HORVÁTH DEZSŐ MK. ALEZREDES
FŐISKOLAI DOCENS

# A REPÜLŐGÉP DINAMIKAI TULAJDONSÁGÁNAK VIZSGÁLATA HOSSZIRÁNYÚ MOZGÁS ESETÉN

## A repülőgép térbeli mozgásának egyenletei

A repülőgép mozgását két mozgás formájában képzelhetjük el: a tömegközéppont adott pályán történő és a repülőgép, mint szilárd test e tömegközéppont körüli mozgása. Ezen mozgások hat szabadságfokkal rendelkeznek.

A tömegközéppont helyzetét egy adott koordinátarendszerhez viszonyítva, lineáris koordináták határozzák meg: a H repülési magasság, X megtett út, Z oldaleltérés. A lineáris koordináták mellett még szögkoordináták is jellemzik a repülőgép helyzetét. Ezen kívül még figyelembe kell venni a repülés azon paramétereit is, amelyek a repülőgép mozgását a levegőhöz viszonyítva jellemzik: v sebesség, $\alpha$ állásszög, $\beta$ csúszásszög.

A kormányzott repülés végrehajtása céljából változtatni kell a repülőgépre ható F erőket és M nyomatékokat. A feladat végrehatása céljából a mozgás pillanatnyi paramétereit állandóan összehasonlítják a szükséges paraméterekkel, majd az összehasonlítás eredményeként vezérlő jeleket alakítanak ki. A repülőgép bonyolult mozgását egy sor egyszerű mozgásra bontják és így tanulmányozzák valamennyit.

A légi járművek repülésdinamikájának vizsgálatát derékszögű és polár koordinátarendszerek segítségével végzik el.

A repülőgép egyenleteinek meghatározására a következő koordinátarendszereket használják fel:

a.) Földi koordinátarendszer.

b.) Földi koordinátarendszer a repülőgép tömmegközéppontú origóval.

c.) A repülőgéppel összekapcsolt koordinátarendszer.

d.) Sebességi koordinátarendszer.

A repülőgép térbeli mozgását tanulmányozva a földi koordinátarendszerhez viszonyítva az idő függvényében, a kinematikai törvényszerűségeket is figyelembe véve két derékszögű koordinátarendszert használnak: $O\ X_o\ Y_o\ Z_o$ földi és $O\ X_1\ Y_1\ Z_1$ repülőgéppel összekapcsolt koordinátákat.

A repülőgép tömegközéppontját az $O\ X_o\ Y_o\ Z_o$ koordináta rendszerben három lineáris koordináta: L megtett út, Z oldaleltérés, H repülési magasság, és a repülőgéppel összekapcsolt $O\ X_1\ Y_1\ Z_1$ koordinátáknak, a földi koordináta rendszerhez viszonyított szögkoordináták: $\psi$ irány, $\vartheta$ bólintási és $\gamma$ bedöntési szöge határozzák meg.

A repülés folyamán fontos paraméter az $\alpha$ állásszög és a $\beta$ csúszásszög.

Kinematikai összefüggés, amely összekapcsolja a $\vartheta$ bólintási $\alpha$ állás- és $\Theta$ pályaszögeket:

$$\vartheta = \Theta + \alpha$$

A repülőgép földi koordinátarendszerhez viszonyított mozgásának teljes elemzéséhez a kinematikai egyenletek nem elegendőek, szükséges még ismerni a repülőgépre ható erők és nyomatékok megoszlását. Ezek a repülőgép stabilitását és kormányozhatóságát határozzák meg.

A d i n a m i k a a rendszerek mozgása közötti kapcsolatot a rájuk ható erők és nyomatékok figyelembevételével vizsgálja, a repülőgép térbeli mozgását leíró matematikai modell létrehozását teszi lehetővé.

A repülőgép térbeli mozgását hat dinamikai (1,2) és hét kinematikai (3,4,5,6,7,8) egyenlet írja le, összesen 15 ismeretlennel.

**Dinamikai egyenletek:**

$$\left.\begin{aligned} m\,( \dot{V}_x + V_z\,\omega_y - V_y\,\omega_z ) &= \sum_{i=1}^{n} F_{ix} \\ m\,( \dot{V}_y + V_x\,\omega_z - V_z\,\omega_x ) &= \sum_{i=1}^{n} F_{iy} \\ m\,( \dot{V}_z + V_y\,\omega_x - V_x\omega_y ) &= \sum_{i=1}^{n} F_{iz} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{\omega}_x I_x + ( \omega_x\omega_y - \dot{\omega}_y ) I_{xy} + \omega_y\omega_z ( I_z - I_y ) &= \sum_{i=1}^{n} M_{ix} \\ \dot{\omega}_y I_y + \omega_x\,\omega_z ( I_x - I_z ) - I_{xy} ( \omega_y\,\omega_z + \dot{\omega}_x ) &= \sum_{i=1}^{n} M_{iy} \\ \dot{\omega}_z I_z + \omega_x\,\omega_y ( I_y - I_x ) + ( \omega_y^2 - \omega_x^2 ) I_{xy} &= \sum_{i=1}^{n} M_{iz} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Az (1,2) egyenletrendszereket a repülőgép mozgását leíró dinamikai egyenleteknek nevezzük. A hat differenciálegyenlet, hat ismeretlennel rendelkezik: $V_x$ (t); $V_y$ (t); $V_z$ (t); $\omega_x$ (t); $\omega_z$ (t); $\omega_y$ (t). Bizonyítható, hogy a (2) egyenletrendszerben lévő

$$\omega_y\,\omega_z\,( I_z - I_y ); \qquad I_{xy}\,( \omega_x\,\omega_y - \omega_y );$$

$$( I_x - I_z )\,\omega_x\,\omega_z; \qquad I_{xy}\,(\omega_y\,\omega_x + \omega_x );$$

$$( I_y - I_x )\,\omega_x\,\omega_y; \qquad I_{xy}\,( \omega_y^2 + \omega_x^2 );$$

tagok értéke az egyenletrendszerben más tagokhoz viszonyítva elhanyagolható.

