Sándor Endre tanszékvezető
főiskolai docens

Szemelvények a Természettudományi tanszék tudományos munkájából

Főiskolánkon - helyzeténél fogva - a tudományos kutatás tekintetében éppen nem az elméleti kutatásokon (nem is említve az alapkutatásokat) van a fő hangsúly, hanem a témák tárgyalásmódjának, a tananyag rendszerbe ágyazásának optimális kimunkálásán kell dolgoznunk. A fő tevékenységi terület tehát, az alkalmazott pedagógia különböző területeinek művelése.

Az ilyen jellegű tudományos kutatásnak, tudományos munkának sok buktatója van, de ugyanakkor vannak olyan területek, amelyek nem egyértelműen kidolgozottak.

A tanszéki tudományos munka e területek egy részét célozta meg, lényegében az alábbi három problémakörben:

1./ Mérés - értékelés,
2./ A problémamegoldó gondolkodás fejlesztése,
3./ Bizonyos témák oktatásmódjának finomítása.

A két utolsó témát illetően inkább a tudományos munka kategóriájába, míg az első téma pedig a tudományos kutatómunka fogalomkörébe tartozik.

ad 1., A mérés és értékelés a pedagógiai munkának meglehetősen neuralgikus pontja. Vannak irodalmak, amelyek e tekintetben adnak iránymutatásokat, pl.:az osztályzatok kialakítására %-os megoszlásban, a Gauss-görbének megfelelően. Ilyen irodalom az Orosz-Nagy-Ágoston szerzőhármas által írott "Mérési módszerek a pedagógiában" c. könyv is. Lényegében ez volt a forrásmunkája a tanszéken folyó ún. "szintek szerinti" vizsgáztatási módszer kidolgozásának. Ez a vizsgáztatási eljárás többé-kevésbé lehetővé teszi az érdemjegy kialakításánál az individuális elemek kiküszöbölését.

Mi a helyzet a dolgozatok értékelésénél? Általánosságban kétféle gyakorlat van. Az egyik (s ez az általánosabb): az értékelés pontozás alapján történik; a másik: a tanár alapvetően érzésekre, benyomásokra támaszkodva dönt az ötfokozatú skála valamely eleme mellett.

Érdekes az a franciaországi elemzés, mely az értékelés megbízhatóságát vizsgálta.

"Kimutatták, hogy ugyanaz a tanár 37 természettudományos dolgozat közül csak hétre írt az előzővel egyező osztályzatot, mikor három év múlva az egyszer már értékelt dolgozatokat újra javíttatták vele (30 esetben 1-től 10 pontig terjedő különbségek voltak). Egy másik tanár 10 hónapi idő után ugyanezen 37 dolgozatból csak hatra írt a 10 hónap előttivel azonos jegyet, a többinél azonban az eltérés nem volt 4 pontnál nagyobb. Lényegesen különböző osztályzatot kapott ugyanaz a dolgozat más és más vizsgáztatóknál: 6 érettségi vizsgáztató tanárral bíráltatták el 100 dolgozatot különböző tárgyakból. Az angolban, a matematikában, a fizikában 8-9 pontig, a latinból való fordításban, a filozófiában és a franciában 12-13 pontig is terjedő eltérések voltak".

"Ezek a következetlenségek olyan írásbeli vizsgák értékelésében jelentkeztek, amelyeknél a feladat azonos volt, és amelyeket névtelenül adtak be, tehát a vizsgázó személyének ismerete nem játszott szerepet az érdemjegy megállapításánál" (Dr. Kiss Árpád).

Ezek a gondok egyszersmind felvetik azt a problémát, hogy egy feladatra adott pontszám mennyire adekvátan tükrözi a megoldásba fektetett szellemi teljesítményt!

Minden mérés nem más, mint a mértékegységgel történő összehasonlítás. Természetesen fizikai jellemzők mérésénél ez az elv nagyszerűen alkalmazható, de mi a helyzet a szellemi teljesítmény mérésénél? Lehet-e ezeket valamilyen "jól definiált(?)" mértékegységgel valóban egzaktan összehasonlítani? Mégis tesszük ezt, hisz többnyire pontozzuk a feladatok megoldásának szintjét. De létezik-e olyan egység - nevezzük ezt 1 pontnak -, amely egy feladatsorozat kapcsán a felhasznált gondolati elemek (pl. algoritmus felállítása), s az ismeretek alkalmazásának mérésére egyaránt alkalmas. A jelenlegi tanszéki munka éppen ennek kiderítésére vállalkozott.

