Dr. Pokorádi László mk. őrnagy, főiskolai docens

A MARKOV-FOLYAMATOK ELMÉLETÉNEK ALKALMAZÁSA A REPÜLŐGÉPEK ÜZEMELTETÉSI FOLYAMATAINAK VIZSGÁLATÁRA

a szerző

19th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences
18-23 September, 1994, Anaheim, California, USA

kiadványában megjelenő

APPLICATION OF MARKOV PROCESS THEORY TO INVESTIGATION OF AIRCRAFT OPERATIONAL PROCESSES

című tanulmányának magyar nyelvű változata

Kivonat

A repülőgépek üzemeltetése egy, jól körülhatárolt diszkrét üzemeltetési állapotokra bontható, sztochasztikus folyamat. Ezt a folyamatot gráfmodell-lel ábrázolhatjuk, és folytonos idejű, diszkrét állapotterű Markov-folyamattal közelíthetjük. Az előadás repülőgépek üzemeltetési folyamatának a markovi és félmarkovi modelljeivel, azok pontosságával foglalkozik és megmutatja az ilyen modellek alkalmazásának lehetőségét egy speciális esetre - a háborús körülmények között történő üzemeltetésre.

Bevezetés

Az olyan sztochasztikus folyamatokat, amelynek jövőbeli alakulását a múltbeli alakulása csak a jelenlegi állapoton keresztül befolyásolja, azaz amelyek utóhatásmentesek, Markov-folyamatoknak nevezzük.[5] Ezen folyamatok elméletének történetét Andrej Andrejevics Markov orosz matematikus munkássága (1856 - 1922) nyitotta meg.

A repülőtechnika háborús körülmények közötti üzemeltetése, - mint általában az üzemeltetés - a repülőgépekre, valamint azok kiszolgálására, a harcfeladatokra való előkészítésükre, különböző nagyságrendű javításukra szolgáló személyekre és előírásokra épülő sztochasztikus folyamat.

Ez a folyamat, amely lényegében a repülőgéppel, vagy annak valamely rendszerével, berendezésével, azaz az üzemeltetés tárgyával, a gyártás és a kiselejtezés között történtek összessége, az üzemeltetési állapotok - időben és gyakoriságban véletlenszerű - egymásutánisága.

Mivel az egyes üzemeltetési állapotból való távozás független az azt megelőző állapotoktól és azok sorrendjétől (azaz a folyamat utóhatásmentes), az üzemeltetés matematikailag folytonos idejű, diszkrét állapotterű Markov-folyamatnak tekinthető. Ez a sztochasztikus folyamat pedig Markov lánccal approximálható.

Az üzemeltetési rendszerről, illetve irányításának hatásosságáról bizonyos jellemzők ismeretében dönthetünk. Jelen esetben ilyen paraméternek tekinthető az adott repülő egység harckész, tehát bevethető gépeinek száma. Ezen jellemzők meghatározása az adott üzemeltetési folyamat rendszerszemléletű vizsgálatakor annak folytonos idejű, diszkrét állapotterű markovi, vagy fél-markovi modelljeinek segítségével történhet.

A Markov-folyamatok

Matematikailag felírva az $\eta(t)$ valószínűségi folyamatot Markov-folyamatnak nevezzük, ha 1 valószínűséggel teljesül minden $t_1<t_2< \dots <t_n<t_{n+1}$ és $X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}$ valós számra a:

$$P\left\{ \eta(t_{n+1}) = X_{n+1} \;\middle|\; \eta(t_1) = X_1 ; \dots ; \eta(t_n) = X_n \right\} =$$

$$= P\left\{ \eta(t_{n+1}) = X_{n+1} \;\middle|\; \eta(t_n) = X_n \right\} \qquad (1)$$

feltételes valószínűségek egyenlősége.[3]

Ha az $\eta(t)$ folyamat a vizsgálati idő alatt bármely pillanatban felvehet valamilyen X értéket, akkor azt folytonos, ha η csak kitüntetett időpontokban rendelkezhet értékkel, diszkrét idejűnek nevezzük. Diszkrét állapotterűnek tekintjük azt a sztochasztikus folyamatot, ahol az η valószínűségi változó lehetséges értékei véges, vagy megszámlálhatóan végtelen elemű halmazt alkotnak.

