Szekeres Bálint főiskolai adjunktus

A MATEMATIKAOKTATÁS UTCÁJA KÉTIRÁNYÚ

Lépten-nyomon érzékelhetjük azt a permanens folyamatot, ahogyan a matematika egyre nagyobb teret hódít a modern életben és a tudományban egyaránt. Ennek a ténynek jelentkeznie kell - és jelentkezik is - a korszerű oktatási rendszer egészében. Különösen fontos az a kérdés, hogy mi legyen a matematikaoktatás tartalma, s milyen legyen a terjedelme a felsőfokú oktatásban.

A mit? és mennyit? kérdése után fajsúlyosan fogalmazódik meg a HOGYAN? kérdése. Azaz, miképpen tanitsunk "felsőbb matematikát" a leendő műszaki szakembereknek, a "jövő üzemmérnökeinek" úgy, hogy a hatásfok minél nagyobb legyen?

A jelenlegi hallgatóknak - a jövendő munkahelyükön - érteniük kell a folyamatok, berendezések (fizikai) elveit, annak a technikának a lényegét, amellyel dolgoznak.

Majdan tehát olyan mértékben kell ismerniük a fizikát, illetve a műszaki tárgyakat, hogy képesek legyenek ismereteiket felhasználni, alkalmazni is.

A fizika törvényeit egzakt formulákkal kell megfogalmazni, s a gyakorlatban műszaki szerkezetekkel és természeti jelenségekkel kapcsolatos számitásokra kell alkalmazni.

Mit jelent ez matematikaoktatásunkra nézve? A kérdéssel kapcsolatban idézem az amerikai Willard Gibbs fizikus (1839-1903) szállóigévé vált megfogalmazását. Gibbs a modern termodinamika egyik megalapitója volt, rendkivüli hallgatagságáról és szerénységéről volt hires, mindössze egyszer szólalt föl nyilvánosan a Yale Egyetem tanácsülésén, amikor azt a kérdést vitatták, hogy a nyelvek vagy pedig a matematika szerepeljen-e nagyobb súllyal az oktatásban. Nyomós érvét tömören csak igy fogalmazta: "A matematika is nyelv".

Valóban, a matematika az a nyelv, amelyen a természetet leirhatjuk, s hogy ez a leirás mennyiben hű, attól függ, hogy milyen (milyen fejlett) matematikai apparátust alkalmazunk. A fizika nyelve a matematika. A fizikához szükséges matematika azonban nem az ún. "elemi matematika", vagyis algebra, geometria, trigonometria, hanem a differenciál- és integrálszámitás.

A mechanikában szereplő gyorsulás a sebesség deriváltja, illetve a helyvektornak idő szerinti második deriváltja. Semmi más megfogalmazás (pl. egy másodperc alatti sebességváltozás) nem egzakt. Miért is kellene, hogy az erő egy másodpercig állandó maradjon?

A hangsúly tehát azon van, hogy hallgatóink kezébe <u>használható eszközt</u> (szerszámot) adjunk fizikai, műszaki problémák megoldásához, értelmezéséhez, azaz matematikaoktatásunk nem öncélú.

Az oktatásban és a tanulásban (tekintve természetesen azt, hogy nem matematikusképzésről van szó) tehát a matematika eszköz jellegét kell kidomboritanunk! Erre vonatkozóan megszivlelendők Albert Einsteinnek - valószinűleg minden idők legnagyobb fizikusának - önéletrajzában leirt sorai: "12-16 éves koromban megismerkedtem a matematika elemeivel, ideértve a differenciál- és integrálszámitás alapjait. Ezeket szerencsémre olyan könyvekből sajátitottam el, amelyek nem helyeztek nagy súlyt a logikai szigorúságra, viszont mindenütt jól kiemelték a fő gondolatokat. Mindezek a valóban lebilincselő tanulmányok semmivel sem voltak rám kisebb hatással, mint az elemi geometria csodája. Az analitikus geometria, a végtelen sorok, valamint a differenciál és az integrál fogalma valósággal szárnyakat adtak gondolkodásomnak."