A már említett, méréssel foglalkozó irodalom viszonylag jól kezelhető elveket ad a definíciók és bizonyítások visszaadásának mérésére. E területen az 1 pont mint mértékegység elég markánsan definiálható, s - megkockáztatom - a jelzett két területen kompatibilisnek is tekinthető. Ezen elveket nem rögzítem, csak annyit jegyzek meg, hogy ezek alapján elkészült a matematika tananyag definíció jegyzéke a megállapított pontértékkel együtt.

Egy definíciónak logikai értelemben csak két állapota lehetséges, ti. vagy jó, vagy nem jó. ennek megfelelően értékelése vagy 0 pont, vagy a maximális pont, illetve a jól visszaadott definíciónál 1 pont erejéig csak a szabatos megfogalmazásban lehet különbség.

Lényegesen nagyobb volumenű munka az elmélet alkalmazásának mértékét mérő pontozási elvek megadása. Fontos kérdés pl. - éppen az össszehasonlíthatóság szempontjából - annak eldöntése, hogy egy problémamegoldáshoz szükséges döntésben mi az egység? Mi az a gondolati lépés, ami megfelel egy egységnek? Vagy egy feladat megoldása kivitelezésében mi tekinthető egységnek, s ez kompatibilis-e a gondolati tevékenység egységével?

Elképzelhető, hogy a döntéshez szükséges információtartalmakhoz rendelhető 1-1 egység, de még mindíg éles kérdés a gondolati láncolat észrevételéhez való pontérték hozzárendelése.

A felvállalt tanszéki munka ezek tisztázására törekszik, ha egyáltalán ezek a kérdéskörök tisztázhatók. Az egységes méréshez és értékeléshez azonban mindenképpen szükséges viszonylag jól kezelhető rendezőelveket adni. Pl.: Megállapodhatunk abban is, hogy a középiskolai ismeretek helyes kivitelezése nem pontozható, de az ebben való hibázás mindenképpen pontlevonást igényel!

Az ilyen jellegű munka nyilván sokrétű elemző feladatot szab. A végső álláspont kialakításához sok, tanszéken belüli egyeztető megbeszélésre, elegendő példaanyag kidolgozására és vélemények ütköztetésére van szükség. Sajnos a docimológiával foglalkozó irodalmak ilyen jellegű kérdésekre még nem adtak egyértelmű választ. Kialakult gyakorlatok vannak, de ezeknek éles kritikáját adta az említett franciaországi felmérés. Szükséges tehát foglalkoznunk a pontozási rendszer kialakításának módjával.

"Nem arról van szó, hogy egy megállapított pontozási rendszer nem mutat különbözőséget a teljesítmények között, de gyakran pontosan azokat a jegyeket képtelenek érvényesen, megbízhatóan feltárni, amelyek egy döntésnél meghatározhatók lehetnek" (Dr. Kiss Árpád).

Ahogy a felhozott felmérés is mutatja, nem hagyatkozhatunk pusztán a praxisból fakadó pontértékek megállapítására, még akkor sem, ha valaki rendkívül nagy gyakorlattal rendelkezik. A mérés objektivitása a mérőeszköz egzakt voltán, és a mérőeszköznek a mérendő mennyiséggel való összehasonlíthatóságán múlik.

Jelenleg a teljesítményorientált világban általános probléma, hogy az objektivitás csak igen kevéssé biztosítható. Ennek természetesen vannak individuális okai is, de olyan vonzata is van, hogy: "A legalább általános tanulmányi eredményért ugyanis a pedagógust is felelőssé teszik, a pedagógus munkáját tanulói elért tudásszintje alapján minősítik" (Dr.Kiss Árpád). Ez a minősítés nem feltétlen ad tiszta képet egy pedagógusi munkáról, mert érvényes Dr.Kiss Árpád alábbi megállapítása:

"A pedagógus, nem ösztönző környezetben kitűnő tanítás és rendkívüli erőfeszítések ellenére is érhet el közepes, sőt gyenge tanulmányi eredményt".

Természetesen egy objektív mérési rendszer kimunkálása köteles a fenti negatív tényezőket figyelmen kívül hagyni, kötelessége, hogy az individuális befolyásokat a minimálisra csökkentse, s helyes kimunkálása esetén a pontérték megállapítása tanártól független legyen és az ezek alapján adott osztályzat valóban adekvátan tükrözze a tudásszintet.

Ezek a tények feltétlen alapjai az egységes követelménytámasztásnak, melyen a tanszék állománya évek óta munkálkodik.

ad 2., A problémamegoldó gondolkodás, a teljesítőképes tudás pusztán csak rutinfeladatok megoldása, megoldatása kapcsán nem alakítható ki. Kifejezetten pedagógiai hibának kell elkönyvelnünk, ha egy elmélet alkalmazását - főként az eredményesség (?) elérése érdekében - rutinfeladatok megoldására korlátozzuk.

