Dr. Pokorádi László mk. százados, főiskolai docens

RENDSZEREK ÉS FOLYAMATOK GRÁFELMÉLETI VIZSGÁLATA

Rendszerek vagy diszkrét állapotterű folyamatok vizsgálatának egyik fontos lépése az elemek, illetve állapotok közti kapcsolatok gráfban történő ábrázolása. Az így nyert gráf csúcsmátrixa alapján az összetett belső kapcsolatok mátrixalgebrai módszerekkel tárhatók fel. A tanulmány egy módszert mutat be, mellyel meghatározható egy gráf elérhetőségi mátrixa a szomszédossági mátrix ismeretében.

1. Bevezetés

A rendszer alatt valamilyen, egymással kölcsönhatásban lévő elemek halmazát értjük. A rendszerek vizsgálata lényegében a rendszer elemei között fenálló kapcsolatok feltárása, mivel az egész rendszer viselkedése az elemek működésének és egymásrahatásának összesége. A rendszervizsgálat egyik fontos állomása az elemek közti - sok esetben bonyolult kölcsönhatásokat is jelenthető - kapcsolatok tényének feltárása és gráfban történő ábrázolása.

A diszkrét állapotterű - vagy valamilyen módon így approximált - folyamatok ábrázolása a lehetséges állapotok és az állapotváltozások alkotta gráfok segítségével történhet. Ilyen például a [3] irodalomban található Üzemeltetési tipusgráf is.

A fenti két feladat megoldása - természetesen - a gráfelmélet felhasználásával történhet.

2. A gráf és a gráfelmélet

A matematikailag $\mathcal{G}\left\{P, E, \ell\right\}$ -vel jelölt gráfon olyan alakzatot értünk, amely a P pontokból és bizonyos pontokat összekötő E vonaldarabokból áll. A pontokat a gráf szögpontjainak vagy csúcsainak, a vonaldarabokat a gráf éleinek nevezzük. A fenti jelölésben szereplő ℓ azt a leképezést jelenti, amely a szögpontok és az élek közti kapcsolatot adja meg.

Irányított gráfról akkor beszélünk, ha az élek végpontjainak sorrendjére is tekintettel vagyunk, s ezt $\vec{G}\left[P,E,\ell\right]$ -vel jelöljük.

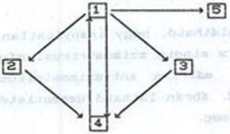
A gráfelmélet a matematikának az az ága, mely a gráfoknak az általános, a szögpontok és az élek konkrét helyétől független, tulajdonságait vizsgálja. Történetét *Leonard Euler* 1736-ban megjelent dolgozatától számítják, amelyben a *königsbergi hidak problémája* néven ismert feladattal foglalkozott. A kérdés az volt, hogy milyen úton lehet a *Königsberg* város *Pregel* folyójának (1. ábra) mind a hét hídján átmenni, de úgy, hogy vissza kell térni a kiindulási helyre és minden hídon csak egyszer szabad áthaladni? Euler igazolta dolgozatában, hogy a feladat megoldhatatlan.

1. ábra

Sokáig úgy látszott, hogy az ilyenfajta feladatok nem különösebben jelentősek. A XIX. század végén azonban a gráfelmélet egy sor fontos gyakorlati alkalmazását ismerték fel. Azóta a matematika ezen új területén a magyar matematikusok tollából sok cikk és tanulmány jelent meg és jelenik meg napjainkban is. Az első tudományos színvonalú könyvet ebben a témában egy magyar matematikus, *König Dénes* (nevét több gráfelméleti tétel viseli) írta 1936-ban, címe: *Theorie der* *endlichen und unendlichen Graphen* (A véges és végtelen gráfok elmélete).

3. Gráfok és mátrixok

Az üzemeltetési folyamatok jellemzésére használt úgynevezett üzemeltetési gráfok irányítottak. Ilyenkor az egymástól diszkréten elválasztott üzemeltetési állapotok a gráf szögpontjai lesznek, míg a köztük fellépő lehetséges váltásokat a gráf élei szemléltetik, meghatározva a változások irányát is (2. ábra).



2. ábra

Repülőgépek háborús üzemeltetésének egyszerű típusgráfja

1 - bevetés; 2 - kisjavítás, illetve kisjavításra várás;
3 - folyó javítás, illetve folyó javításra várás;
4 - üzemképes; 5 - vissza nem téríthető veszteség.