A véges vagy megszámlálhatóan végtelen - azaz diszkrét - állapotterű, utóhatásmentes sztochasztikus folyamatokat Markov-láncnak nevezzük. Ekkor az (1) egyenletben meghatározott értéket átmenetvalószínűségnek nevezzük:

$$P_{ij}^{n,n+1} = P\left\{ \eta(t_{n+1}) = X_j \;\middle|\; \eta(t_n) = X_i \right\} \quad . \qquad (2)$$

ami annak a valószínűségét fejezi ki, hogy $\eta(t_{n+1}) = X_j$ (amit esetünkben úgy is értelmezhetünk, hogy az üzemeltetés tárgya a t_{n+1} időpillanatban a j-edik állapotban tartózkodik), feltéve, hogy $\eta(t_n) = X_i$.

A fenti $P_{ij}^{n,n+1}$ jelölés azt is mutatja, hogy az átmeneti valószínűség nemcsak az i kezdeti és a j végállapot, hanem az idő (t_n) függvénye is. Ezt a valószínűséget a továbbiakban - az egyszerűség érdekében - a

$$P_{ij}^{n,n+1} = P_{ij}(t_n) = P_{ij}(t) \qquad (3)$$

módon jelöljük.

Véges, N számú állapot esetén a P_{ij} átmeneti valószínűségeket mátrixba szokás rendezni. Ezt a

$$\underset{=N\times N}{P}(t) = \left[P_{ij}(t) \right] \qquad (4)$$

mátrixot a folyamat Markov-mátrixának vagy átmenetvalószínűség mátrixnak nevezzük.

Ha a fenti egylépéses átmenetvalószínűségek függetlenek az időtől, akkor azt mondjuk, hogy a Markov-folyamat stacionárius. Ebben az esetben felírható, hogy

$$P_{ij}^{n,n+1} = P_{ij} \quad , \tag{5}$$

illetve

$$\underset{=N\times N}{P} = \left[P_{ij} \right] \tag{6}$$

mivel az független az n értékétől és P_{ij} annak a valószínűségét jelenti, hogy az $\eta(t)$ értéke X_i-ből X_j-be vált át a $(t_{n+1}; t_n)$ időintervallumban.

Egy Markov-folyamat egyértelműen az állapotokból való távozások eloszlásai és az átmenetvalószínűségek megadásával jellemezhető. Ha állapotokból való távozások eloszlásainak jellegei nem egyeznek meg egymással - legalább egy eltér a többitől - az adott sztochasztikus folyamatot félmarkovinak nevezzük, amelyre később láthatunk majd példát.

Az üzemeltetés folyamat matematikai modellje

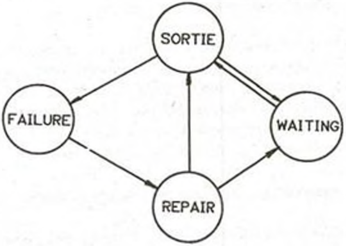
A repülőtechnika üzemeltetési folyamatát gépenként az úgynevezett üzemeltetési lánccal (amely matematikai szempontból Markov-lánc) ábrázolhatjuk (1.ábra).

1.ábra

Az üzemeltetési folyamatok rendszerszemléletű vizsgálatakor nem érdekel minket az egyes állapotok gépenkénti tényleges egymásutánisága. A teljes üzemeltetési folyamat üzemeltetési lánccal történő ábrázolása körülményes, ezért érdemes az üzemeltetési folyamatot, a jobb áttekintés érdekében, irányított gráfként ábrázolni.

