HORVÁTH DEZSŐ MK. ALEZREDES

FŐISKOLAI DOCENS

A REPÜLŐGÉP DINAMIKAI TULAJDONSÁGÁNAK VIZSGÁLATA OLDALIRÁNYÚ MOZGÁS ESETÉN

Az oldalirányú mozgás linearizált egyenletei.

Oldalirányú mozgásnak nevezzük a repülőgép olyan mozgását, amelyben a pályaelfordulási (φ), a legyező (ψ) és bedöntési (γ) szögek, valamint az ω_x és ω_y szögsebességek változnak, vezérlő hatásként pedig a csűrők (δ_{cs}) és az oldalkormány ($\delta_{o.k.}$) kitérései szolgálnak.

A repülőgép oldalirányú mozgása kiszámítható, illetve vizsgálható a differenciálegyenletek integrálása utján amennyiben adva vannak a külső zavaró tényezők vagy a vezérlő függvények, a kormányok kitérései idő szerinti függvény formájában: $\delta_{cs} = \delta_{cs}(t)$ és $\delta_{o.k} = \delta_{o.k}(t)$

$$\frac{d\varphi}{dt} = - \frac{g}{v \cos \Theta} \left(\frac{P \sin \alpha_p + Y}{m g} \right) \sin \gamma \tag{1}$$

$$I_x \frac{d\omega_x}{dt} = \Sigma M_x \tag{2}$$

$$I_y \frac{d\omega_y}{dt} = \Sigma M_y \tag{3}$$

$$\frac{d Z_g}{dt} = - v \cos \Theta \sin \gamma \tag{4}$$

$$\frac{d \gamma}{dt} = \omega_x - \omega_y \cos\gamma \operatorname{tg} \vartheta \tag{5}$$

$$\frac{d \psi}{dt} = \omega_y \frac{\cos \gamma}{\cos \vartheta} \tag{6}$$

$$\psi = \varphi + \beta \tag{7}$$

A mozgás dinamikai egyenleteinek jobb oldalai tartalmazzák a Z oldalirányú erőt:

$$Z = c_z \frac{\rho v^2}{2} S = C_z^{\beta} \beta + C_z^{\delta_{o.k}} \delta_{o.k} + C_z^{\delta_{k.v}} \delta_{k.v} \frac{\rho v^2}{2} S \quad (8)$$

ahol: $\delta_{k.v}$ - az oldalirányú kormányszervek közvetlen vezérlésére szolgáló kormányszervek kitérése

az M_x nyomatékot:

$$M_x = m_x \frac{\rho v^2}{2} S\, l = (m^{\beta}_x \beta + m^{\delta_{o.k}} \delta_{o.k} + m_x^{\delta_{cs}} \delta_{cs}) \frac{\rho v^2}{2} S\, l +$$

$$+ \Delta M_{x\,asz.} \quad (9)$$

ahol: l - a repülőgép teljes távolsága;

$m^{\beta}_x; m_x^{\delta_{o.k}}; m_x^{\delta_{cs}}$ - megfelelően a bedöntési nyomaték tényezők β szögű csúszás, az oldalkormány $\delta_{o.k}$ szögre történő kitérése és a csürők δ_{cs} szögre (vagy más keresztirányú kormányszervek megfelelő szögre) történő kitérése miatt létrejövő összetevőket jellemző deriváltak;

$\Delta M_{x\,asz.}$ - kiegészítő bedöntési nyomaték a fékszárnyak aszimmetrikus kiengedése, stb miatt.

valamint az M_y nyomatékot:

$$M_y = m_y \frac{\rho v^2}{2} S\, l = (m^{\beta}_y \beta + m_y^{\delta_{o.k}} \delta_{o.k} + m_y^{\delta_{cs}} \delta_{cs}) \frac{\rho v^2}{2} S\, l +$$

$$+ \Delta M_{y\,asz} \quad (10)$$

ahol: $\Delta M_{y\,asz}$ - kiegészítő legyező nyomaték a féklapok aszimmetrikus kiengedésekor, a függesztmények ledobásakor, stb

m_y; $m_y^{\delta_{o.k.}}$; $m_y^{\delta_{cs}}$ – a legyező nyomaték csúszáskor, az oldalkormány és a csűrők kitérésekor történő létrejöttét jellemző deriváltak.