A matematika tankönyvek többségében nagy súlyt helyeznek arra -pl. a differenciál- és integrálszámitás kapcsán-, hogy lehetőleg szigorúan bizonyitsák két "végtelenül kicsiny mennyiség" hányadosa meghatározott határértékének (azaz a differenciálhányadosnak) a létezését és véges voltát, valamint "végtelen sok, végtelenül kicsiny összeadandó" összegének (azaz az integrálnak) a létezését.

A bizonyitásokhoz - legtöbbször - előzetesen kifejtik a határérték és a határátmenet fogalmát és ezek elméletét. Bizonyos részletességgel vizsgálják azokat a helyzeteket, amikor a határérték nem létezik. Ez a problémamegközelités nem biztos, hogy pedagógiai szempontból a legelőnyösebb, különösen akkor, amikor ezeknek a fogalmaknak a levezetéséről van szó. Nem biztos az, hogy minden hallgató képes elsajátitani bármilyen gondolatmenetet és ezentúl már csak a kifejtés precizitása érdekelné.

Sokkal célszerűbbnek mutatkozik az alábbi módon való megközelités:

Az alapvető fogalmaknak a kezdők tudatában az intuitív benyomások szintjén kell beivódniuk és magától értetődővé válniuk. A hallgatónak úgy kell emlékezetében őriznie és a gyakorlatban alkalmaznia ezeket a fogalmakat, hogy nem tér vissza minden egyes alkalommal az azokat megalapozó gondolatmenetekhez (olyanokhoz, mint a határérték, annak léte, különböző szükséges és elégséges feltételek teljesülése, stb.).

Nélkülözhetetlen a fogalmak sokszor ismételt alkalmazása, mert a fogalmak lényegének intuitív megragadásához, felfogásához nem a bizonyitás, hanem a tapasztalás vezet. (A gyermek is igy tanulja anyanyelvét, a nyelvtan ismerete nélkül).

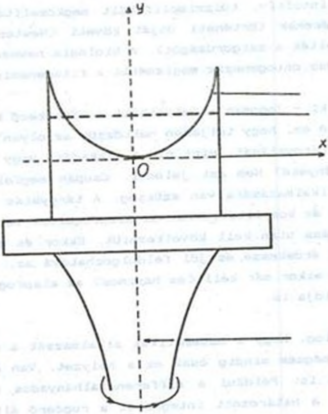
A felvázolt intuitív, túlszimplifikált megközelítés a matematika fejlődésének történeti útját követi (Newton és Leibniz sem követelték a szigorúságot). A biológia nevezetes törvénye szerint "az ontogenezis megismétli a filogenezist".

Ezek után bárki - jogosan - felvetheti a következő kérdést: Azt jelentené ez, hogy teljesen mellőzzük az olyan bonyolultabb esetek tárgyalását, mint pl. a szakadást vagy törést mutató függvényeké? Nem azt jelenti. Csupán megfelelő didaktikai fogás alkalmazására van szükség. A tárgyalás során a kivételeknek és komplikációknak az alapfogalmak teljes intuitív elsajátítása után kell következniük. Ekkor és csak ekkor válik igazán érdekessé és jól feldolgozhatóvá az, ami bonyolult. Nyilván ekkor már kell (és hasznos) az alapfogalmak precíz definíciója is.

Megszokott dolog, hogy a matematikát alkalmazzák a műszaki tudományok, mégsem mindig csak ez a helyzet. Van ellenirányú forgalom is. Például a differenciálhányados fogalmát a sebesség, a határozott integrálét a rugóerő által végzett munka segitségével is bevezethetjük. Feltétlenül szükség van arra, hogy a fizika (a műszaki tudományok) segitsen a matematikai fogalmak elsajátíttatásában, a matematika pedig használható eszköz legyen a hallgatók kezében a műszaki problémák megoldása során.

A továbbiakban - konkrét példa gyanánt - vizsgáljuk meg a forgó folyadék felületének alakját!

Ha egy centrifuga tányérjának közepére - félig színes vizzel töltött - poharat állítunk, s a gépet függőleges tengelye körül egyenletesen forgatjuk, megfigyelhetjük mi történik. A forgó pohárban középen alászáll, a szélén felemelkedik a víz. Ha nő a fordulatszám, a falnál még magasabbra húzódik, középen még lejjebb süllyed a folyadék, beljebb nyúlik a mélyedés.