Az üzemeltetés típusgráfjában az állapotokat a gráf szögpontjai, az állapotváltozásokat pedig a gráf irányított élei szemléltetik (2. ábra).

Az üzemeltetési lánc vagy a típusgráf vizsgálatakor feltételezzük, hogy az állapotok élesen elhatárolódnak egymástól és az átváltások zérus idő alatt mennek végbe.[2] Az állapotváltozások jellemzésére azok átmenetvalószínűségét használjuk.



2. ábra

A P_{ij} átmenetvalószínűség alábbi határértékét az átmenetvalószínűség sűrűségének nevezzük és β_{ij}- vel jelöljük:

$$\beta_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{ij}(\Delta t)}{\Delta t} \quad , \qquad (7)$$

ahol:

Δt - a vizsgált időintervallum hossza.

Másik jellemző az i-edik állapotban való tartózkodás relativ gyakorisága, azaz valószínűsége:

$$P_i(\Delta t) \cong \frac{n_i(\Delta t)}{\sum_{j=1}^{N} n_j(\Delta t)} \quad . \tag{8}$$

ahol:

$n_i(\Delta t)$ - a Δt idő alatti i-edik állapotba való lépések száma.

Az üzemeltetés tárgyának i-edik állapotban való tartózkodását jellemezheti még - a t_i- vel jelölt - az állapotban eltöltött átlagidő is.

A fentiek alapján az N állapotból álló - illetve ennyi állapotra felbontott - üzemeltetési folyamat jellemzésére az alábbi paraméterek szolgálnak:

N - az állapotok száma;

$\underline{t}$ - az állapotokban eltöltött átlagidők vektora;

$\underline{A}$ - az állapotokban tartózkodás valószínűség vektora;

$\underline{\underline{P}}$ - átmenetvalószínűségi mátrix.

Természetesen a $\underline{t}$ vektor helyett, a vizsgálati szempontok függvényében, felhasználható például az állapotba kerüléssel kapcsolatos költségek $\underline{C}$ vagy a munkaráfordítások $\underline{M}$ vektorai is.

A fent említett jellemzők ismeretében meghatározhatjuk az állapotokban való tartózkodás valószínűségek időbeni változását, az üzemeltetés költség vagy munkaidő igényét. Ekkor annyi egyenletből álló egyenletrendszert kapunk, ahány állapotból áll az üzemeltetési folyamat, illetve ahány állapotra bontottuk azt.[6]

A Δt időléptetéssel vizsgált - azaz így disztkrét idejűvé alakított - folytonos idejű folyamat állapotváltási átmenetvalószínűségei a (7) egyenlet felhasználásával a

$$P_{ij}(t) = \beta_{ij}(t)\ \Delta t \qquad (9)$$

módon határozható meg. Fontos itt megjegyezni, hogy akkora időközöket kell választanunk, mely eltelte alatt az üzemeltetés tárgya 1 valószínűséggel csak egy állapotváltást fog végezni. A fenti változók pedig a korábban már megismert Markov-mátrixba rendezhetők.

A további vizsgálatok elvégzése érdekében célszerű állapotváltásnak tekintenünk azt az esetet is, amikor a kiválasztott Δt idő elteltével az üzemeltetés tárgya az intervallum előtti állapotban maradt. Így a mátrix főátlójában lévő változók meghatározása a következő módon történik:

$$P_{ii} = 1 - \sum_{j=1}^{N} P_{ji} \qquad (\text{ha } i \neq j)\ . \qquad (10)$$

Mivel ekkor a teljes eseménytér az, hogy az üzemeltetés tárgya vagy valamely másik állapotba lép, vagy a kiindulásiban marad.

A Markov-mátrix felhasználásával az állapotokban való tartózkodás valószínűségének időbeni változása az

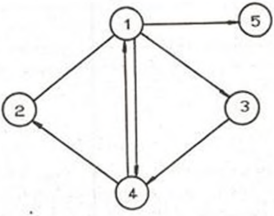
$$\underline{A}(t+\Delta t) = \underline{\underline{P}}^{*}(t)\ \underline{A}(t) \qquad (11)$$

egyenlettel történhet, ahol $\underline{\underline{P}}^{*}$ a $\underline{\underline{P}}$ mátrix transzponált mátrixa.