**Kinematikai egyenletek:**

$$\bar{V} = \bar{V}_B + \Delta\, \bar{U}_T \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} V_{x_o} &= f_1\,( V_{x_1}; V_{y_1}; V_{z_1};\ \psi; \vartheta; \gamma ) \\ V_{y_o} &= f_2\,( V_{x_1}; V_{y_1}; V_{z_1};\ \psi; \vartheta; \gamma ) \\ V_{z_o} &= f_3\,( V_{x_1}; V_{y_1}; V_{z_1};\ \psi; \vartheta; \gamma ) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\frac{dY_o}{dt} = \frac{dH}{dt} = V_B \sin \Theta \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{\Psi} &= \frac{1}{\cos \vartheta}\,( \omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma ) \\ \dot{\vartheta} &= \omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma \\ \dot{\gamma} &= \omega_x - \operatorname{tg} \vartheta\, ( \omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma ) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\alpha \approx - \frac{V_{B_y}}{V_B}\ ; \qquad \beta \approx \frac{V_{B_z}}{V_B} \tag{7}$$

$$\vartheta = \Theta + \alpha \tag{8}$$

ahol: $\bar{V}_B$ – a repülőgép levegőhöz viszonyított sebességvektora;

A $\bar{U}_T$ – szélsebességvektor;

$V_{x_o}; V_{y_o}; V_{z_o}$ – a föld feletti sebesség összetevőnek $V_{x_1}; V_{y_1}; V_{z_1}$ vetületei a földi koordinátarendszerben

Megjegyzés!

a.) A H repülési magasság időbeni változását az O $X_oY_oZ_o$ koordinátarendszerben a (5) kinematikai egyenlet írja le.

b.) A repülés folyamán fontos paraméter az $\alpha$ állásszög és a $\beta$ csúszásszög. Általában a $\bar{V}$ föld feletti sebességvektor érintőleges a repülés pályájához és nem esik egybe a $\bar{V}_B$ levegőhöz viszonyítottsebességgel, melynek helyzete az $\bar{U}$ szélsebességvektortól függ.

A $\bar{V}_B$ vektor összetevői a repülőgéppel összekapcsolt koordinátarendszerben:

$$\left.\begin{aligned} V_{B_x} &= V_B \cos\beta \cos\alpha \\ V_{B_y} &= V_B \cos\beta \sin\alpha \\ V_{B_z} &= V_B \sin\beta \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

A (9) egyenlet felhasználásával:

$$tg\,\alpha = -\frac{V_{B_y}}{V_{B_x}} \qquad (10)$$

$$\sin\beta = \frac{V_{B_z}}{V_B} \qquad (11)$$

c.) A gyakorlatban az $\alpha$ és a $\beta$ értéke nem haladja meg a $15^o$ értéket, ezért :

$$V_{B_x} \approx V_B \;; \quad tg\,\alpha \approx \alpha \;; \quad \sin\beta \approx \beta.$$

**d.) Abban az esetben, ha a repülőgép turbulens atmoszférában repül, még egy kiegészítő $\alpha_T$ állásszög is létrejön:**

$$\alpha = \alpha_B - \alpha_T$$

ahol: $\alpha_B$ - a repülőgép levegőhöz viszonyított sebességvektora által létrehozott állásszög.

A dinamikai és kinematikai nonlineáris bonyolult egyenleteket elektronikus számítógéppel lehet megoldani. Bizonyos módszerek felhasználásával egyszerűsíthetők (linearizálás módszere a leggyakoribb) a differenciálegyenletek.

A repülőgép szöghelyzete stabilizálásának meghatározásánál nem szükséges a repülőgép koordinátáinak kiszámítása. Különösen akkor, ha a repülési magasság a repülés folyamán jelentősen nem változik. Így, ha nem vesszük figyelembe a levegő sűrűségének a változását, akkor a repülőgépre ható erők és nyomatékok nem függnek a repülési magasságtól és a (3,4,5) kinematikai egyenleteket figyelmen kívül hagyhatjuk.

Bizonyos meghatározott feltételek mellett, a tehetetlenségi kapcsolat figyelmen kívül hagyása esetén, a megmaradt egyenletek két csoportra oszthatók: a hosszirányú és a keresztirányú mozgást leíró egyenletrendszerekre. Ezek mindegyikébe három dinamikai egyenlet tartozik. Az egyenleteket már linearizálhatjuk, és így lehetőség nyílik azok analitikus megoldására.

**Hosszirányú** mozgásnak nevezzük az olyan mozgást, amelyet a repülőgép a függőleges síkban az $\alpha$ állás, $\vartheta$ bólintási, $\theta$ pályaszög, a H repülési magasság változtatása mellett hajt végre, az Y koordináta-tengely mentén.

**Egyenesvonalú**, egyenletes mozgás fogalmán értjük az egyenesvonalú, bedöntés és csúszás nélküli vízszintes repülést.

## A mozgásegyeneletek megoldása.

A dinamikai és kinematikai mozgásegyenletek rendszerét csak akkor lehet megoldani, ha ismert(ek) a repülőgépre ható összes erő(k) és nyomaték(ok). Ez lehetővé teszi, hogy megkapjuk az idő függvényében az összes keresett mozgásparamétert, azaz lehetővé válik a tömegközéppont mozgástörvényének és pályájának, valamint a repülőgép térbeli helyzetének jellemzése. A dinamikai egyenletek jobb oldalai az erők vagy a nyomatékok összegei, és azok pedig meghatározhatók a repülőgépet terhelő erőkre és nyomatékokra ható valamennyi vezérlőszerv kitérései alapján.