A forgástengelyen átmenő síkmetszet nagyjából úgy fest, ahogyan azt az 1. ábra mutatja.

A forgó felületet - amely láthatólag a forgás folyamán ugyanolyan marad - forgásfelületnek vehetjük, melyet a forgástengelyen átmenő keresztmetszet határgörbéje, az ún. meridiángörbe generál.

1. ábra

Summa summarum: a feladat a meridiánvonal egyenletének meghatározása.

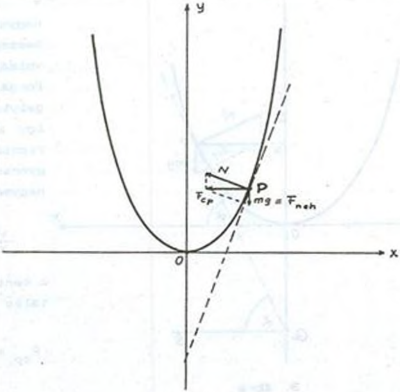
A fizikai lényeglátás azt diktálja, hogy a derékszögű koordináta-rendszert az 1. ábrán látható módon vegyük fel. A probléma most még határozottabb lett; adjuk meg ebben a koordináta-rendszerben a meridiángörbe egyenletét!

Az itt tárgyalt, s a hozzá hasonló problémák megoldásának három jellegzetes szakasza van. Az első szakasz teljesen, vagy javarészt a fizikába vág; a fizikai feltevés vagy sejtés megfogalmazása. A második szakasz átmenet a fizika és a matematika között: a feltevés vagy a sejtés egyenletekre való lefordítása. Az utolsó szakasz matematikai: az egyenletek megoldása.

Nézzük vizsgált problémánkat részletesebben!

I. A FIZIKAI SZAKASZ

Tekintsünk egy csöppnyi folyadékot, a szabad felszín egy parányi részét a felület valamely P pontjában. E cseppecske egyenletesen mozog egy vizszintes kör mentén, állandó szögsebességgel. Tudjuk a dinamikából, hogy ezen mozgás



2. ábra

fenntartásához állandó nagyságú, a kör középpontja felé mutató erőnek - centripetális erőnek - kell hatnia. A centripetális erő a cseppre ható nehézségi erőnek és a környező folyadékrészecskék hatásából adódó N eredő nyomóerőnek - mely merőleges a szabad felületre - az eredője (2. ábra).

Találtunk tehát egy lényeges fizikai elvet, amely megmagyarázhatja a jelenséget. Ezzel véget ért a vizsgálat első szakasza, a továbbiakban a matematikai megfogalmazáshoz kell eljutnunk.

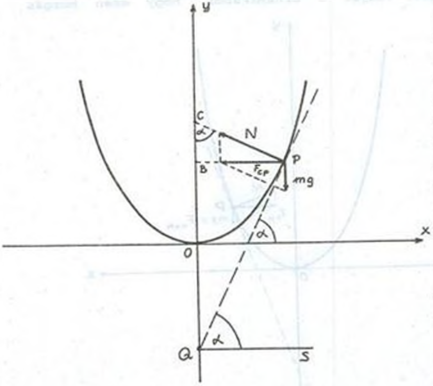
II. ÁTMENET A FIZIKÁTÓL A MATEMATIKÁHOZ

Legyen a meridián P(x;y) pontjában lévő m tömegű részecskének v állandó nagyságú sebessége, távolsága a forgástengelytől x. Igy a centripetális gyorsulás nagysága

$$\frac{v^2}{x},$$

a centripetális erőé

$$F_{cp} = m\frac{v^2}{x}.$$



3. ábra

A 3. ábra alapján: α, a meridiángörbe érintőjének az x tengellyel bezárt szöge - mint az könnyen belátható - pontosan akkora, mint a BCP . Ezért

$$tg\alpha = \frac{\frac{mv^2}{x}}{mg} = \frac{v^2}{xg}.$$

Mivel az y = f(x) görbe (x;y) pontbeli érintőjének meredekségét az első derivált,

$$\left\{y'(x) = \frac{dy}{dx}\right\}$$

adja meg:

$$\frac{dy}{dx} = tg\alpha.$$

Igy a következő összefüggést kaptuk: $\frac{dy}{dx} = \frac{v^2}{xg}$.