Háborús üzemeltetés modellezése

A gráfmodell felállítása

A repülőtechnika háborús körülmények közti üzemeltetését - a rendelkezésünkre álló adatok alapján - egy öt állapotból álló folyamatos idejű sztochasztikus folyamattal modellezzük. Igy az üzemeltetés típusgráfja egy öt szögpontból álló irányított gráf lett, amely a 3. ábrán látható.



3. ábra

Az állapotok megnevezése:

1 - Bevetés
A repülőgépek a kijelölt harcfeladatot hajtják végre, a harcot megvívják vagy a kijelölt légteret közelítik meg, illetve onnan a meghatározott repülőtérre repülnek.

2 - 'A' tipusú javítás, illetve arra történő várakozás
A repülőtechnika olyan mérvű sérülést szenvedett, hogy az a repülőegységnél javítható. Az állapotban tartózkodás átlagos ideje 3 óra.

3 - 'B' tipusú javítás, illetve arra történő várakozás
A repülőgép sérülése az előzőnél nagyobb mértékű, de még az

alakulatnál javítható. Az átlagos állapotban tartózkodási idő 8 óra.

4 - Üzemképes
A repülőgép üzemképes. Rajta vagy előkészítési munkát végeznek, vagy harckész állapotban várakoznak a közetkező bevetésre.

5 - Vissza nem térülő veszteség
Ebbe az állapotba jutó repülőtechnikák oly mérvű sérüléseket szenvedtek, hogy a hamdvelet során újra nem vethetők be. Ezek a repülőgépek feloszthatók végleges veszteségre (megsemmisülésre) és különböző, az egységnél már nem javítható, mértékben sérültekre.

A markovi modell

Első lépésként feltételeztük, hogy mindegyik állapotból való távozás ideje exponenciális eloszlású, és meghatároztuk az állapotváltozások átmenetvalószínűségeinek együttható mátrixát (I. táblázat). Igy kaptuk meg az üzemeltetés markovi modelljét.

	1	2	3	4	5
1		$\frac{k_A}{t_f}$	$\frac{k_B}{t_f}$	$\frac{1-k_{öv}}{t_f}$	$\frac{k_{vn}}{t_f}$
2	0		0	$\frac{1}{t_A}$	0
3	0	0		$\frac{1}{t_B}$	0
4	$\frac{1}{t_c}$	0	0		0
5	0	0	0	0	

I. táblázat

Ez a modell lényegében a normál "békebeli" üzemeltetés folyamatának matematikai modelljével egyezik meg. Jól használható, úgynevezett folyamatos üzemű, légi harctevékenység kiszolgálásának modellezésére. Ilyen harcfeladatra példa az Öböl-háború utáni dél-iraki repülési tilalmat ellenőrző szövetséges repülőegységek tevékenysége. Meg kell jegyezni, hogy a példához hasonló esetekben az ellenség légvédelmi és légi eszközeinek hatékonyságán kívül figyelembe kell venni a szembenálló fél "politikai bátorságát" is a várható k_A ; k_B ; k_{vn} veszteségi tényezők előzetes becslésekor.

Ezen markovi modell hátrányaként jelentkezik, hogy nem alkalmazható olyan harctevékenység kiszolgálási folyamatának rendszerszemléletű vizsgálatára, amikor egy repülőegység egyszerre hajt végre feladatokat. Például légicsapások sorozata (lásd a *Sivatagi Vihar* hadművelet), szárazföldi csapatok légitámogatása vagy desszantolása ellenséges területen. De ide sorolható a délszláv térségbe jutatott segélyek légi szállítása és ejtőernyővel való kidobása is.