Általános esetben még működni fognak azonban olyan kiegészítő nyomatékok, amelyek a repülőgép forgásával vannak kapcsolatban.

A bedöntési csillapító nyomaték a következőképpen határozható meg:

$$(M_x)_{\delta_{cs}} = m_x^{\omega_x} \omega_x q S l \tag{11}$$

ahol: ω_x – mértékegységgel jellemző szögsebesség,

– a számításoknál gyakran alkalmazzák a mértékegység nélküli szögsebességeket:

$$\bar{\omega}_x = \frac{\omega_x l}{2 v} \qquad \text{és } \bar{\omega}_y = \frac{\omega_y l}{2 v}$$

Az egyenletekbe a mértékegység nélküli értékeket kell behelyettesiteni.

$$m_x^{\omega_x} \omega_x = m^{\bar{\omega}_x}_x \bar{\omega}_x = m_x^{\bar{\omega}_x} \frac{1}{2 v} \omega_x \tag{12}$$

A spirális bedöntési nyomaték:

$$(M_x)_{\omega_y} = m_y^{\omega_y} \omega_y q S l = \omega_y^{\bar{\omega}_y} \frac{1}{2 v} \omega_y q S l \tag{13}$$

A spirális legyező nyomaték:

$$(M_x)_{\omega_y} = m_y^{\omega_y} \omega_y q S l = m_y^{\bar{\omega}_y} \omega_y \frac{1}{2 v} q S l \tag{14}$$

Spirális legyező nyomaték (akkor keletkezik amikor a repülőgép hossztengelye körül forog ω_x szögsebességgel):

$$(M_y)_{\omega_x} = m_y^{\omega_x}\omega_x\, q\, S\, l = m_y^{\bar{\omega}_x}\, \omega_x \frac{1}{2\, v}\, q\, S\, l \qquad (15)$$

A spirális legyező nyomaték hatása általában olyan, ($\alpha > \alpha_{krit}$), hogy a lefelé haladó szárny igyekszik előremozdulni.

Az $\alpha > \alpha_{krit}$ esetben a spirális nyomaték hatásának iránya megváltozhat és a lefelé haladó szárny mozgása fog elmaradni.

Egyszerűsített módszer az oldalirányú mozgás elemzésére.

Az oldalirányú mozgás egyenletrendszere:

$$- m\, v \frac{d\varphi}{dt} = \Sigma F_z \qquad (16)$$

$$I_x \frac{d\omega_x}{dt} = \Sigma M_x \qquad (17)$$

$$I_y \frac{d\omega_y}{dt} = \Sigma M_y \qquad (18)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \omega_x - \omega_y \cos\gamma\, \mathrm{tg}\, \vartheta \qquad (19)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_y \frac{\cos\gamma}{\cos\vartheta} \qquad (20)$$

$$\psi = \varphi + \beta \qquad (21)$$

A (16) egyenlet pálya szerinti koordináta-rendszerben lett felírva és a tömegközéppont oldalirányú elmozdulását jellemzi a vízszintes síkban. A (17) és (18) egyenlet a fő központi tengelyek szerepét játszó kapcsolt tengelyekre vett vetületekre lett felírva és ennek megfelelően az Ox_1 és Oy_1 tengelyek körüli forgómozgást irják le. A (19),(20) és (21) egyenlet a kinematikai kapcsolatot irja le.

Az oldalirányú mozgás meghatározása.

Induljunk ki abból, hogy a repülés kis bólintási szögű vízszintes repülés, valamint a hosszirányú mozgás paramétereit állandónak vesszük. Igy a $\mathrm{tg}\ \vartheta = \mathrm{tg}\ \vartheta_o = 0$ és $\cos\vartheta = \cos\vartheta_o = 1$.