A valóság, a műszaki élet aligha szállít készen olyan problémát, mely szinte az unásig gyakorolt, immár gondolkodást nem igénylő alkalmazással megoldható. Ez nem azt jelenti, hogy rutinfeladatok megoldására nincs szükség! Szerepük csak annyi, hogy egy tanult eljárás alkalmazásának gyakorlását segítik elő. Önmagukban azonban nem képesek a problémamegoldó gondolkodás kifejlesztésére.

A valóságban az oktatott anyag részei beágyazódnak egy problémakörbe, s csak részfeladatként jelentkezhet pl. akár egy deriválási, egy integrálszámítási feladat, vagy akár egy differenciálegyenlet megoldása. A problémamegoldó gondolkodás fejlesztése érdekében tehát célszerű olyan feladatokat is konstruálni, melyekbe valamilyen formába beágyazódnak az oktatott számítási eljárások, s azokat a megoldáshoz onnan ki kell bontani.

Lényegében ilyen gondolatok tanszéki terméke egy feladatsorozat, melyből példaként szolgáljon az alábbi három feladat.

1./ Rajzolható-e egy egyenlőszárú derékszögű háromszög valamely csúcsával az $X \geq 0$ félsíkon az $y = \frac{2}{x-1}$ és az $y = \frac{x^3}{4}$ görbék metszéspontjába úgy, hogy a háromszög oldalai ne messék a görbéket? (Ez hogyan tehető meg?)

2./ Van-e közös pontja az $F(t)=8\cos t\,\bar{i} + 8\sin t\,\bar{j}$ síkgörbének és az $xy' + 2y = \frac{x^2}{4}$ differenciálegyenlet $P_0(1;17)$ ponton átmenő megoldás görbéjének?

3./ Tudjuk, hogy annak az $f(x)$ függvénynek a görbéje, mely érintőjének iránytangense minden ponton $\frac{3}{2}x+2$, a $[0;2]$ intervallummal $\frac{40}{3}$ nagyságú területet zár közre. Van-e olyan pont a számsíkon, amelyen az $y'-3y=-9x^2$ differenciálegyenlet olyan partikuláris megoldásgörbéje halad át, amely megegyezik $f(x)$-szel? (Ezek hol helyezkednek el?).

Az első feladat lényegében differenciálszámítási és vektoralgebrai apparátus felhasználását teszi szükségessé. Fel kell ismernie a hallgatónak, hogy a feladat a differenciálhányados geometriai jelentése alapján oldható meg.

A második feladat a differenciálegyenlet partikuláris megoldásának meghatározásán túl, igényli a megoldásgörbe szélső értékének vizsgálatát is.

A harmadik feladat összekapcsolja a differenciál-, az integrálszámítás és a differenciálegyenletek különböző eljárásait, ugyanakkor a kérdés megválasztása még megkívánja egy matematikai modell megteremtését is.

ad 3., A foglakozások megtartásának egyik fontos kérdése a témához és a hallgatók felkészültségéhez illeszkedő módszerek megválasztása. Itt a módszert szélesebb értelemben értem. Nem csak magát az oktatási módszert (a szakdidaktikát), hanem egy téma exponálási lehetőségei közötti megfelelő választást is. Nevezetesen egy téma felvázolásának olyan módszerére gondolok, amely az eddigi gyakorlathoz képest - vélhetően - a megértés tekintetében nagyobb hatékonyságot biztosít. Természetesen e választott - az eddigiektől eltérő - tárgyalásmód nem sértheti a tudományosság elvét.

Ilyen tanszéki törekvésből fakadt pl. a deriválható függvények konvexitásának vizsgálatára vonatkozó tétel olyan bizonyítása, mely az általunk ismert szakirodalomban nem található.

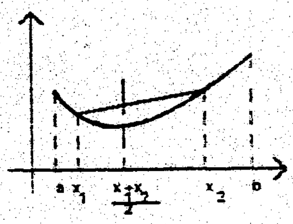
Ez a tétel a következőt mondja:

Legyen az $f(x)$ függvény az értelmezési tartományának valamely $[a;b]$ részintervallumán legalább kétszer deriválható. Az $f(x)$ függvény akkor is csak akkor konvex az $[a,b]$-on, ha ott minden $x \in [a,b]$ esetén $f''(x) \geq 0$.

E tétel klasszikus bizonyításának megértése a hallgatók számára nehézségeket okozott, így ennek érthetőbbé tétele új gondolatot szült, mely az alábbi definíción alapszik.

A folytonos $f(x)$ függvény az értelmezési tartományának $[a,b]$ intervallumán konvex, ha minden $[a,b]$ intervallumbeli x_1 és x_2-re fennáll az alábbi tulajdonság:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$



Szemléletesen ez a definíció azt mondja, hogy konvex függvényeknél a változó bármely két értékének számtani középéhez tartozó függvényérték nem nagyobb a két változóhoz tartozó függvényértékek számtani közepénél.