<u>A félmarkovi modell</u>

A markovi modell sajátosságai miatt, a szakaszos bevetéseket igénylő harctevékenység kiszolgálásának modellezésére állítottuk fel a háborús üzemeltetés fél-markovi modelljét. Az állapotokat és az állapotváltozásokat egyenként megvizsgálva határoztuk meg a különböző állapotokra - az állapotváltozások szerinti - távozási idők eloszlási jellegét. Ezek alapján határoztuk meg a II. táblázatban szereplő mátrix elemeit.

Normál eloszlásúaknak tekintettük a meghibásodás, sérülés vagy megsemmisülés következtében történő állapotváltozásokat, ahol a távozási idő várható értéke: $m = \frac{t_f}{2}$;

szórása: $\sigma = \frac{t_f}{6}$, az úgynevezett 3σ szabály miatt, amely szerint egy m várható értékű, σ szórású normál eloszlású valószinűségi változó által felvett értékek "gyakorlatilag biztosan" az $(m-3\sigma\ ,\ m+3\sigma)$ intervallumba esnek (ennek a valószinűsége valójában 0,9973).

A bevetési idő első és utolsó szakasza lényegében útvonalrepülés (a kijelölt légtér, illetve repülőtér megközelítése), így ekkor jóval kisebb a sérüléses meghibásodás valószinűsége, mint a harc megvívásakor, amikor ennek valószinűsége nagyságrenddel vagy nagyságrendekkel nagyobb.

A javítási állapotokban való tartózkodások idejeit exponenciális eloszlásúaknak feltételeztük a markovi modell, a gyakorlati tapasztalatok, valamint a szakirodalmak alapján.

Az 1 (bevetés) és a 4 (üzemképes) állapotok közötti váltást a táblázatban leirt módon, egységugrás jelleggel határoztuk meg, mert így tudtuk modellezni, hogy a feladatra a repülőgépek egyszerre - pontosabban viszonylag rövid időn belül - szállnak fel, illetve hasonló módon érkeznek vissza.

	1	2	3	4	5
1		$k_A\ F(t)$	$k_B\ F(t)$	$t=b*t_c+t_f \rightarrow 1$ $t\neq b*t_c+t_f \rightarrow 0$	$k_{vn}\ F(t)$
2	0		0	$1-e^{\mu_A*t}$	0
3	0	0		$1-e^{\mu_B*t}$	0
4	$t=b*t_c \rightarrow 1$ $t\neq b*t_c \rightarrow 0$	0	0		0
5	0	0	0	0	

II. táblázat

A táblázatokban és egyenletekben használt jelölések:

k_A – 'A' típusú javításba küldési (sérülési) tényező;

k_B – 'B' típusú javításba küldési (sérülési) tényező;

k_{vn} – vissza nem téríthető veszteségek tényezője;

$k_{öv}$ – összveszteségi (sérülési) tényező

$$k_{öv} = k_A + k_B + k_{vn} \; ;$$

t_A – 'A' típusú javítás átlag átfutási ideje;

t_B – 'B' típusú javítás átlagos átfutási ideje;

t_f – bevetések átlagideje;

t_c – bevetési ciklusidő (ciklikus bevetéseket feltételezve);

b – a bevetés sorszáma;

n_A – 'A' típusú javítást végző brigádok száma;

n_B – 'B' típusú javítást végző brigádok száma;

η_m – munkaidő veszteséget jellemző tényező;

η_{sz} – a személyi állományban bekövetkezett veszteségeket kifejező tényező;

k – a vizsgált nap sorszáma;

C_i – az i-edik állapotban tartózkodó gépek száma.

$$F(t) = \frac{6}{t_f \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{18\left(\tau - \frac{t_f}{2}\right)^2}{t_f^2}} d\tau \tag{12}$$

