Sándor Endre tanszékvezető főiskolai docens
dr. Pokorádi László mk. százados, főiskolai docens:

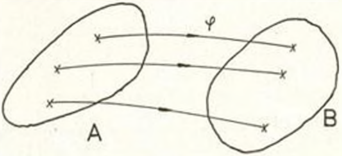
KONFORMIS LEKEPEZESEK ES ALKALMAZÁSUK AZ AERODINAMIKÁBAN

A konformis leképezéseknek rendkivül nagy a műszaki jelentősége főként az aerodinamikában. A repülőgépek tervezésénél figyelembe kell venni, hogy a levegő miként áramlik pl. a szárny körül. Ha a szárny keresztmetszeteinek áramképei egyformák, akkor a térbeli probléma síkba átvihető, azaz komplex változós függvénnyel meghatározható feladatra egyszerűsödik.

Cikkünkben szerentnénk bemutatni a matematika ezen ágát és annak egy - számunkra fontos - gyakorlati alkalmazását. Az uj képzési rendszer kidolgozásával kapcsolatban pedig gondolatokat akarunk ébreszteni, hogy e - régebben már főiskolánkon tanított - áramlástani anyag ismét elfoglalja méltó helyét az AERODINAMIKA tantárgyban.

1. A konformis leképezés fogalma

Matematikai értelemben leképezésen valamilyen hozzárendelést (megfeleltetést) értünk. Tekintsük pl. az A és a B halmazokat. Ha most az A halmaz minden egyes eleméhez rendre a B halmaz egy-egy elemét rendeljük, akkor az A halmazt a B halmazba képeztük le. Jelöljük ezt a leképezést a következő



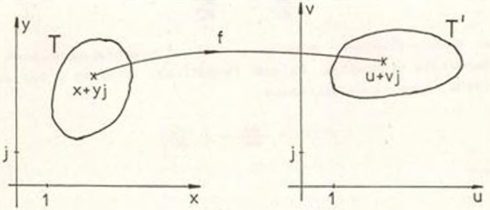
1. ábra

módon φ: A $\rightarrow$ B. Ha $x \in A$ (ha x eleme A halmaznak), akkor a B halmaz azon elemeit, amelyeket a φ leképezés az x elemhez rendel, $\varphi(x)$-el jelöljük és az x elem képének nevezzük. E képek összesége a képhalmaz, melyet $\varphi(A)$-val jelölünk.

Ha a $\varphi(A) = B$, akkor az A halmaznak B halmazra való leképezéséről van szó, ha a $\varphi(A)$ részhalmaza B-nek, akkor azt mondjuk, hogy az A halmazt a B halmazba képeztük le.

A konformis leképezéseket bizonyos feltételeknek eleget tevő komplex függvények valósítják meg a z és a w komplex számsíkok megfelelő tartományai között. (Megj.: A tartományok esetleg az egész számsíkok is lehetnek.)

Tekintsük a z komplex számsík egy T tartományában levő $z = x + yj$ (ahol $j^2 = -1$) pontjait. A $w = f(z)$ leképezés e tartomány pontjaihoz a w sík egy T' tartományának $w = u + vj$ pontjait rendeli, azaz a $w = f(z)$ függvény a z sík T tartományát a w sík T' tartományára képezi le. Az $u+vj = f(x+yj)$ miatt a T tartomány T'-re való leképezése az $u = u(x;y)$ és a $v = v(x;y)$ kétváltozós függvények segítségével is megvalósítható.



2. ábra

A konformis leképezésnél fontos követelmény, hogy a T és a T' tartományok közötti leképezés kölcsönösen egyértelmű legyen. Ez akkor teljesül, ha az $u = u(x;y)$ és a $v = v(x;y)$

kétváltozós függvények Jacobi determinánsa a T tartomány pontjaiban zérustól különböző, azaz

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (1)$$

minden $(x,y) \in T$-re.

Ez a feltétel előírja a leképezést létesítő komplex függvény számára a deriválhatóságot. Léteznie kell tehát egy a

$$\frac{df(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \qquad (2)$$

határértéknek, melyet az $f(z)$ komplex függvény deriváltjának nevezünk, s a valós analízisben megismert $f'(z)$ módon is jelölünk. Az $f'(z)$ létezésének szükséges és elégséges feltételét a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial u}{\partial x} \qquad (3)$$

ún. Cauchy-Riemann - féle parciális differenciálegyenletek fennállása biztosítja. Ha ezek fennállnak, akkor az $f'(z)$ az alábbi módon is előállítható

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x}$$

vagy (4)

$$f'(z) = - j \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} .$$

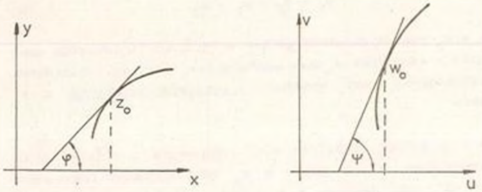
Amennyiben az $f'(z)$ a z_o pontban és e pont ε-nyi környezetében is létezik, akkor az $f(z)$ függvényt a z_o pontban <u>reguláris</u>nak nevezzük. Ha az $f(z)$ függvény a T tartomány minden pontjában reguláris, akkor a T tartományban reguláris.