A vízszintes repülés esetén a (21) egyenletből $\varphi = \psi - \beta$ ezért

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\psi}{dt} - \frac{d\beta}{dt} \tag{22}$$

Az oldalirányú mozgás azon egyenleteit bontsuk ki amelyek az aerodinamikai erőket és nyomatékokat tartalmazzák. A ΣF_{zk} értékét a $\Sigma F_{zk} = Y \sin\gamma + Z \cos\gamma = 0$ kifejezésből határozhatjuk meg. Az oldalirányú nyomatékok kibontott értékeit pedig:

$$\Sigma M_y = (m_y^{\beta}\beta + m_y^{\delta_{o.k}}\delta_{o.k} + m_y^{\delta_{cs}}\delta_{cs}) q S l = 0$$

$$\Sigma M_x = (m_x^{\beta}\beta + m_x^{\delta_{o.k}}\delta_{o.k} + m_x^{\delta_{cs}}\delta_{cs}) q S l = 0$$

kifejezésekből határozhatjuk meg.

A kibontott egyenletek pedig:

$$\Sigma F_{zk} = (Z^{\beta}\beta + Z^{\delta_{o.k}}\delta_{o.k}) \cos\gamma + \sin\gamma \tag{23}$$

$$\Sigma M_x = M_x^{\beta}\beta + M_x^{\omega_x}\omega_x + M_x^{\omega_y}\omega_y + M_x^{\delta_{o.k}}\delta_{o.k} + M_x^{\delta_{cs}}\delta_{cs} \tag{24}$$

$$\Sigma M_y = M_y^{\beta}\beta + M_y^{\omega_y}\omega_y + M_y^{\omega_x}\omega_x + M_y^{\delta_{o.k}}\delta_{o.k} + M_y^{\delta_{cs}}\delta_{cs} \tag{25}$$

Ha a külső függesztmények aszimmetrikusak, a tolóerő szintén és használjuk az oldalirányú erők közvetlen vezérlésére szolgáló kormányszerveket, akkor az egyenletekbe be kell helyettesíteni a megfelelő összetevőket.

A bedöntési szög (γ) nonlineáris függvényeit a következőképpen kapjuk, feltételezve, hogy a kiinduló repülésben $\gamma_o = 0$,

$$\sin\gamma = \sin\gamma_o + \frac{\sin\gamma}{\gamma}\,\Delta\gamma = \sin\gamma_o + \cos\gamma_o\gamma = \gamma$$

$$\cos\gamma = \cos\gamma_o + \frac{\cos\gamma}{\gamma}\,\Delta\gamma = \cos\gamma_o - \sin\gamma_o\,\gamma = 1.$$

A behelyettesítések után az egyenletrendszer valamennyi egyenlete lineárissá válik a keresett mozgásparaméterekre és kormánykitérésekre vonatkoztatva.

Az egyenleteket átírva a következő formába:

$$m\,v\left(\frac{d\psi}{dt} - \frac{d\beta}{dt}\right) - Z^{\beta}\beta - Y\gamma = Z^{\delta_{o.k}}\delta_{o.k} \tag{26}$$

$$I_x\frac{d\omega_x}{dt} - M_x^{\beta}\beta - M_x^{\omega_x}\omega_x - M_x^{\omega_y}\omega_y = M_x^{\delta_{o.k}}\delta_{o.k} + M_x^{\delta_{cs}}\delta_{cs} \tag{27}$$

$$I_y\frac{d\varphi}{dt} - M_y^{\beta}\beta - M_y^{\omega_x}\omega_x - M_y^{\omega_y}\omega_y = M_y^{\delta_{o.k}}\delta_{o.k} + M_y^{\delta_{cs}}\delta_{cs} \tag{28}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \omega_x \tag{29}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_y \tag{30}$$

Így megkaptuk azt a lineáris inhomogén differenciálegyenletekből álló egyenletrendszert, amely az oldalirányú mozgás $\beta(t), \psi(t), \gamma(t)$ és $\omega_y(t)$ paramétereinek változását jellemzi. Az egyenletek jobb oldalai tartalmazzák a $\delta_{o.k}(t)$ és $\delta_{cs}(t)$ vezérlő függvényeket. Az egyenletek száma megegyezik a keresett függvények számával, ebből következik, hogy a rendszer zárt.