A rendszerek részegységei közti kapcsolatokat is gráffal lehet szemléltetni. Ha az egymással kapcsolatos elemek egymásrahatása nem kölcsönös, akkor a gráf irányított lesz. Viszont ha a szomszédos elemek mindegyike kölcsönössen hat egymásra a kapcsolatokat irányítatlan gráf segítségével is ábrázolhatjuk.

A gráf élei közti kapcsolatokat az úgynevezett csúcs (szomszédossági, vagy adjacencia) mátrixszal lehet táblázatosan megadni. Az irányítatlan gráf $\underline{\underline{A}}$-val jelölt szomszédossági mátrixa i-edik sor j-edik elemének értéke 1, ha az

i-edik és a j-edik szögpontokat közvetlenül összeköti a gráf valamely éle, illetve 0, ha nem. Matematikailag felírva:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha van olyan él, amelynek két végpontja } P_i \text{ és } P_j \text{ szögpontok} \\ 0, & \text{minden más esetben} \end{cases} . \qquad (1)$$

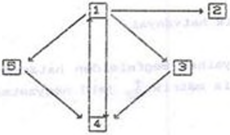
Irányított gráf esetén az $\underline{\underline{A}}$ jelű mátrix a_{ij} eleme pedig:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha van } P_i\text{-ből induló és } P_j\text{-ba vezető él} \\ 0, & \text{minden más eseben} \end{cases} . \qquad (2)$$

Könnyen belátható, hogy irányítatlan gráf esetén az adjacencia mátrix mindig szimmetrikus, míg irányított gráfnak szomszédossági mátrixa antiszimmetrikus is lehet. A (3) egyenlőség a 2. ábrán látható üzemeltetési tipusgráf csúcsmátrixát adja meg.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Két gráfot izomorfnak tekintjük (ekkor a szögpontok és az élek közti viszonyok kölcsönösen leképezhetők), ha csúcsmátrixaik soraik és megegyező oszlopaik cseréjével azonossá tehetők. Például a 2. ábrán látható gráf szögpontjainak sorszámait (a 2. és 5. állapotokat) cseréljük fel a 3.a ábra szerint. Ekkor a gráf szerkezete lényegében nem változik, a módosult $\underline{\underline{A}}_m$ csúcsmátrixot a 3.b ábra szemlélteti. Ha az új mátrix 2. és 5. sorait és oszlopait felcseréljük, az eredeti $\underline{\underline{A}}$ szomszédossági mátrixot kapjuk vissza.



$$\underline{\underline{A}}_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a　　　　　　　　b

3. ábra

A gráfok élei és szögpontjai közti kapcsolatot az úgynevezett élmátrixok segítségével tudjuk szemléltetni. Mivel további vizsgálatainkhoz ezek nem szükségesek, definiálásukkal most nem foglalkozunk.

4. Az elérhetőségi mátrix

Az elemek közti összetett kapcsolatokat a rendszer vizsgálati gráfjának úgynevezett elérhetőségi mátrixa jellemzi.

Egy m szögpontból álló gráf elérhetőségi mátrixán azt az m sorból és oszlopból álló $\underline{\underline{D}}_{m \times m}$ mátrixot értjük, ahol:

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha a } P_i \text{ szögpontból a } P_j \text{ szögpont} \\ & \text{valamilyen úton elérhető} \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases} \quad . \qquad (4)$$

Egy adott rendszer vagy diszkrét állapotterű folyamat gráfelméleti vizsgálatánál a fő feladat az elérhetőségi mátrix létrehozása. Ez a mátrix egy rendszer esetén például azt mutatja meg, hogy az egyik (az i-edik) elem anomáliája hatással van-e a másik (j-edik) elem működésére. Valamely folyamat vizsgálata esetén pedig megadja azt, hogy mely állapotokból lehet mely állapotokba eljutni.

A [2] irodalom alapján az elérhetőségi mátrixot a szomszédossági mátrix hatványai segítségével tudjuk felállítani.

4.1. A szomszédossági mátrix hatványai

A mátrixszorzás szabályainak megfelelően határozzuk meg az $m \times m$ méretű $\vec{\underline{A}}$ adjacencia mátrix $\vec{\underline{A}}_2$ jelű négyzetmátrixának $a_{2_{i,j}}$ elemét az:

$$a_{2_{i,j}} = \sum_{s=1}^{m} a_{i,s} \cdot a_{s,j} \tag{5}$$

egyenlettel.