A bizonyítás lényegében azon alapszik, hogy a fenti definíció felhasználásával megmutatjuk: az $f(x)$ konvexitásából $f'(x)$ monoton növekedő volta következik, s megfordítva, ha $f'(x)$ monoton nő, akkor ott $f(x)$ konvex.

Bizonyítás:

Szükségesség: Ha $f(x)$ konvex az $[a,b]$-on, akkor ott $f'(x)$ monoton nő.

Biz.: Legyen $\Delta x > 0$ teteszőleges és $\forall x$-re $[x-\frac{\Delta x}{2}, x + \frac{\Delta x}{2}] \subset [a,b]$.

Ekkor a feltétel miatt

$$f(x) = f\left[\frac{x + \frac{\Delta x}{2} + x - \frac{\Delta x}{2}}{2}\right] \le \frac{f\left[x + \frac{\Delta x}{2}\right] + f\left[x - \frac{\Delta x}{2}\right]}{2},$$

azaz

$$2f(x) \le f\left[x = \frac{\Delta x}{2}\right] + f\left[x - \frac{\Delta x}{2}\right].$$

Rendezve

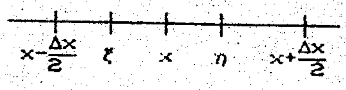
$$f(x) - f\left[x - \frac{\Delta x}{2}\right] \le f\left[x - \frac{\Delta x}{2}\right] - f(x).$$

Osztva mindkét oldalt $\frac{\Delta x}{2}$ (>0)-vel

$$\frac{f(x) - f(x - \frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}} \le \frac{f(x + \frac{\Delta x}{2}) - f(x)}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

A Lagrange-tétel szerint létezik olyan ξ és η, hogy

$\xi \in \left[x - \frac{\Delta x}{2}; x\right]$ és $\eta \in \left[x; x + \frac{\Delta x}{2}\right]$,



melyekre

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(x - \frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}}, \text{ illetve}$$

$$f'(\eta) = \frac{f(x + \frac{\Delta x}{2}) - f(x)}{\frac{\Delta x}{2}}, \text{ s így}$$

$$f'(\xi) \le f'(\eta), \text{ azaz}$$

$f'(x)$ monoton növekedő.

<u>Elégségesség:</u> Ha $f'(x)$ monoton nő az $[a,b]$-on, akkor ott $f(x)$ konvex.

<u>Biz.:</u> Legyen $\Delta x > 0$ tetszőleges, amelyre $[x-\frac{\Delta x}{2}, x+\frac{\Delta x}{2}] \subset [a,b]$ minden x-re, továbbá ξ és η a Lagrange feltételt kielégítő olyan változók, melyekre $x-\frac{\Delta x}{2} \le \xi < x < \xi \le x+\frac{\Delta x}{2}$. Ekkor $f'(x)$ monoton növekedése miatt $f'(\xi) \le f'(\eta)$.

A Lagrange-tétel szerint

$$f'(\eta) = \frac{f(x)+f(x-\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}} \text{ és}$$

$$f'(\xi) = \frac{f(x-\frac{\Delta x}{2})-f(x)}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Így

$$\frac{f(x)-f(x-\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}} \le \frac{f(x-\frac{\Delta x}{2})-f(x)}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Szorozva $\frac{\Delta x}{2}$ (>0)-vel

$$f(x)-f(x-\frac{\Delta x}{2}) \le f(x-\frac{\Delta x}{2})-f(x)$$

Rendezve:

$2f(x) \le f(x+\frac{\Delta x}{2}) + f(x-\frac{\Delta x}{2})$, így

$$f(x) = f\left(\frac{x-\frac{\Delta x}{2} + x + \frac{\Delta x}{2}}{2}\right) \le \frac{f(x+\frac{\Delta x}{2})+f(x-\frac{\Delta x}{2})}{2}$$

Kaptuk az $f(x)$ függvény az $[a;b]$ intervallum minden $[x-\frac{\Delta x}{2};\ x+\frac{\Delta x}{2}]$ részintervallumok konvex, tehát $f(x)$ konvex az $[a;b]$-on. Ezzel tételünk bizonyítást nyert.

Az eredeti tételben szereplő $f''(x)$-re vonatkozó állítás már egyszerűen adódik, hisz ha $f'(x)$ monoton nő, ekkor $[f'(x)]' = f''(x) \ge 0$, és megfordítva.

FELHASZNÁLT IRODALOM

Dr. Kiss Árpád: Mérés, értékelés, osztályozás (1978).
Orosz-Nagy-Ágoston: Méréses módszerek a pedagógiában (1971).