Az egyenletek együtthatóinak értékei.

Változó paraméter	Egyenletek sorszáma 1	2	3
β	$-\dfrac{Z^{\beta}}{m\,v_o}$	$-\dfrac{M_x^{\beta}}{I_x}$	$-\dfrac{M_y^{\beta}}{I_x}$
γ	$-\dfrac{\varepsilon\ n_y}{v_o} = -\dfrac{\varepsilon}{v_o}$		
ω_x		$-\dfrac{M_x^{\omega_x}}{I_x}$	$-\dfrac{M_x^{\omega_y}}{I_y}$
ω_y		$-\dfrac{M_x^{\omega_y}}{I_x}$	$-\dfrac{M_y^{\omega_y}}{I_y}$
$\delta_{o.k.}$	$\dfrac{Z^{\delta_{o.k}}}{m\,v_o}$	$\dfrac{M_x^{\delta_{o.k}}}{I_x}$	$\dfrac{M_y^{\delta_{o.k}}}{I_y}$
δ_{cs}		$\dfrac{M_x^{\delta_{cs}}}{I_x}$	$\dfrac{M_y^{\delta_{cs}}}{I_y}$

A (26) egyenletet m v_o-al, a (27) és (28) egyenletet pedig megfelelően I_x-el és I_y-al elosztva és alkalmazva a differenciál operátort $s = d/dt$ és $s^2 = d^2/dt^2$, megkapjuk az oldalirányú mozgást leíró egyenletrendszert:

$$s\,\beta - s\,\psi + n_{1\beta}\,\beta + n_{1\gamma}\,\gamma = n_{1\delta_{o.k}}\,\delta_{o.k} \qquad (31)$$

$$s\,\omega_x + n_{2\beta}\,\beta + n_{2\omega_x}\omega_x + n_{2\omega_y}\,\omega_y = n_{2\delta_{o.k}}\delta_{o.k} + n_{2\delta_{cs}}\delta_{cs} \qquad (32)$$

$$s\,\omega_y + n_{3\beta}\,\beta + n_{3\omega_x}\omega_x + n_{3\omega_y}\omega_y = n_{3\delta_{o.k}}\delta_{o.k} + n_{3\delta_{cs}}\delta_{cs} \qquad (33)$$

A dinamikai tulajdonságokat vizsgálva elsősorban arra kell választ kapni, hogy milyen lesz a mozgás jellege a zavaró hatás megszünése után: lengő vagy aperiodikus, csillapodó vagy növekvő.

Az oldalirányú mozgás differenciálegyenlet rendszer megoldását és annak elemzését egyszerűsítések bevezetésével célszerű elvégezni:

- fogadjuk el, hogy a mozgás egyenesvonalú és vízszintes, azaz $d\varphi/dt=0$;
- az egyszerűsítés azon alapszik, hogy a repülőgép forgómozgása időben gyorsabban végbemegy, mint ahogy a pálya elgörbülése bekövetkezik, és csak a repülőgép Ox_1 és Oy_1 tengelyhez viszonyított forgó mozgását fogjuk tanulmányozni;

A $d\varphi/dt=0$ feltételnek megfelelően a (31) egyenletben szereplő különbség $s\,\beta - s\psi = d\varphi/dt=0$ és így az egyenlet végessé válik és a vizsgálatból kizárható. A (31) egyenletből fejezzük ki a szögsebességeket $\omega_x = s\,\gamma$ és $\omega_y = s\,\beta$;

- hanyagoljuk el a spirális nyomatékok hatását, feltételezve, hogy $n_{2\omega_y} = 0$ és $n_{3\omega_x} = 0$.