Legyen $w = f(z)$ függvény a z_o helyen reguláris, és tegyük fel, hogy $f'(z) \neq 0$. Fektessünk a z_o ponton át egy olyan $z=z(t)$ előállítású g görbét, melyre $z(t_o)=z_o$ és $z'(t_o)\neq 0$. Az $f(z)$ függvény a g görbét a w képsík olyan g': $w=f(z(t))$ görbéjére képezi le, melyen a t_o paraméterértéknek az $f(z_o)=w_o$ pont felel meg. Képezzük a $w = f(z(t))$ függvény t paraméter szerinti deriváltját a t_o helyen:

$$\left[\frac{d\, f(z(t))}{dt} \right]_{t=t_o} = f'(z(t_o))\, z'(t_o) = f'(z_o)\, z'(t_o) \qquad (5)$$

ez - a feltételek miatt - zérustól különböző.

Jelöljük a g görbe z_o pontbeli érintőjének irányszögét φ-vel, a g' görbe w_o pontbeli érintőjének irányszögét ψ-vel.



3. ábra

$$\psi = \text{arc} \left[\frac{d\, f(z(t))}{dt} \right]_{t=t_o} = \text{arc}\, [f'(z_o)\, z'(t_o)] =$$

$$= \text{arc}\, f'(z_o) + \text{arc}\, z'(t_o) = \text{arc}\, f'(z_o) + \varphi. \qquad (6)$$

(Megj.: arc z, a z komplex szám irányszögét, azaz a komplex számot kijelölő vektornak a valós tengely pozitív irányával bezárt szögét jelenti.)

A fenti egyenlőség geometriai értelemben azt jelenti, hogy a z_o pontban érintővel rendelkező görbék képei a w_o pontban szintén rendelkeznek érintővel, s a képgörbe érintője az eredeti görbe érintőjéhez képest arc $f'(z)$ szöggel van elforgatva.

<u>Másképpen fogalmazva:</u> az a szög, mellyel a leképezés során a g görbe elfordul nem függ a g görbe alakjától.

Legyen most g_1 és g_2 a z sík két egymást a z_o pontban metsző görbéje, melyek z_o pontbeli érintőjének irányszöge φ_1 és φ_2, a g_1^* és g_2^* képgörbék irányszöge ψ_1 és ψ_2.

Ekkor a (6) alapján

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \text{arc } f'(z_o) + \varphi_1 \\ \psi_2 &= \text{arc } f'(z_o) + \varphi_2 \end{aligned} \tag{7}$$

s így

$$\psi_1 - \psi_2 = \varphi_1 - \varphi_2, \tag{8}$$

azaz a z_o ponton áthaladó görbék érintőinek hajlásszöge megegyezik a képgörbék z_o-nak megfelelő w_o pontbeli érintőinek hajlásszögével. Azt mondjuk, <u>a leképezés szögtartó</u> a z_o pontban.

Ha a g görbét előállító $z(t)$ függvényre a $z'(t) \neq 0$ a t_o környezetében, $f'(z)$ pedig a z_o környezetében folytonos, akkor $s(t)$-vel jelölve a g görbén, $S(t)$-vel pedig a g* görbén a t_o paraméterű pontból számolt ívhosszúságot - felhasználva, hogy az ívhossz paraméter szerinti deriváltja

$\dfrac{ds(t)}{dt} = |\dot{r}(t)|$ - adódik, hogy

$$\left[\frac{d\, S(t)}{dt} \right]_{t=t_o} = |f'(z_o)\, z'(t_o)| = |f'(z_o)| \left[\frac{ds}{dt} \right]_{t=t_o}. \tag{9}$$

A fenti egyenlőség geometriai tartalma az, hogy a z_o ponton áthaladó különböző görbék ívhosszúságai ugyanolyan arányban torzulnak, azaz <u>a leképezés aránytartó</u>. (Megj.: az

$|f'(z_0)|$ értéket lineáris nyújtási együtthatónak szokták nevezni.)