A korábbi definíciókat felhasználva kijelenthetjük, hogy

$$a_{i,s} \cdot a_{s,j} = 0 \ ,$$

ha nem tudunk egy lépésben eljutni az i-edik szöpontból az s-edikbe (azaz ha $a_{i,s} = 0$), vagy ha az s-edikből a j-edikbe (vagyis ha $a_{s,j} = 0$).

Ha viszont egy-egy lépésben el tudunk jutni P_i-ből P_s-be és P_s-ből P_j-be (ha $a_{i,s} = a_{s,j} = 1$) :

$$a_{i,s} \cdot a_{s,j} = 1 \ .$$

Igy az (5) egyenlettel meghatározott $a_{2_{i,j}}$ értéke – a fenti szorzatok szummázása következtében – azt adja meg, hogy a gráf i-edik szögpontjából hány különböző úton tudunk két lépéssel eljutni a j-edik szögpontba.

Fontos itt megjegyezni, hogy jelen tanulmányban az utak különbözőségén az általuk érintett szögpontok, vagy azok sorrenjének különbözőségét értjük. Az ugyanazon szögpontokat megegyező sorrendben tartalmazó, de más élekből álló utakat azonosaknak tekintjük. Ilyen eset fordulhat elő, ha a gráfon belül két szögpontot egynél több él köt össze. Ezt az egyszerűsítő feltételt azért vezetjük be, mert végső célunk az elérhetőség vagy el nem érhetőség tényének megállapítása a tényleges utak számától függetlenül. Vizsgálatunk fő célja a gráfok szögpontjai közt meglévő kapcsolatok feltárása, ezért már a 3. fejezetben sem foglalkoztunk a gráfok élmátrixainak definiálásával.

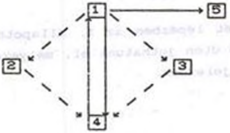
Szemléltetésre határozzuk meg a (3) egyenlőséggel megadott adjacencia mátrix négyzetét, illetve az $\underline{\underline{A}}_2$ négyzetmátrix első sorának negyedik elemét a mátrixszorzás szabályai és a 4. ábra alapján:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. ábra

$$a_{2_{1,4}} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 2 \quad . \qquad (8)$$

ami érték azt fejezi ki, hogy az 1. állapotából a 4. állapotba két különböző úton tudunk két lépésben eljutni (ezt jelölik az 5. ábrán a szaggatott vonalak).



5. ábra

Könnyen belátható, az $\underline{\underline{A}}$ szomszédossági mátrix $\underline{\underline{A}}_k$-val jelölt k-adik hatványmátrixának $a_{k_{i,j}}$ eleme azt mutatja meg, hogy k lépésben az i-edik szögpontból a j-edikbe hány egymástól - a fenti értelmezés szerint - független úton lehet eljutni. Ennek a kijelentésnek pontos, matematikailag egzakt bizonyítása a [2] irodalomban található meg.

4.2. A hatványmátrixok összegei

A hatványmátrixok

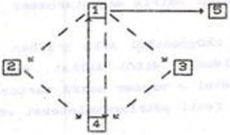
$$\underline{\underline{B}}_k = \sum_{n=1}^{k} \underline{\underline{A}}_n \tag{7}$$

összegével kapott $\underline{\underline{B}}_k$ összegmátrix $b_{k_{i,j}}$ eleme azt adja meg, hogy legfeljebb k lépésben az i-edik szögpontból a j-edikbe hány - egymástól független - úton lehet eljutni.

Példaképpen adjuk össze a korábban már meghatározott $\underline{\underline{A}}$ és az $\underline{\underline{A}}_2$ mátrixokat, ekkor egy olyan $\underline{\underline{B}}_2$ jelű mátrixot kapunk, mely i-edik sorának j-edik eleme azt adja meg, hogy legfeljebb két lépésben a P_i szögpontból hány különböző úton tudunk eljutni a P_j-be. Esetünkben

$$b_{2_{1,4}} = a_{2_{1,4}} + a_{1,4} = 2 + 1 = 3 \quad . \tag{8}$$

azaz maximum két lépésben az 1. állapotból a 4. állapotba három különböző úton juthatunk el, melyeket a 6. ábra szaggatott vonalai jeleznek.