Az egyszerűsítéseket elvégezve kapjuk:

$$s^2\, \gamma + n_{2\omega_x}\, s\, \gamma + n_{2\beta}\, \beta = 0 \tag{34}$$

$$s^2\, \beta + n_{3\omega_y}\, s\, \beta + n_{3\beta}\, \beta = 0 \tag{35}$$

Mindkét egyenlet másodrendű, ezért az egyenletrendszer negyedrendű. Ebből következik, hogy a keresett függvények mindegyikére vonatkozó megoldás négy részmegoldásból tevődik össze és $C\, e^{\lambda t}$ exponenciális függvény formájú:

$$\gamma(t)=\gamma_1(t)+\gamma_2(t)+\gamma_3(t)+\gamma_4(t) \tag{36}$$

$$\beta(t)=\beta_1(t)+\beta_2(t)+\beta_3(t)+\beta_4(t) \tag{37}$$

Oldjuk meg a differenciálegyenleteket. Emeljük ki γ és β ismeretlen függvényeit:

$$(\, s + n_{2\omega_x}\,)\, s\, \gamma + n_{2\beta}\, \beta = 0 \tag{38}$$

$$(\, s^2 + n_{3\omega_y}\, s + n_{3\beta}\,)\, \beta = 0 \tag{39}$$

Irjuk fel és tegyük nullával egyenlővé a rendszer karakterisztikus determinánsát(s helyett a karakterisztikus egyenlet λ gyökének értékét írjuk fel):

$$\begin{vmatrix} (\, \lambda + n_{2\omega_y}\,)\, \lambda\, ; & n_{2\beta} \\ 0 & ;\, \lambda^2 + n_{3\omega_y} + n_{3\beta} \end{vmatrix} = 0$$

A következő karakterisztikus egyenletet kapjuk:

$$(\lambda^2 + n_{3\omega_y} \lambda + n_{3\beta}) (\lambda + n_{2\omega_x}) \lambda = 0 \qquad (40)$$

A karakterisztikus egyenlet negyedrendű (négy λ gyököt kapunk, így a differenciál egyenletek négy megoldását):

$$\gamma = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 e^{\lambda_3 t} + C_4 e^{\lambda_4 t} \qquad (41)$$

$$\beta = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + A_3 e^{\lambda_3 t} + A_4 e^{\lambda_4 t} \qquad (42)$$

A bevezetett egyszerűsítések miatt a (39) egyenlet nem tartalmazza a γ változását. Ez azt jelenti, hogy az egyenlet az izolált csúszó vagy legyező mozgást jellemzi, azaz a repülőgép Oy_1 tengely-körüli elfordulását. Ebből következik, hogy a csúszásszög változását egy másodrendű egyenlet jellemzi (két részmegoldás lesz, a korábban feltételezett négy helyett):

$$\beta = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \qquad (43)$$

Megjegyzés! γ bedöntési szög esetében mind a négy megoldás létezik. A megoldás közül kettő a β-ra kapott megoldással analóg és a karakterisztikus egyenlet λ_1 és λ_2 gyökének felel meg. Két megoldás pedig csak a bedöntési szögre vonatkozik és a λ_3 illetve λ_4 gyököknek felel meg.

A (40) karakterisztikus egyenlet gyökeit meghatározva:

$$\lambda^2 + n_{3\omega_y} \lambda + n_{3\beta} = \lambda^2 + 2\, n_{o\ old.i}\, \lambda + \Omega^2_{o\ old.i} = 0 \qquad (44)$$

$$\lambda + n_{2\omega_x} = 0 \tag{45}$$

$$\lambda = 0 \tag{46}$$

$$\lambda_{1,2} = - n_{o\ old.i} \pm \sqrt{n^2_{o\ old.i} - \Omega^2_{o\ old.i}} \tag{47}$$

$$\lambda_3 = - n_{2\omega_x} \tag{48}$$

$$\lambda_4 = 0 \tag{49}$$

Következtetés!

A karakterisztkus egyenlet gyökeinek értéke meghatározza az oldalirányú mozgás lehetséges formáit,zavaró tényező hatására.Az első gyökpár (λ_1 és λ_2) konjugált komplex szám is lehet - így lengések jönnek létre.Ha λ_1 és λ_2 valós gyök,akkor az összetevő mozgások és eredő mozgás is aperiodikus lesz.

Általában a repülőgépek λ_1 és λ_2 gyökökkel jellemzett zavaró tényező hatására létrejött mozgása rövid periodusú lengések formájában jelentkezik.