Kihasználva, hogy $v = \omega x$, egyenletünk a $\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x}{g}$ alakot ölti, ahol ω állandó nagyságú szögsebessége minden részecskének. Látható, hogy az egyenlet dimenzionálisan is rendben van.

Végleges megállapitás: a gravitációs térben - függőleges tengely körül - ω szögsebességgel forgó folyadék meridiángörbéjén minden (x;y) pont eleget tesz a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x}{g}$$

differenciálegyenletnek. Ezzel befejeződött a második szakasz.

III. A BEFEJEZŐ, MATEMATIKAI SZAKASZ

Differenciálegyenletünkből "ki kell hámozni" a meridiángörbe egyenletét, azaz meg kell oldanunk a differenciálegyenletet. A szerkezetből adódóan ezt könnyen megtehetjük a "változók szétválasztásának" módszerével:

$$dy = \frac{\omega^2}{g} xdx$$

$$\int dy = \int \frac{\omega^2}{g} xdx$$

$$\int dy = \frac{\omega^2}{g} \int xdx$$

A határozatlan integrálás eredménye:

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x + C \qquad C \in R$$

Felhasználva a kezdeti feltételt, azaz $Y(0) = 0$-át:

$$0 = \frac{\omega^2}{2g} 0 + C,$$

adódik, hogy: $C = 0$ és

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2$$

A meridiángörbe egy parabola, a felület egy forgásparaboloid. Ezzel teljes egészében megoldottuk a problémát.

Az előzőekben megoldott feladathoz - a probléma aktualitása miatt - még néhány megjegyzést hozzáfűzök:

A centrifuga tányérjában lévő folyadék akár higany (folyékony fém) is lehet. Newton már a XVII. században egy higannyal bevont forgó koronggal kisérletezett, annak tükörként való alkalmazása végett.

A tudósok mostanában kifejlesztettek egy 2.7 m átmérőjű teleszkópot, melynek szíve egy higanytál, amely egy percenként tizet forduló korongra van erősítve. A higany felülete olyan forgásparaboloiddá alakul, amely tükörnek felel meg. Az egész konstrukció légpárnán nyugszik, ami megakadályozza a zavaró rázkódásokat. A képeket, amelyeket a berendezés a világűrből felfog, egy speciális kamera lefilmezi és számítógépre viszi.

Természetesen - a forgó folyadék esetén túlmenően - további példák bőséges tárháza áll rendelkezésünkre. A mechanika, a radioaktív sugárzás, az elektromágneses rezgések stb. mind a differenciál- és integrálszámítás alkalmazásának példái lehetnek.

Nyilván egyetlen oktatási módszer sincs, - ez vonatkozik a cikkben felvázoltra is - amely "A MÓDSZER" volna; ahány jó tanár, annyi jó módszer van. Az a mód, ahogyan a lényeget kiemeljük, éppen olyan fontos lehet, mint maga a lényeg.

Tanszékünk szakmai - módszertani munkájában évek óta folyamatosan igyekszik a lehető legjobban megválaszolni a cikk elején kiemelten megfogalmazott HOGYAN? kérdését.

A szakmai tudományos háttéranyag tanulmányozása, a módszertani bázis folyamatos megújítása, a tanszéki tudományos kutatómunka mind a matematikaoktatás eredményesebbé tételét szolgálja.

A matematikatanítás utcájában haladva azonban mindig éberen ügyelnünk kell a "szembejövő forgalomra", ez az utca ugyanis - remélhetőleg ez a cikkből is kiderült - kétirányú.

FELHASZNÁLT IRODALOM

1./ Pólya György: Matematikai módszerek a természettudományban.
Gondolat Kiadó Bp., 1984.

2./ Pólya György: A gondolkodás iskolája.
Gondolat Kiadó Bp., 1981.

3./ J.B. Zeldovics: Ismerkedés a felsőbb matematikával és fizikai alkalmazásával.
Gondolat Kiadó Bp., 1981.

4./ J.B. Zeldovics - A.D. Miskisz: Az alkalmazott matematika elemei.
Gondolat Kiadó Bp., 1978.

5./ Rudolf Rothe: Matematika gépészmérnökök számára
Műszaki Könyvkiadó