Az (1,2) egyenletekben szereplő erők és nyomatékok vetületei az O $X_1$ $Y_1$ $Z_1$ tengelyekre a $V_x; V_y; V_z; \omega_x; \omega_y; \omega_z$ függvényében:

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} F_{ix} &= P_x + F_{B_x}(t) + G_x + R_x = F_x(V_x; V_y; V_z; \omega_x; \omega_y; \omega_z) \\
\sum_{i=1}^{n} M_{ix} &= M_x + M_{Bx}(t) = M_x(V_x; V_y; V_z; \omega_x; \omega_y; \omega_z) \\
\sum_{i=1}^{n} F_{iy} &= P_y + F_{By}(t) + G_y + R_y = F_y(V_x; V_y; V_z; \omega_x; \omega_y; \omega_z) \\
\sum_{i=1}^{n} M_{iy} &= M_y + M_{By}(t) = M_y(V_x; V_y; V_z; \omega_x; \omega_y; \omega_z) \\
\sum_{i=1}^{n} F_{iz} &= P_z + B_{Bz}(t) + G_z + P_z = F_z(V_x; V_y; V_z; \omega_x; \omega_y; \omega_z) \\
\sum_{i=1}^{n} M_{iz} &= M_z + M_{Bz}(t) = M_z(\dot{V}_x; V_x; \dot{V}_y; V_y; \dot{\alpha}; V_z; \omega_x; \omega_y; \omega_z)
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

A $\bar{G} = m\,g$ súlyerő vetületei:

$$\left.\begin{aligned}
G_x &= -m\,g \sin\vartheta \\
G_y &= -m\,g \cos\vartheta_0 \cos\gamma \\
G_z &= m\,g\, \mathrm{cso}\, \vartheta_0 \sin\gamma
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

**<u>Linearizálási módszer</u> (variációs módszer, kis növekmények módszere):**

Tegyük fel, hogy a rendelkezésünkre áll az (1,2) egyenletrendszer valamilyen megoldása. A megoldást úgy tekintjük, hogy az megfelel egy $V_o$ ; $\alpha_o$ ; $V_z = 0; \beta = 0; \omega_{xo} = \omega_{yo} = \omega_{zo} = 0$ paraméterekkel történő egyenesvonalú egyenletes repülés feltételeinek. Az egyenletekben szereplő változók pedig $\Delta$ növekményt kapnak.

$$\left.\begin{array}{lll} V_x = V_{xo} + \Delta V_x; & V_y = V_{yo} + \Delta V_y; & V_z = \Delta V_z; \\ \omega_x = \Delta \omega_x; & \omega_y = \Delta \omega_y; & \omega_z = \Delta \omega_z; \\ \alpha = \alpha_o + \Delta \alpha; & \vartheta = \vartheta_o + \Delta \vartheta; & \psi = \psi_o + \Delta \psi; \end{array}\right\} \quad (14)$$

Az erők és nyomatékok linearizálásánál figyelembe kell venni, hogy azok linearizálása a nyugalmi pontban történik. Ez az adott pillanatban megfelel az egyenesvonalú, egyenletes mozgásnak, csúszás nélkül, így

$$\sum_{i=1}^{n} F_{xo}\ ;\ \sum_{i=1}^{n} F_{yo}\ ;\ \sum_{i=1}^{n} F_{zo}\ ;\ \sum_{i=1}^{n} M_{xo};\ \sum_{i=1}^{n} M_{yo};\ \sum_{i=1}^{n} M_{zo} \quad \text{mennyiségek}$$

azonosan egyenlőek nullával. Ezen erők és nyomatékok (12) differenciáljai:

$$\left.\begin{array}{l} d\left(\sum_{i=1}^{n} F_{ix}\right) = \dfrac{\delta F_x}{\delta V_x} d V_x + \dfrac{\delta F_x}{\delta V_y} d V_y + \dfrac{\delta F_x}{\delta V_z} d V_z + \\ \qquad + \dfrac{\delta F_x}{\delta \omega_x} d \omega_x + \dfrac{\delta F_x}{\delta \omega_y} d \omega_y + \dfrac{\delta F_z}{\delta \omega_z} d \omega_z \end{array}\right\} \quad (15)$$

$$d \left( \sum_{i=1}^{n} M_{ix} \right) = \frac{\delta M_x}{\delta V_x} d V_x + \frac{\delta M_x}{\delta V_y} d V_y + \frac{\delta M_x}{\delta V_z} d V_z +$$

$$+ \frac{\delta M_x}{\delta \omega_x} d \omega_x + \frac{\delta M_x}{\delta \omega_y} d \omega_y + \frac{\delta M_x}{\delta \omega_z} d \omega_z$$

Figyelembe véve a zavarás okozta kis növekményeket, valamint azt, hogy a változók deriváltjai lineárisak, a differenciálokat felválthatjuk véges növekményértékkel.

$$m \left/ \frac{d}{dt} ( \Delta V_x ) - V_{y_o} \omega_z \right/ = \frac{\delta F_x}{\delta V_x} \Delta V_x + \frac{\delta F_y}{\delta V_y} \Delta V_y +$$

$$+ \frac{\delta F_z}{\delta V_z} \Delta V_z + \frac{\delta F_x}{\delta \omega_x} \omega_x + \frac{\delta F_x}{\delta \omega_y} \omega_y + \frac{\delta F_x}{\delta \omega_z} \omega_z -$$

$$- m g \cos \vartheta_o \Delta \vartheta$$

$$m \left/ \frac{d}{dt} ( \Delta V_y ) - V_{x_o} \omega_z \right/ = \frac{\delta F_y}{\delta V_x} \Delta V_x + \frac{\delta F_y}{\delta V_y} \Delta V_y + \frac{\delta F_y}{\delta V_z} \Delta V_z +$$

$$+ \frac{\delta F_y}{\delta \omega_x} \omega_x + \frac{\delta F_y}{\delta \omega_y} \omega_y + \frac{\delta F_z}{\delta \omega_z} \omega_z - m g \sin \vartheta_o \Delta \vartheta$$

$$m \left/ \frac{d}{dt} ( \Delta V_z ) + Y_{y_o} \omega_x - v_{x_o} \omega_y \right/ = \frac{\delta F_z}{\delta V_x} \Delta V_x + \frac{\delta F_z}{\delta V_y} \Delta V_y +$$