6. ábra

Képezzünk a $\underline{\underline{B}}_k$ mátrixokból $\hat{\underline{\underline{S}}}_k$ jelű mátrixokat az alábbi függvény szerint:

$$\hat{\underline{\underline{S}}}_k = \operatorname{sign} \underline{\underline{B}}_k \qquad (9)$$

$$s_{k_{i,j}} = \operatorname{sign} b_{k_{i,j}} \quad ,$$

ahol:

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases} \quad ,$$

és nevezzük el ezeket a $\underline{\underline{B}}_k$ mátrixok szignum mátrixainak.

Az így kapott szignum mátrixok $s_{k_{i,j}}$ elemei azt adják meg, hogy legfeljebb k lépésben a gráf P_i szögpontjából el lehet-e jutni a j-edik szögponjába - a (4) egyenlettel megadott elérhetőségi mátrixszal analóg módon-, azaz:

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha a } P_i \text{ szögpontból a } P_j \text{ szögpont} \\ & \text{maximum } k \text{ lépésben elérhető} \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases} \quad . \qquad (10)$$

4.3. Az elérhetőségi mátrix meghatározása

Mivel egy m szögpontból álló gráfban a leghosszabb lehetséges út maximum m élből állhat, mely - a kiindulási szögpont kivételével - minden hozzá tartozó szögpontot csak egyszer érint, a fenti mátrixműveleteket végezzük el m-szer.

$$\vec{\underline{\underline{A}}}_k \qquad\qquad \vec{\underline{\underline{B}}}_k \qquad\qquad \vec{\underline{\underline{S}}}_k$$

2.lépés

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

3.lépés

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 3 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

4.lépés

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 4 & 4 & 4 & 8 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

5.lépés

$$\begin{array}{ccccc} 4 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 8 & 5 & 5 & 13 & 5 \\ 4 & 2 & 2 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 4 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

7.ábra

Az így kapott $\vec{\underline{\underline{S}}}_m$ szignummátrix lesz a vizsgált gráf elérhetőségi mátrixa. A 7. ábrán az eddig vizsgált Üzemeltetési típusgráf szomszédossági mátrixának hatványai, a (7) egyenlettel meghatározott összeg-, valamint azok szignum mátrixai láthatók. Így a vizsgált Üzemeltetési típusgráf elérhetőségi mátrixa:

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \qquad (11)$$

5. Összefoglalás

A fentiek alapján megállapítható, hogy egy m szögpontból álló gráf $\underline{\underline{A}}_{m \times m}$ szomszédossági mátrixának ismeretében a $\underline{\underline{D}}_{m \times m}$ elérhetőségi mártixa a

$$\underline{\underline{D}} = \operatorname{sign} \sum_{n=1}^{m} \underline{\underline{A}}_n \qquad (12)$$

egyenlettel meghatározható.

Természetesen a bemutatott egyszerű példa esetén a gráf megtekintéséből belátható, hogy az 5. állapot (szögpont) kivételével bármely állapotból bármely állapotba el lehet jutni. A gráfból az is kitűnik, hogy benne a - fenti feltételeket kielégítő - leghosszabb út három élből áll. Ez utóbbival magyarázható az, hogy a 3.; 4. és 5. lépéshez tartozó szignum mátrixok egyenlőek. Mivel általános esetben, ha a szögpontok száma m a fenti kritériumnak megfelelő leghosszabb út hosszát megadni nem tudjuk, ezért célszerű vizsgálatunkat mindig $k = m$ -ig elvégezni.

Egy bonyolultabb gráf esetén a fenti megállapítások "belátása" könnyen nem lehetséges, így az ismertetett módszer alkalmazása ekkor szükségessé válik.

Felhasznált irodalom

1 - Andrásfalvi Béla: Gráfelmélet; folyamatok, mátrixok, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1983.

2 - Dr.Fazekas Ferenc: Alkalmazott matematika II. egyetemi jegyzet. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.

3 - Dr.Pokorádi László: Üzemeltetési rendszerek vizsgálata a Markov-folyamatok elméletének alkalmazásával, X.Magyar Repüléstudományi Napok, Szolnok 1993.május 19-20., 154-165 pp.

4 - Sain Márton: Nincs királyi út! Matematikatörténet, Gondolat, Budapest, 1986.

5 - Dr.Szabó Imre: Gépészeti rendszertechnika, Műszaki Könyvkiadó, Budapest,1986.