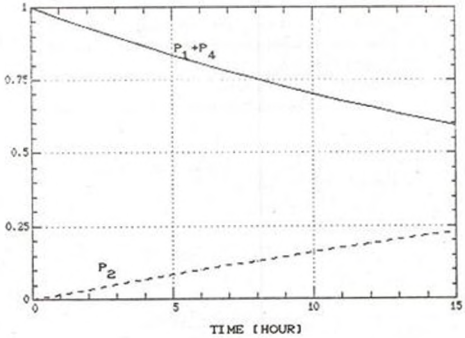
$$\mu_A = \frac{n_A \; \eta_m \; \eta_{sz}^k}{t_A \; C_2} \tag{13}$$

$$\mu_B = \frac{n_B \; \eta_m \; \eta_{sz}^k}{t_B \; C_3} \tag{14}$$

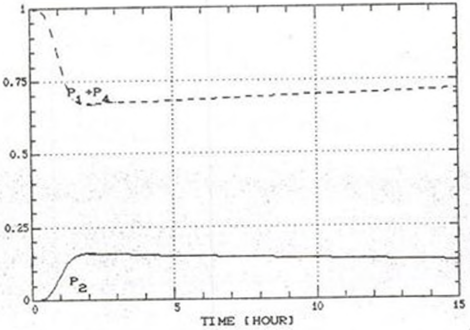
A modellek összehasonlítása

A fenti táblázatok alapján mindkét modell felhasználásával meghatároztuk az állapotokban való tartózkodások valószínűségének változását az idő függvényében. Ezeket az eredményeket mutatják be a 4. (markovi modell), illetve a 5. (fél-markovi modell) ábrák. Természetesen mindkét esetben azonos kiinduló adatokat használtuk.

A modellek alkalmazásakor a veszteségi tényezők változtatásával a különféle sérülési lehetőségek modellezhetők.[4] Például ha a repülőgépek ellen várhatóan kézi fegyvereket - persze itt nem *Stinger* típusú rakétákra gondolok - használ az ellenség vagy ha jelentős légifölénnyel rendelkezünk, akkor feltehetőleg több lesz az 'A' típusú javításra küldendő gépek száma a bevetések után. De ha például az ellenség magas technikai szinten álló, korszerű légvédelemmel ren-



4. ábra



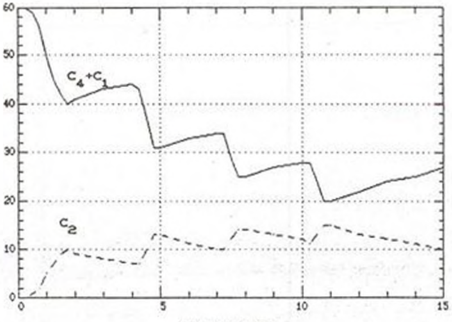
5. ábra

delkezik vagy nincs megfelelő légifölényünk, akkor inkább a végleges veszteségek száma fog megnőni az előző esethez képest.

Példa a félmarkovi modell alkalmazására

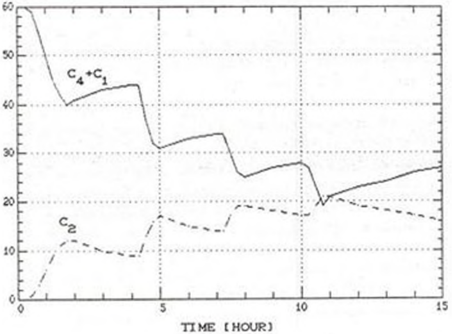
Az elkészített félmarkovi modellt - felhasználási lehetőségeit szemléltetendő - különféle kiinduló adatokkal működtettük.

Elsőnek - az általam felvett adatok felhasználásával - egy alapesetre határoztuk meg a gépszámok változását egy 16 órás harctevékenységi nap során. A gépek négy feladatot hajtanak végre. Az elsőt 0-2; a másodikat 4-5; a harmadikat 7-8 és a negyediket 10-11 órák között. A bázis repülőtéren 6 'A' típusú - illetve 4 'B' típusú javítást végző brigád tevékenykedik. Az eredménylista alapján készült grafikonok a 6. ábrán láthatók. A diagramokon az 'A' típusú javításban lévő, illetve arra váró (C_2), valamint az üzemképes és a bevetésen lévő (C_4+C_1) gépek számainak várható értékeit ábrázolom.



