azt.

A Δt időléptetéssel vizsgált - vagyis a

$$t_n = t_o + n \cdot \Delta t \tag{11}$$

módon disztkrét idejűvé alakított - folytonos idejű folyamat állapotváltási átmenetvalószínűségei a (8) egyenlet felhasználásával a

$$P_{ij}(t) = \beta_{ij}(t)\ \Delta t \tag{12}$$

módon határozható meg. Fontos itt megjegyezni, hogy akkora időközöket kell választanunk, mely eltelte alatt az üzemeltetés tárgya 1 valószínűséggel csak egy állapotváltást fog végezni.

4. A Markov-mátrix alkalmazása stacioner folyamat esetén

Stacioner Markov folyamat esetén, felhasználva az $\underline{\underline{E}}$ egységmátrix tulajdonságát, felírható az

$$\underline{A}(t+\Delta t) = \underline{\underline{P}}^{*}(t)\ \underline{A}(t) = \underline{\underline{E}}\ \underline{A}(t) \tag{13}$$

egyenlet, amit átalakíthatunk az alábbi alakra:

$$\left[\underline{\underline{P}}^{*} - \underline{\underline{E}}\right] \underline{A} = \underline{0} \ . \tag{14}$$

A fenti lineáris egyenletrendszer esetén problémaként jelentkezik, hogy a numerikus algoritmusok az

$$\underline{A} = \underline{0}$$

triviális megoldást adják meg. Viszont könnyen belátható, hogy minket az ettől eltérő megoldás érdekel. Mivel célunk egy könnyen algoritmizálható eljárás kidolgozása volt, az N ismeretlenes (14) egyenletet N+1 ismeretlenesre alakítottuk át. Az $\underline{A}'$ vektor N+1-edik elemének azt a biztos esemény valószínűségét tekintsük, amikor az üzemeltetés tárgya az N állapot valamelyikében tartózkodik. Ekkor az N+1-edik egyenlet a:

$$P_{n+1} = \sum_{j=1}^{N} P_j = 1 \ . \tag{15}$$

Valamint a (14) egyenlet mindegyik sorához adjuk hozzá az N+1-edik (biztos) esemény valószínűségét. Így az egyenletrendszer - kiegészítve a (15) egyenlettel az alábbi mátrixalakot veszi fel:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} & & & & 1 \\ & \underline{\underline{P}}^{*}-\underline{\underline{E}} & & & \cdot \\ & & & & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & \cdot & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} P_1 \\ \cdot \\ P_N \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} . \qquad (16)$$

Ez a lineáris egyenletrendszer bármely ismert numerikus módszerrel kapott eredménye a (14) egyenlet triviálistól eltérő megoldása lesz.

Az eljárás ellenőrzését a [6] irodalom 506. oldalán található példa alapján végeztük el. A (16) egyenlet megoldása a például a [7] irodalomban is megtalálható LU-felbontással történt. A kapott eredmény relatív eltérései az irodalomtól 10^{-3} nagyságrendűek voltak, melyeket a számítógép numerikus hibájának tekinthetünk. Viszont az irodalomban található algoritmushoz képest nem volt szükség megfontolásokat igénylő egyedi egyenletrendszer megoldásra. Például behelyettesítésre, vagy valamely egyenlet helyett a (15) egyenlet bevezetésére. Meg kell jegyezni, hogy nem a legcélszerűbben választott egyedi algoritmus esetén a megoldás nagyon bonyolulttá, kezelhetetlenné vagy a végeredmény numerikusan pontatlanná válhat.

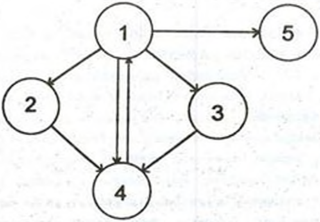
A fenti módon kapott eredmény alapján meghatározható az állandósult üzemeltetési folyamat költség vagy munkaóra igénye.

5. A Markov-mátrix alkalmazása instacioner folyamatok esetén

Instacioner üzemeltetési folyamat esetén az állapotokban való tartózkodások valószínűségeit a (7) egyenlet felhasználásával határozhatjuk meg. Ekkor minden a (11) egyenlettel meghatározott időpillanathoz tartozó $\underline{\underline{P}}$ mátrix elemeit ki kell számítani.

A repülőgépek háborús körülmények közti üzemeltetésének fél-markovi folyamattal történő közelítése esetén egy instacioner sztochasztikus folyamatot kapunk [5].

A repülőgépek háborús körülmények közti üzemeltetését öt állapotból álló folyamatos idejű diszkrét állapotterű folyamattal modelleztük. Ekkor az üzemeltetési gráf egy öt szögpontból álló irányított gráf, mely a 3.ábrán látható.