Az ilyen szögtartó és aránytartó leképezéseket <u>konformis</u> leképezéseknek nevezzük.

Az előzőekben elmondottak az alábbi tételben foglalhatóak össze:

Ha a $w = f(z)$ függvény a z pontban differenciálható és $f'(z) \neq 0$, akkor a $w = f(z)$ függvény által adott leképezés a z-ben konformis, ezen leképezésnél $\operatorname{arc} f'(z)$ jelenti az elforgatás szögét, $|f'(z)|$ pedig a lineáris nyújtási együtthatót a z pontban.

E tétel alapján mondhatjuk: az $f(z)$ leképezés egy T tartománybeli konformitásához elegendő, hogy az $f(z)$ függvény T-ben reguláris legyen, és $f'(z)$ e tartományban zérustól különbözzék.

<u>2. Lineáris törtfüggvény által létesített leképezés vizsgálata</u>

Egy, a feltételeknek eleget tevő $f(z)$ függvény általában csak a z sík egy T tartományát képezi le konformisan a w sík valamely T' tartományára. Ha az $f(z)$ lineáris törtfüggvény – azaz $\frac{az + b}{cz + d}$ alakú, ahol a;b;c;d komplex számok és $ad-bc \neq 0$ –, akkor a függvény a $z = 0$ és $z = \infty$ kivételével a z komplex változó teljes síkjának kölcsönösen egyértelmű és konformis leképezését valósítja meg w teljes síkjára. Az állítás igazsága könnyen megmutatható.

Az $\frac{az + b}{cz + d}$ kifejezés azonos átalakításával adódik a lineáris törtfüggvény "jól kezelhető alakja":

$$f(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + \frac{d}{c}} = \alpha + \beta \frac{1}{z + \gamma} . \qquad (10)$$

Minthogy az additív $(\alpha;\gamma)$ ill. a multiplikatív (β) konstans sem a konformitást sem a deriválhatóságot nem befolyásolja (t.i. az egyik eltolást a másik nyujtást és elforgatást fejez ki a komplex számsíkon), így az állítást elegendő az $f(z) = \frac{1}{z}$ tipusú függvényekre igazolnunk.

A leképezés a $x = 0$ és a $z = \infty$ helyek kivételével mindenütt konformis, hiszen

$$f'(z) = -\frac{1}{z^2} \neq 0 \tag{11}$$

az egész z síkon.

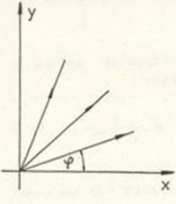
A kölcsönös egyértelműség pl. az alábbiak szerint is megmutatható.

A z sík origó középpontú koncentrikus $x^2 + y^2 = r^2$ köreit a szóbanforgó leképezés a w sík szintén origó középpontú $u^2 + v^2 = \frac{1}{r^2}$ köreibe viszi át. Ez a következő módon adódik. Irjuk fel a z sik köreinek polárkoordinátás előállítását: $x = r \cos\varphi$; $y = r \sin\varphi$, s így a $z = r (\cos\varphi + j \sin\varphi)$. Ekkor:

$$w = f(z) = \frac{1}{r(\cos\varphi + j\sin\varphi)} = \frac{1}{r}(\cos\varphi - j\sin\varphi),$$

melyből a $w = u + vj$ miatt $u = \frac{1}{r}\cos\varphi$; $v = -\frac{1}{r}\sin\varphi$. Ezeket négyzetre emelve és összeadva kapjuk:

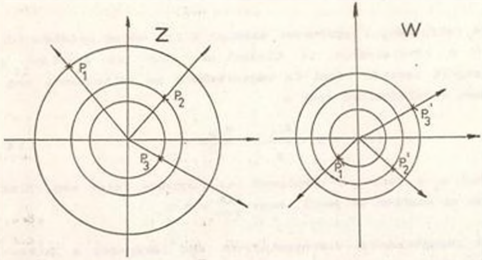
$$u^2 + v^2 = \frac{1}{r^2}. \tag{12}$$



A z sík origóból induló $y = x \operatorname{tg}\varphi$ $\left(\varphi \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$ félegyeneseit viszont az $f(z) = \frac{1}{z}$ leképezés a w sík $v = -u \operatorname{tg}\varphi$ $\left(\varphi \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$ félegyeneseibe viszi át, az y tengely pontjai pedig a v tengelyre képződnek le. Ez pedig azt jelenti, hogy a

4. ábra

z sik origó középpontú köreinek és origóból kiinduló félegyeneseinek metszéspontjai a w sik origó középpontú köreinek és origóból kiinduló félegyeneseinek metszéspontjaiba mennek át, azaz a z sik pontjait egyértelműen képeztük le a w sik pontjaira.