6. ábra

Következő lépésként azt modelleztük, hogy az ellenség inkább kézi fegyverrel rendelkezik, ezért az 'A' típusú javításba küldési tényezőt megnöveltük, míg a többi veszteségi tényezőt csökkentettük. A futási eredmények alapján készült el a 7. ábra.

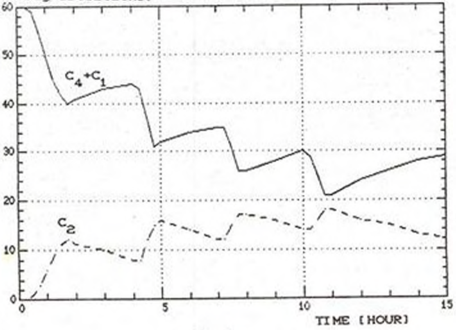


7. ábra

A két grafikont összehasonlítva megállapítható, hogy szervezeti változtatás nélkül a - különben ugyanazon jellemzőkkel bíró - nap végére csak a különböző szintű javításra váró gépek arányai változtak meg. Az összbevetések száma nem változott, az üzemképes gépek száma sem nőtt jelentősen a nap végére (28 helyett 29).

Ezen észrevételek alapján megváltoztattuk a javításokat végző brigádok számát. Az 'A' típusú javítást végző brigádokét 6-ról 8-ra növeltük, a 'B' típusú javítást végző brigádokét pedig 4-ről 3-ra csökkentettük. Ennél a változtatásnál - jelen munkámban - nem vettük figyelembe a különféle javító brigádok szakágak szerinti létszámszükségletét. Igy az általunk modellezett módosítás esetleges hibáját nem vitatjuk, célunk a modell alkalmazási lehetőségeinek bemutatása.

Ebben az esetben az összbevetések száma hárommal és a nap végére az üzemképes gépek száma kettővel növekedett (lásd 8.ábra). A több bevetés következtében viszont - sajnos - kettővel megnőtt az összveszteségek száma is. Az eredmények alapján célszerűnek látszik, ilyen várható veszteségek esetén, a műszaki kiszolgáló állomány szervezetét a fenti módon megváltoztatni.



8. ábra

A fenti modellek felhasználásával vizsgálhatjuk a különféle sérülési valószínűségek - azaz eltérő ellenséges fegyverzet, vagy légifölény - esetén a javító, előkészítő csoportok kialakításának hatásait. A kapott eredményeket felhasználhatja a hajózó parancsnok - mint tájékoztató adatokat - a repülőegysége harctevékenységének szervezésekor. A különféle szintű légi hadműveletek előzetes tervezésekor a modell felhasználható a várható műszaki kiszolgálási kapacitás és anyagigény nagyságának és időbeli elszolásának prognosztizálására is.

Felhasznált irodalom

1 - Bharucha-Reid A.T.: Elements of the Theory of Markov Processes and Their Applications. McGraw-Hill, New York, 1960.

2 - Блазилович Е.Ю. - Босковоев В.Ф.: Эксплуатация авиационных систем по состоянию, Москва, 1981.

3 - Karlin S. - Taylor H.M.: Sztochasztikus Folyamatok, Gondolat, Budapest, 1985.

4 - Dr.Pokorádi László: Üzemeltetési rendszerek vizsgálata a Markov-folyamatok elméletének alkalmazásával, X.Magyar Repüléstudományi Napok, Szolnok 1993. május 19-20., 154-165 pp.

5 - Rényi Alfréd: Valószínűségszámítás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.

6 - Dr.Rohács József - Simon István: Repülőgépek és helikopterek üzemeltetési zsebkönyve, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1989.