$$+ \frac{\delta F_z}{\delta V_z} \Delta V_z + \frac{\delta F_z}{\delta \omega_x} \omega_x + \frac{\delta F_z}{\delta \omega_y} \omega_y + \frac{\delta F_z}{\delta \omega_z} \omega_z +$$

$$+ m g \cos \vartheta_o \gamma \qquad \} (16)$$

$$I_x \frac{d}{dt}(\omega_x) - I_{xy} \frac{d}{dt}(\omega_y) = \frac{\delta M_x}{\delta V_x} \Delta V_x + \frac{\delta M_x}{\delta V_y} \Delta V_y + \frac{\delta M_x}{\delta V_z} \Delta V_z +$$

$$+ \frac{\delta M_x}{\delta \omega_x} \omega_x + \frac{\delta M_x}{\delta \omega_y} \omega_y + \frac{\delta M_x}{\delta \omega_z} \omega_z$$

$$I_y \frac{d}{dt}(\omega_y) - I_{xy} \frac{d}{dt}(\omega_x) = \frac{\delta M_y}{\delta V_x} \Delta V_x - \frac{\delta M_y}{\delta V_y} \Delta V_y + \frac{\delta M_z}{\delta V_z} \Delta V_z +$$

$$+ \frac{\delta M_y}{\delta \omega_x} \omega_x + \frac{\delta M_y}{\delta \omega_y} \omega_y + \frac{\delta M_y}{\delta \omega_z} \omega_z$$

$$I_z \frac{d}{dt}(\omega_z) = \frac{\delta M_z}{\delta V_x} \Delta V_x + \frac{\delta M_z}{\delta V_y} \Delta V_y + \frac{\delta M_z}{\delta V_z} \Delta V_z + \frac{\delta M_z}{\delta V_x} \Delta \dot{V}_x +$$

$$+ \frac{\delta M_z}{\delta \dot{V}_z} \Delta \dot{V}_y + \frac{\delta M_z}{\delta \omega_x} \omega_x + \frac{\delta M_z}{\delta \omega_y} \omega_y + \frac{\delta M_z}{\delta \omega_z} \omega_z$$

$$\Delta \dot{\psi} = \frac{\omega_y}{\cos \vartheta_0} ; \qquad \Delta \dot{\vartheta} = \omega_z ; \qquad \Delta \dot{\gamma} = \omega_z - \text{tang}\ \vartheta_0\ \omega_y$$

$$\Delta \dot{H} = \sin \Theta_0\ \Delta V - V_0 \cos \Theta\ \Delta \alpha + V_0 \cos \Theta\ \Delta \vartheta$$

A repülőgép szimmetriája,csúszásmentessége esetén a

$$\frac{\delta F_z}{\delta V_x} ; \quad \frac{\delta F_z}{\delta V_y} ; \quad \frac{\delta F_z}{\delta \omega_z} ; \quad \frac{\delta M_x}{\delta V_x} ; \quad \frac{\delta M_x}{\delta V_y} ; \quad \frac{\delta M_z}{\delta \omega_z} ; \quad \frac{\delta M_y}{\delta V_y} ; \quad \frac{\delta M_y}{\delta \omega_z}$$

együtthatók is egyenlők nullával.

Kis $V_z$; $\omega_z$; $\omega_y$; értékekenél a $\frac{\delta F_x}{\delta V_z}$ ; $\frac{\delta F_y}{\delta V_z}$ ; $\frac{\delta M_z}{\delta V_z}$ ;

$$\frac{\delta F_x}{\delta \omega_y};\ \frac{\delta F_y}{\delta \omega_x};\ \frac{\delta M_z}{\delta \omega_x};\ \frac{\delta F_x}{\delta \omega_y};\ \frac{\delta F_y}{\delta \omega_y};\ \frac{\delta M_z}{\delta \omega_z}$$ is nullával egyenlő. Hasonlóan elhanyagolhatók: $\frac{\delta F_x}{\delta \omega_z}\omega_z$ és $\frac{\delta F_y}{\delta \omega_z}\omega_z$ tagok is.

A felsorolt egyszerűsítésekből következik, hogy kis $V_x; V_y; V_z; \omega_x; \omega_y; \omega_z$ értékeknél a (16) egyenletrendszer jelentősen le egyszerűsődik két rendszerre, a hosszirányú- és a keresztirányú mozgást leíró rendszerre.

## A hosszirányú mozgást leíró rendszer

$$\left.\begin{aligned}
& m\left(\frac{d}{dt}\Delta V_x - v_{y_o}\omega_z\right) = \frac{\delta F_x}{\delta V_x}\Delta V_x + \frac{\delta F_x}{\delta V_y}\Delta V_y - \\
& \qquad - m\, g \cos \vartheta_o\, \Delta \vartheta \\
& m\left(\frac{d}{dt}\Delta V_y - V_{x_o}\,\omega_z\right) = \frac{\delta F_y}{\delta V_x}\Delta \dot{V}_x + \frac{\delta F_y}{\delta V_y}\Delta V_y - \\
& \qquad - m\, g \sin \vartheta_o\, \Delta \vartheta \\
& I_z \frac{d\,\omega_z}{d\,t} = \frac{\delta M_z}{\delta V_x}\Delta V_x + \frac{\delta M_z}{\delta V_x}\Delta \dot{V}_x + \frac{\delta M_z}{\delta V_y}\Delta V_y + \\
& \qquad + \frac{\delta M_z}{\delta \dot{V}_y}\Delta \dot{V}_y + \frac{\delta M_z}{\delta \omega_z}\omega_z
\end{aligned}\right\}\ (17)$$

Ezek az egyenletek még egyszerűbb formában is felírhatók, ha a repülőgéppel összekapcsolt koordináták helyett, sebességi koordinátákat alkalmazunk.

A repülőgép hosszirányú mozgásának egyenleteit sebességi koordinátákban közvetelenül a (17) a repülőgép mozgásegyenletéből kapjuk. A következő feltételek teljesülése mellett: $V_z = 0; \gamma = 0;$ $V_y = 0$, valamint figyelembe vesszük azt, hogy az 0 X sebességi koordiáta tengely a vízszintes síkban, a horizonthoz viszonyítva $\theta$ pályaszög szerint helyezkedik el.