5. ábra

A konformis leképezések gyakorlati alkalmazásában nagy jelentősége van a <u>kerületek kölcsönös egymáshoz rendelése elvének</u>, mely az alábbi tételben fogalmazható meg.

Tegyük fel, hogy a D és D' egyszeresen összefüggő tartományokat a C és C' görbék határolják, és hogy a T-ben reguláris és zárt T tartományban folytonos w = f(z) függvény kölcsönösen egyértelmű kapcsolatot létesít C és C' között. <u>Ekkor f(z) T-nek T'-re való kölcsönösen egyértelmű konformis leképezését adja.</u>

A leképezési feladatoknál általában két tipus különböztethető meg. Egy adott T tartományhoz és a feltételt kielégítő függvényhez keressük a T' tartományt, vagy a T és T' ismeretében a leképezést biztosító függvényt keressük. Ilyen pl. a Zsukovszkij leképezés is, amely a szárnyprofil külseje és egy körlap külseje közti kölcsönösen egyértelmű leképezést biztosítja. Az előző tétel értelmében - mindkét esetben -

elegendő a határoló görbék megfeleltetésére hagyatkozni, mert ebből a tartományok kölcsönös egymáshoz rendelése is adódik.

3. A Zsukovszkij-féle leképezés

A leképezési függvénnyel szemben $f'(z)$ véges értékén túl azt a követelményt is támasztjuk, hogy az áramlást a vizsgált testtől távol (a végtelenben) ne változtassa meg. Ennek a feltételnek csak a

$$w = f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots \qquad (13)$$

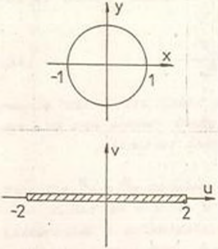
(ahol a_i-k lehetnek komplexek is) függvény felel meg, hisz csak ez esetben teljesül, hogy $\lim\limits_{z\to\infty} w = z$.

A legegyszerűbb szárnymetszetet adó leképezés a Zsukovszkij-féle függvénnyel valósítható meg, amelynél a_1 valós szám (tárgyalásunkban 1-nek választjuk) és $a_2 = a_3 = \ldots = 0$. A leképezési függvény tehát

$$f(z) = w = z + \frac{1}{z} \qquad (14)$$

(egyes szakirodalmak ennek $\frac{1}{2}$ szeresét nevezik Zsukovszkij függvénynek), amely a szárnymetszet külseje és egy kör külseje közt létesít kölcsönösen egyértelmű leképezést.

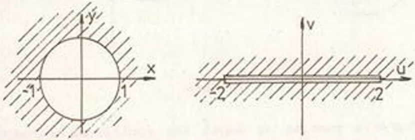
Az $f'(z) = 1 - \frac{1}{z^2} = 0$ egyenletnek eleget tevő pontokban a szögtartóság nem teljesül. Az olyan szárnymetszet, melynek határoló görbéje valamely pontban törést mutat (pl. a kilépőélen), a törést nem mutató körből csak úgy képezhető, ha a törésnek megfelelő körpont a leképezési függvény deriváltjának zérushelye, melyben a szögtartóság megszűnik. Minthogy a szárnymetszetnek rendszerint csak a kilépő éle ilyen pont, így a leképezendő körnek át kell haladnia az $f'(z)$ függvény egyik zérushelyén. A többi zérushelynek már a körön belül kell lennie, hisz egy síkidom külseje és a kör külseje közötti leképezésről van szó. A szóbanforgó körnek tehát át kell haladnia $z = 1$ ponton.



6. ábra

Vizsgáljuk a $w = z + \frac{1}{z}$ leképezést. Ez csak azon z pontokra vonatkozóan lesz kölcsönösen egyértelmű, amelyekre $z_1 z_2 \neq 1$, ha $z_1 \neq z_2$, s az $x^2 + y^2 = 1$ egységkört kétszeresen képezi le a $[-2;2]$ intervallumra.

A $z = \cos \varphi + j \sin \varphi$ és $\frac{1}{z} = \cos \varphi - j \sin \varphi$ miatt $w = z + \frac{1}{z} = 2 \cos \varphi$, azaz $u = 2 \cos \varphi$. Mivel $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, így $-2 \leq u \leq 2$. Az intervallumot az u tengely mentén kettévágva képzeljük el, s a "felső szél" a felső félkörnek, az "alsó szél" pedig az alsó félkörnek felel meg. Ekkor az $x^2 + y^2 > 1$ (azaz $|z|>1$) egységkör külseje pedig a $[-2;2]$ szakasz külsejébe megy át, s a megfelelés konformis és kölcsönösen egyértelmű.