3.ábra
Háborús üzemeltetés típusgráfja

1 - bevetés;
2 - "A" típusú javítás vagy javításra várás (javítási átlagidő: 3 óra);
3 - "B" típusú javítás vagy javításra várás (javítási átlagidő: 8 óra);
4 - harckész;
5 - Vissza nem téríthető veszteség.

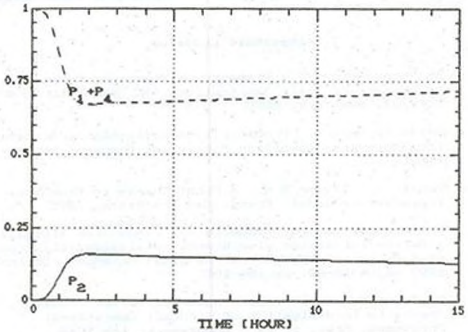
Az állapotokat és az állapotváltozásokat egyenként megvizsgálva határoztuk meg a különböző állapotokra a távozási idők eloszlási jellegét:

- normál eloszlásúak a meghibásodási és veszteségi állapotváltási idők, ahol a távozási idő várható értéke a bevetési idő fele, szórása pedig az egyhatoda (az úgynevezett 3σ szabály alapján);

- a javítások tartózkodási idejei exponenciális eloszlásúak, a gyakorlati tapasztalatok és az üzemeltetéselméleti szakirodalmak alapján;

- a bevetés és az üzemképes állapotok közötti váltások egységugrás jellegűek, mert így lehet modellezni, hogy a feladatra a repülőgépek egyszerre - pontosabban viszonylag rövid időn belül - szállnak fel, illetve érkeznek vissza.

A fentiek alapján felállított instacioner félmarkovi modell eredménye látható a 4. ábrán. A diagram az üzemképes állapotban, vagy a bevetésen való tartózkodás (P_1+P_4), illetve kisjavítási állapotban való tartózkodás (P_2) valószínűségének változását mutatja egy 15 órás hadműveleti nap során. Ebben az esetben repülőgépek egy bevetésen vettek részt a nap első két órájában.



4. ábra
Háborús üzemeltetés fél-markovi modelljének eredménye

A modellt működtető program felhasználásával vizsgálhatjuk a különböző sérülési valószínűségek - azaz eltérő ellenséges fegyverzet - esetén a javító, előkészítő csoportok kialakításának hatásait. Különféle szintű légi hadműveletek esetén előzetes tervezéskor a modell felhasználható a várható műszaki kiszolgálási kapacitás és anyagigény nagyságának és időbeli eloszlásának prognosztizálására is.

6. Összefoglalás

A repülőgépek üzemeltetési matematikailag egy diszkrét állapotterű, utóhatásmentes sztochasztikus folyamat, így az Markov-lánccal approximálható. Rendszerszemléletű vizsgálata az átmenetvalószínűségi mátrix felállítása után mátrixalgebrai műveletekkel oldható meg. Jelen tanulmány szemlélteti a Markov-mátrix felhasználásának lehetőségét mint stacioner, mint instacioner folyamat esetén. Könnyen algoritmizálható módszert mutat be állandósul üzemeltetési folyamat matematikai modellezésére. A példákon kívül bemutatja a Markov--folyamatok elméletének gyakorlati alkalmazási lehetőségeit is.

Felhasznált irodalom

1 - Bharucha-Reid A.T., Elements of Theory of Markov Processes and Their Applications, MC GRAW-HILL BOOK COMPANY, New York, 1960.

2 - Helstrom Carl W., Probability and Stochastic Processes for Engineers, Macmillan Publishing Company, New York 1984.

3 - Karlin S., Taylor H.M., A First Course in Stochastic Processes, Academic Press, San Francisco, 1975.

4 - Dr. Pokorádi László, Üzemeltetési rendszerek vizsgálata a Markov-folyamatok elméletének alkalmazásával, Proc. of X. Hungarian Days of Aeronautical Sciences, Szolnok 1993 május 19-20, pp.154-165.

5 - Dr. Pokorádi László, Application of Markov Process Theory to Investigation of Aircraft Operational Processes, Proc. of 19th Congress of the ICAS, Anaheim, 1994 szeptember 18-23, pp.2172-2180.

6 - Dr. Rohács J. Simon I., Repülőgépek és helikopterek üzemeltetési zsebkönyve, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1989.

7 - Dr. Valkó P. Dr. Vajda S, Műszaki-tudományos feladatok megoldása személyi számítógéppel, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.