A feltételek alapján:

$$
\left.
\begin{aligned}
& m \frac{d V}{d t} = F_x ( V_x;\omega_x ) - m g \sin \theta \\
& m V \frac{d \theta}{d t} = F_y ( V_x;\omega_z ) - m g \cos \theta \\
& I_z \frac{d \omega_z}{d t} = M_z \\
& \frac{d V}{d t} = \omega_z \\
& \frac{d H}{d t} = \sin \theta \, \Delta V - V_o \cos \theta_o \, \Delta \alpha + V_o \cos \theta \, \Delta \vartheta
\end{aligned}
\right\} \quad (18)
$$

Hosszirányú mozgás esetén a repülőgépre ható erők és nyomatékok valóságos megoszlása:

$$
\left.
\begin{aligned}
& \Delta \bar{U} = \Delta \bar{U}_B + \Delta \bar{U}_n; \\
& \alpha = \vartheta - \theta \\
& \alpha_B = \alpha + \alpha_T \\
& \omega_z = \frac{d \theta}{d t}
\end{aligned}
\right\} \quad (19)
$$

ahol: $\Delta \bar{U}_B$; $\Delta \bar{U}_n$ - a szélsebességvektor repülésirányával ellentétes és oldalirányú összetevője.

Ha nem vesszük figyelembe az $\bar{X}_b$ homlokellenállást, az $\bar{Y}_B$ felhajtóerőt, az $\bar{M}_{za}$ aerodinamikai nyomatékvektorokat és a $\varphi_P$ hajtómű állásszöget:

$$\left.\begin{aligned} F_z &= P \cos \alpha - X_B \cos \alpha_T + Y_B \sin \alpha_T \\ F_y &= P \sin \alpha + X_B \sin \alpha_T + Y_B \cos\alpha_T \\ \bar{M}_{z_a} &= \bar{M}_z - \bar{M}_{B_z}(t) \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Az egyenesvonalú egyenletes repülés esetén a $\vartheta - \Theta$ szögek különbsége kicsi és az $\alpha$ szög is kicsi, így feltételezhetjük, hogy $\cos \Theta \to 1$; $\cos \alpha_B \to 1$; $\sin \alpha_T \to \alpha_T$, így a (20) egyenlet:

$$\left.\begin{aligned} F_x &= P - X_B + Y_B \alpha_T \\ F_y &= F \alpha + X_B \alpha_T + Y_b \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Az $X_B$; $Y_B$ erők és $M_z$; $M_{B_z}(t)$ nyomatékok a következő fizikai

paraméterek függvényei:

$$\left.\begin{aligned} X_B &= X_B ( V;\alpha;H;\delta_{cs};\delta_{vv};\delta_{ok} ) = C_x \frac{\rho V_B^2}{2} S \\ Y_B &= Y_B ( V;\alpha;H;\delta_{cs};\delta_{vv};\delta_{ok} ) = C_y \frac{\rho V_B^2}{2} S \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

$$P = P ( V;H;\delta_{HVK} )$$
$$\bar{M}_z = M_z ( \alpha;\dot{\alpha};V;\omega_z;H;\delta_{vv} )$$

ahol: $\delta_{cs}$ – a csűrők kitérésének szöge;
$\delta_{vv}$ – a vízszintes vezérsík kitérésének szöge;
$\delta_{ok}$ – az oldalkormány kitérésének szöge;
$\delta_{HVK}$ – a hajtómű vezérlőkar helyzete;
$\rho$ – a levegő sűrűsége [kg/m$^3$];
S – a szárny felülete [m$^2$].

A (18) egyenlet a következőképpen módosul, ha figyelembe vesszük a (21 – 22) egyenleteket, valamint azt, hogy $X = X_B - P = \Delta X ( V_B; \alpha_B; H; \delta_{vv} ); \Delta \alpha_B = \Delta \alpha - \alpha_T; \Delta \alpha = \Delta \vartheta - \Delta \Theta$ :

$$\left.\begin{aligned}
& m \frac{d V}{d t} = - \Delta X ( V_B; \alpha_B; H; \delta_{vv} ) + ( C_y \frac{\rho V_B^2}{2} S ) \alpha_T - m g \sin \Theta \\
& m \frac{d \vartheta}{d t} = P ( V_B; H; \delta_{HVK} ) \alpha_B + C_y \frac{\rho V_B^2}{2} S + ( C_x \frac{\rho V_B^2}{2} S ) \alpha_T - \\
& \qquad - m g \cos \Theta \\
& I_z \frac{d^2 \vartheta}{d t^2} = m_z \frac{\rho V_B^2}{2} b S \\
& \omega_z = \frac{d \vartheta}{d t} \\
& \frac{d H}{d t} = \sin \Theta_o \Delta V - V_o \cos \Theta \Delta \alpha + V_o \cos \Theta_o \Delta \vartheta
\end{aligned}\right\} (23)$$

ahol: b – a szárny közepes aerodinamikai húrja.

A hosszirányú mozgás dinamikai linearizált egyenletei

$$\left.\begin{aligned}
& ( m s + \frac{\delta \Delta_x}{\delta V} ) \Delta V + ( \frac{\delta \Delta_x}{\delta \alpha} - Y_B ) \Delta \alpha + Y_B \Delta \vartheta = \\
& \qquad = - \frac{\delta \Delta_x}{\delta V} \Delta U_x - ( \frac{\delta \Delta_x}{\delta \alpha} - Y_B ) \alpha_T + \frac{\delta P}{\delta \delta_{HVK}} \Delta \delta_{HVK} \\
& - \frac{\delta Y_B}{\delta V} \Delta V - ( m V_o s + \frac{\delta Y_B}{\delta \alpha} + X_B ) \Delta \alpha + ( m V_o s +
\end{aligned}\right\} (24)$$

szerint) és rövid periódusú (állásszög szerint),ha megoldjuk a (27) egyenletet:

$$s\ (\ s^2 + 2\ \xi_{\Phi}\ \omega_K\ s + \omega_{\Phi}^2\ )(\ s^2 + 2\ \xi_K\ \omega_k\ s + \omega_K^2\ ) = 0 \qquad (28)$$

ahol: $\xi_{\Phi};\xi_K;\omega_{\Phi};\omega_k$ – a hosszú periódusú és rövid periódusú mozgások csillapitási együtthatói és körfrekvenciái.