A λ_3 és λ_4 valós gyök,ebből következik,hogy aperiodikus mozgást jellemeznek (csak a bedöntési szögekre vonatkozóan):

$$\gamma_3 = C_3\, e^{-n_{2\omega_x} . t} = C_3\, e^{\frac{M_x^{\omega_x}}{I_x} . t} \tag{50}$$

$$\gamma_4 = C_4\, e^{o} = C_4 \tag{51}$$

A γ_3 megoldás gyorsan csillapodó aperiodikus bedöntési mozgásnak felel meg (ha a repülőgépnek forgást adunk a hossztengelye körül,akkor az gyorsan megszünik az (M_x $)_{\omega_x}$ bedöntési csillapitó nyomaték hatására). Ez a mozgásforma a kis oldalirányú mozgáshoz tartozik.

A $\gamma_4 = C_4$ megoldás azt mutatja, hogy az oldalirányú mozgás a zavaró tényező megszünése után a bedöntési szög (γ) nem nullához, hanem valamilyen állandó értékhez tart. Ebből következik, hogy a legyező mozgás után egy spirális mozgást lehet megfigyelni, mivel állandó bedöntési szög (γ) mellett a repülőgép állandósult süllyedő spirál végrehajtásába kezd. A spirális mozgás nem feltétlenül a lengő mozgás folytatása. Az ilyen mozgás létrejöhet a lengőmozgástól különállóan is, ha zavaró hatásként nem a csúszás szerint, hanem a bedöntés szerinti eltérés szolgál.

Az oldalirányú mozgás lehetséges eseteit közelítő eljárással vizsgálva, a bedöntési szögre egy $\gamma_4 = C_4 = \text{const.}$ állandó összetevőt kapunk. Ha az egyenesvonalúan és vízszintesen repülő repülőgépet bedöntjük, akkor a pálya görbevonalúvá és süllyedővé válik, vagyis spirál alakú lesz. A legyező szög folyamatosan növekedni fog.

A repülőgép oldalirányú mozgását vizsgálva megállapíthatjuk, hogy ez a mozgás lehet lengő jellegű vagy aperiodikus. A csúszásszög és a legyezőszög szerinti lengések akkor keletkeznek, ha a repülőgép nagy útirányú stabilitással és viszonylag kis legyezés csillapítással rendelkezik. A lengések másik lehetséges esete az, amikor kicsi az útirányú stabilitás és nagy a keresztirányú stabilitás. Általános esetben lengőmozgást gerjeszthet mindkét felsorolt ok. Az aperiodikus spirális mozgás abban az esetben lesz növekvő, ha nagy az útirányú és kicsi a keresztirányú stabilitás. Az ilyen mozgás mintegy a rövidperiodusú lengések folytatásaként tekinthető.

FELHASZNÁLT IRODALOM

1. A.M.Taraszenkov és mások:Dinamika paljota i bojevovo manyovrivanyijá letatyelnih apparatov.
Moszkva,1984.Zsukovszkij Akadémia
2. A.A.Kraszovszkij:Szisztyémi avtomacsiszkovo upravlényijá poljotom pilotyirujemih letatyelnih apparatov.
Moszkva,1971.Zsukovszkij Akadémia
3. V.Sz.Medvegyev és mások:Konsztrukcijá letatyelnih apparatov
Moszkva,Zsukovszkij Akadémia
4. A.Sz.Daskevics és mások:Aviacionyije avtomaticseszkije usztrojsztva.
Moszkva,Honvédelmi Minisztérium
5. Kraszovszkij H.H.:A mozgás vezérlésének elmélete.
Moszkva,1968.NAUKA
6. A.M.Mhitapjána szerkesztésében:Dinamika poljota.
Moszkva,1971.Masinosztroenyije.
8. Horváth D.:A vadászrepülőgépeken alkalmazott robotpilóták
Szolnok,KGYRMF,1986
9. N.F.Krasznov,V.N.Kosevoj,A.N.Danyilov,V.F.Zaharcsenko,
E.Je.Borovszkij,A.I.Hlupnov.:Prikladnaja aerodinamika
Moszkva,1974.Viszsaja Skola