A repülőgépre a repülés folyamán külső zavarások sokasága hat:pl.:vezérlő $\delta_{HVK}$ a hajtómű vezérlésekor,$\delta_{vv}$vízszintes vezérsík kitérése,$\delta_{cs}$ csörők kitérése és a zavaró jelek $V_B,\alpha_T$.

A repülőgép reakcióját valamilyen konkrét jelre a szuperpozíció elve alapján határozhatjuk meg.

A szuperpozíció lényege:ha egy lineáris rendszerre egyidejűleg néhány zavaró jel hat,úgy ezek közös hatása egyenlő minden egyes jel által kiváltott hatás összegével.

A repülőgép reakciója a ráhatásokra a hosszirányú mozgás kinematikai paramétereinek változásával ($\Delta V;\Delta\alpha;\Delta\vartheta;\Delta H$) jellemezhető,amelyeket egyúttal kimenő jeleknek tekintünk.

A repülőgép reakciója a zavaró jelekre meghatározható a megfelelő átviteli függvények segítségével.

Határozzuk meg a $\Delta V$ repülési sebességváltozását a $\delta_{vv}$ vízszintes vezérsík kitérésének következtében.

A keresett átviteli függvény,amely összekapcsolja a $\delta_{vv}(s)$ bemenő jelet a $\Delta V(s)$ kimenő jellel,a következő:

$$W_v^{\delta_{vv}}(s) = \frac{\Delta V(s)}{\Delta\delta_{vv}\ (s)} \qquad (29)$$

$$+ \Delta X ) \Delta \vartheta = \frac{\delta Y_B}{\delta V} \Delta U_x + \left( \frac{\delta Y_B}{\delta \alpha} + X_B \right) \alpha \qquad \Big\} \; (24)$$

$$- \frac{\delta M_z}{\delta V} \Delta V - \left( \frac{\delta M_z}{\delta \dot{\alpha}} s + \frac{\delta M_z}{\delta \alpha} \right) \Delta \alpha + \left( I_z s^2 - \frac{\delta M_z}{\delta V} s \right) \Delta \vartheta =$$

$$= \frac{\delta M_z}{\delta V} \Delta U_x + \left( \frac{\delta M_z}{\delta \dot{\alpha}} s + \frac{\delta M_z}{\delta \alpha} \right) \alpha_T + \frac{\delta M_z}{\delta \delta_B} \Delta \delta_B + M_{B_z}$$

$$- \sin \Theta_0 \, \Delta V + V_0 \cos \Theta \, \Delta \alpha - V_0 \cos \Theta_0 \, \Delta \vartheta + D \, \Delta H = 0$$

ahol: $s = \frac{d}{d\,t}$

$\Delta U_x$ – a $\Delta \bar{U}_B$ vektor vetülete az $0\,X$ tengelyre.

## A repülőgép hosszirányú mozgásának matematikai modellje

A repülép automatikus vezérlését biztosító rendszerek létrehozásának alapja, a repülőgép mozgásának matematikai modellje. Az egyenletek mátrix formában történő vizsgálatához vezessük be a következő jelöléseket:

- $a_{ij}$ – változók a (24) egyenlet bal oldalán lévő változó paraméterekre;
- $c_{ij}$ – együtthatók pedig a külső zavarásokra (aerodinamikai erők és nyomatékok, kormányhatások) vonatkozóan.

Az $a_{ij}$; $c_{ij}$ együtthatók figyelembevételével a (24) egyenletet a következőképpen írhatjuk le:

$$( s + a_{11}) \Delta V + a_{12} \Delta \alpha + a_{13} \Delta \vartheta = c_{11} \Delta U_x - c_{12} \alpha_T +$$

$$+ c_{13} \Delta \delta_{HVK}$$

$$- a_{21} \Delta V - ( s + a_{22} ) \Delta \alpha + ( s + a_{23} ) \Delta \vartheta = c_{21} \Delta U_x +$$

$$+ c_{22} \alpha_T \tag{25}$$

$$- a_{31} \Delta V - ( a_{30} s + a_{23} ) \Delta \alpha + ( s^2 - a_{33} s ) \Delta \vartheta =$$

$$= c_{31} \Delta U_x + ( c_{30} s + c_{32} ) \alpha_T + c_{34} \Delta \delta_{VV} + c_{36} M_{B_z}$$

$$- a_{41} \Delta V + a_{42} \Delta \alpha - a_{43} \Delta \vartheta + s \Delta H = 0$$

A determinánst nullával egyenlővé téve, megkapjuk a mozgás karaterisztikus egyenletét ( s helyett a karakterisztikus egyenlet $\lambda$ gyökének értékét irjuk fel):

$$D(s) = \begin{vmatrix} \lambda + a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ - a_{21} & - (\lambda + a_{22}) & (\lambda + a_{23}) & 0 \\ - a_{31} & - (a_{30}\lambda + a_{32}) & (\lambda^2 - a_{33})\lambda & 0 \\ - a_{41} & a_{42} & -a_{43} & \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{26}$$

A (25) és (26) egyenletrendszerek adják a repülőgép hosszirányú mozgásának matematikai modelljét. A (26) egyenlet írja le a

**nem kormányzott repülőgép hosszirányú mozgásának dinamikáját, nyugalomban lévő (zavarásmentes) atmoszfétában.**

## A hosszirányú mozgás szabályozási modellje

Az átviteli függvények lehetőséget adnak a tranziens (átmeneti) folyamatok és frekvenciajellemzők tanulmányozására. A repülőgép mozgására vonatkozóan pedig a rövid és hosszú periódusú, valamint a bedöntés és elfordulás szerinti mozgásainak vizsgálatára.

A (26) determinánst kifejtve a következő polinomot kapjuk:

$$( s^4 + \lambda_1 s^3 + \lambda_2 s^2 + \lambda s + \lambda_4 ) = 0 \qquad (27)$$

ahol:

$$\lambda_1 = a_{11} + a_{22} - a_{33} - a_{30}$$
$$\lambda_2 = a_{11} a_{22} - ( a_{11} + a_{22} ) a_{33} - a_{32} - a_{30} a_{11} - a_{12} d_{21}$$
$$\lambda_3 = - a_{11} a_{22} a_{33} - a_{33} a_{11} + a_{21} a_{12} a_{33} + a_{21} a_{13} a_{30}$$
$$\lambda_4 = a_{13} a_{21} a_{32}$$

Következtetés!

A karaterisztikus egyenletnek öt gyöke van. Az egyik egyenlő nullával. Ez azt jelenti, hogy a repülőgép semlegesen viselkedik a magasságváltozást illetően ( aerodinamikai erők és nyomatékok nem függenek a magasságtól).

A többi négy gyök komplex konjugált és jelentős mértékben különbözik egymástól. Ezért a hosszirányú mozgás tranziens folyamatát két mozgásformában írhatjuk le: hosszú periódusú (sebesség szerint) és rövid periódusú (állásszög szerint), ha megoldjuk a (27) egyenletet:

$$s\,(\,s^2 + 2\,\zeta_\phi\,\omega_K\,s + \omega_\phi^{\,2}\,)(\,s^2 + 2\,\zeta_K\,\omega_k\,s + \omega_K^{\,2}\,) = 0 \qquad (28)$$

ahol: $\zeta_\phi;\zeta_K;\omega_\phi;\omega_k$ – a hosszú periódusú és rövid periódusú mozgások csillapitási együtthatói és körfrekvenciái.

A repülőgépre a repülés folyamán külső zavarások sokasága hat: pl.: vezérlő $\delta_{HVK}$ a hajtómű vezérlésekor, $\delta_{vv}$ vízszintes vezérsík kitérése, $\delta_{cs}$ csörők kitérése és a zavaró jelek $V_B, \alpha_T$.

A repülőgép reakcióját valamilyen konkrét jelre a szuperpozíció elve alapján határozhatjuk meg.

A szuperpozíció lényege: ha egy lineáris rendszerre egyidejűleg néhány zavaró jel hat, úgy ezek közös hatása egyenlő minden egyes jel által kiváltott hatás összegével.

A repülőgép reakciója a ráhatásokra a hosszirányú mozgás kinematikai paramétereinek változásával $(\Delta V;\Delta\alpha;\Delta\vartheta;\Delta H)$ jellemezhető, amelyeket egyúttal kimenő jeleknek tekintünk.

A repülőgép reakciója a zavaró jelekre meghatározható a megfelelő átviteli függvények segítségével.

Határozzuk meg a $\Delta V$ repülési sebességváltozását a $\delta_{vv}$ vízszintes vezérsík kitérésének következtében.

A keresett átviteli függvény, amely összekapcsolja a $\delta_{vv}(s)$ bemenő jelet a $\Delta V(s)$ kimenő jellel, a következő:

$$W_V^{\delta_{vv}}(s) = \frac{\Delta V(s)}{\Delta\delta_{vv}\,(s)} \qquad (29)$$

A Cramer szabály szerint megoldva a (25) egyenletet a $\Delta V(s)$ kimenő jelhez viszonyítva:

$$\Delta V(s) = \frac{D\,V(s)}{D\,(s)} \qquad (30)$$

ahol: $D\,V(s)$ – a (25) egyenlet determinánsa, amelynél az együtthatók oszlopát felcseréltem a megfelelő zavarások oszlopával ($\Delta\delta_{vv} \neq 0$; $\Delta U_x \neq 0$; $\alpha_T = 0$; $\Delta\delta_{HVK} = 0$).

$$D\,V(s) = \Delta\delta_{vv}\,(s)\,D_v^{\delta_{vv}}\,(s) \qquad (31)$$

így:

$$\Delta\delta_{vv}\,(s) = \frac{D\,V\,(s)}{D_v^{\delta_{vv}}(s)} \qquad (32)$$

A (30) és (32) egyenleteket behelyettesítve a (29) egyenletbe megkapjuk a $\Delta\delta_{vv}(s)$ bemenő és $\Delta V_B$ kimenő jel átviteli függvényét:

$$W_{V_B}^{\delta_{vv}}\,(s) = \frac{D\,V(s)}{D\,(s)}\;\frac{D_V^{\delta_{vv}}(s)}{D\,V(s)} = \frac{D_V^{\delta_{vv}}\,(s)}{D\,(s)} =$$

$$= \frac{s^2 + B_1^V\,s^3 + B_2^V\,s^2 + B_3^V\,s + B_4^V}{s\,(\,s^4 + \lambda_1\,s^3 + \lambda_2\,s^2 + \lambda_3\,s + \lambda_4\,)} \qquad (33)$$

ahol: $B_1{}^V; B_2{}^V; B_3{}^V; B_4{}^V$ – a sebesség szerinti együtthatók

A többi lehetséges átviteli függvény:

$$W_{\alpha}^{\delta_{vv}}(s) = \frac{D_{\alpha}^{\delta_{vv}}(s)}{D(s)} = \frac{s^4 + B_1^{\alpha} s^3 + B_2^{\alpha} s^2 + B_3^{\alpha} s + B_4^{\alpha}}{s(s^4 + \lambda_1 s^3 + \lambda_2 s^2 + \lambda_3 s + \lambda_4)} \tag{34}$$

$$W_{\vartheta}^{\delta_{vv}}(s) = \frac{D_{\vartheta}^{\delta_{vv}}(s)}{D(s)} = \frac{s^2 + B_1 s + B_2}{s(s^4 + \lambda_1 s^3 + \lambda_2 s^2 + \lambda_3 s + \lambda_4)} \tag{35}$$

$$W_H^{\delta_{vv}}(s) = \frac{D_H^{\delta_{vv}}(s)}{D(s)} = \frac{s^3 + B_1^H s^2 + B_2^H s + B_3^H}{s(s^4 + \lambda_1 s^3 + \lambda_2 s^2 + \lambda_3 s + \lambda_4)} \tag{36}$$

Hasonlóan más zavaró hatások $\Delta U_x; \alpha_T; \delta_{HVK}$ átviteli függvényei szél esetén $\alpha_T = 0; \Delta\delta_{HVK} = 0; \Delta\delta_{vv} = 0$, így:

$$\left.\begin{aligned} W_V^{V_x}(s) &= \frac{D_V^{V_x}(s)}{D(s)}; \qquad W_{\vartheta}^{V_x}(s) = \frac{D_{\vartheta}^{V_x}(s)}{D(s)}; \\ W_{\alpha}^{U_x}(s) &= \frac{D_{\alpha}^{U_x}(s)}{D(s)}; \qquad W_H^{U_x}(s) = \frac{D_H^{U_x}(s)}{D(s)}; \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Abban az esetben, ha $\alpha_T \neq 0$; $\Delta\delta_{HVK} = 0$; $\Delta\delta_{vv} = 0; \Delta U_x = 0$ akkor:

$$W_V^{\alpha_T}(s) = \frac{D_V^{\alpha_T}(s)}{D(s)}; \qquad W_\vartheta^{\alpha_T}(s) = \frac{D_\vartheta^{\alpha_T}(s)}{D(s)};$$

$$W_\alpha^{\alpha_T}(s) = \frac{D_\alpha^{\alpha_T}(s)}{D(s)}; \qquad W_H^{\alpha_T}(s) = \frac{D_H^{\alpha_T}(s)}{D(s)}; \tag{38}$$

A HVK elmozdításakor és más zavarás hiánya esetén ($\Delta\delta_{HVK} = 0; \Delta\delta_{VV} = 0; \Delta U_x = 0; \dot{\alpha}_T = 0$):

$$W_V^{\delta_{HVK}}(s) = \frac{D_V^{\delta_{HVK}}(s)}{D(s)}; \qquad W_\vartheta^{\delta_{HVK}}(s) = \frac{D_\vartheta^{\delta_{HVK}}(s)}{D(s)};$$

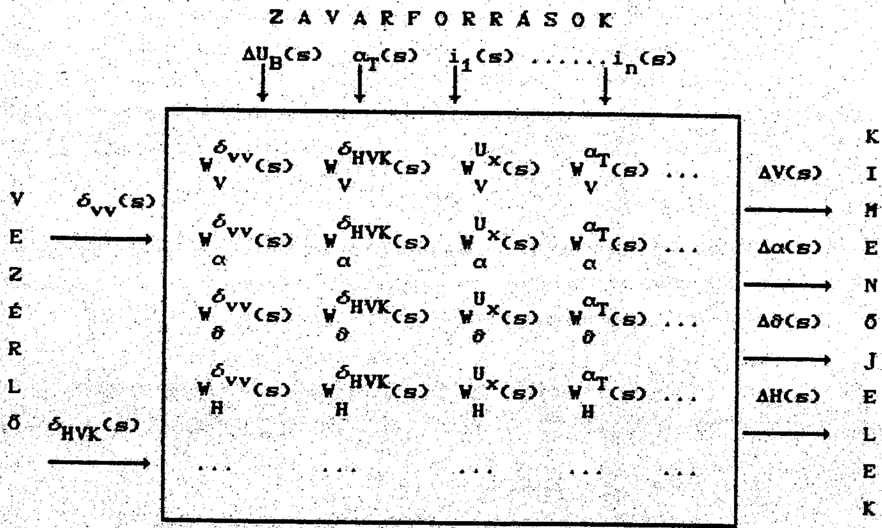
$$W_\alpha^{\delta_{HVK}}(s) = \frac{D_\alpha^{\delta_{HVK}}(s)}{D(s)}; \qquad W_H^{\delta_{HVK}}(s) = \frac{D_H^{\delta_{HVK}}(s)}{D(s)}; \tag{39}$$

## A szabályozási kör mátrix formában

$$\begin{vmatrix} V(s) \\ \alpha(s) \\ \vartheta(s) \\ H(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} W_V^{\delta_{VV}}(s) & W_V^{\delta_{HVK}}(s) & W_V^{U_x}(s) & W_V^{\alpha_T}(s) \\ W_\alpha^{\delta_{VV}}(s) & W_\alpha^{\delta_{HVK}}(s) & W_\alpha^{U_x}(s) & W_\alpha^{\alpha_T}(s) \\ W_\vartheta^{\delta_{VV}}(s) & W_\vartheta^{\delta_{HVK}}(s) & W_\vartheta^{U_x}(s) & W_\vartheta^{\alpha_T}(s) \\ W_H^{\delta_{VV}}(s) & W_H^{\delta_{HVK}}(s) & W_H^{U_x}(s) & W_H^{\alpha_T}(s) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta_{VV}(s) \\ \delta_{HVK}(s) \\ U_x(s) \\ \alpha_T(s) \end{vmatrix}$$

A szuperpozició elvén összeállitott (33,34,35,36,37,38,39,) átviteli függvények alapján létrehozható a repülőgép hosszirányú mozgásának szabályozási modellje az átviteli mátrix tagokkal.

**A hosszirányú mozgás szabályozási modellje**




## FELHASZNÁLT IRODALOM


1. A.M.Taraszenkov és mások: Dinamika paljota i bojevovv manyovroványijá letatyelnih apparatov. Moszkva, 1984. Zsukovszkij Akadémia
2. A.A.Kraszovszkij: Szisztyémi avtomaaticsoszkovo upravlényijá poljotom pilotyirujemih letatyelnih apparatov. Moszkva, 1971. Zsukovszkij Adadémia
3. N.F.Krasznov, V.N.Kosevoj és mások: Prikladnaja aerodinamika Moszkva, 1974. Viszsaja Skola