7. ábra

A konformitás következik abból, hogy $f'(z) = -\frac{1}{z^2} \neq 0$ a $|z| > 1$ esetben, a kölcsönösen egyértelmű megfelelés pedig az alábbiak szerint adódik.

A leképezés a $z = r(\cos \varphi + j \sin \varphi)$ $(r>1)$ köröket az

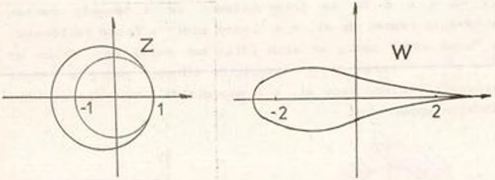
$$\frac{u^2}{\left(r - \frac{1}{r}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(r - \frac{1}{r}\right)^2} = 1 \qquad (15)$$

konfokális ellipszisekbe, míg az origóból induló félsugarakat az

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi} + \frac{v^2}{\sin^2\varphi} = 4 \qquad (16)$$

ugyancsak konfokális hiperbolákba viszi át, s így minden egyes kör és félsugár metszéspontjához rendre egy és csak egy ellipszis és hiperbola metszéspont tartozik.

Tekintsünk most egy olyan kört, amely az $x^2 + y^2 = 1$ kört ($|z|=1$) az $x = 1$ pontban érinti, s az $x = -1$ pontot belsejében tartalmazza. Erre a körre alkalmazva a Zsukovszkij féle $w = z + \frac{1}{z}$ leképezést, az u.n. Zsukovszkij-féle dúcprofilt kapjuk (8. ábra).



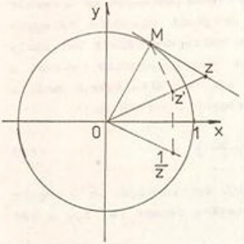
8. ábra

A dúcprofil pontjai az adott kör pontjainak egységkörre vonatkozó inverziója segítségével könnyen megszerkeszthetők.

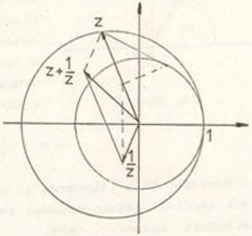
A z-nek megfelelő $\frac{1}{z}$ megszerkesztése az 9. ábra alapján történik, figyelembe véve hogy ha z irányszöge φ, akkor az $\frac{1}{z}$ -é pedig $-\varphi$. Kössük össze z-t az origóval majd húzzunk z-ből az egység körhöz érintőt, s az M érintkezési pontból bocsássunk merőlegest a Oz-re, talppontja legyen z'. Ekkor az Oz'M az OzM háromszögek hasonlósága miatt

$$\frac{Oz}{OM} = \frac{OM}{Oz'},$$

azaz $\frac{|z|}{1} = \frac{1}{|z'|}$, vagy $|z'| = \frac{1}{|z|}$, ezt még a valós tengelyre tükrözve kapjuk az $\frac{1}{z}$-t. A 9. ábra az inverziót, a 10. pedig a dúcprofil egy pontjának megszerkesztését mutatja.



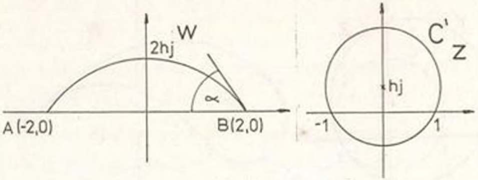
9. ábra



10. ábra

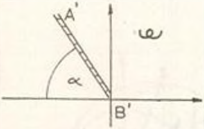
Vizsgáljuk most az alábbi leképezési problémát.

Legyen adva a w síkban egy olyan körvonal, melyre A(-2;0), B(2;0) és az ív a képzetes tengelyt a 2bj -ben metszi. Tekintsük most a z síkon azt a C' kört, amely a valós tengelyt -1 és 1 -ben metszi, középpontja pedig a képzetes tengelyen bj-ben van. Keressük meg az AB ív konformis leképezését a C' kör külsejére.



11. ábra

Megmutatható, hogy ez a leképezés éppen a Zsukovszkij függvénnyel lehetséges.



12. ábra

A bizonyítás gondolata a következő. Az $\omega = \frac{w-2}{w+2}$ leképezés a w sík AB ívének külsejét az ω képsík olyan origóból kiinduló félegyenesének külsejére képezi le, amely a valós tengely negatív felével α szöget zár be. Alkalmazzuk most a z sík megadott körére az

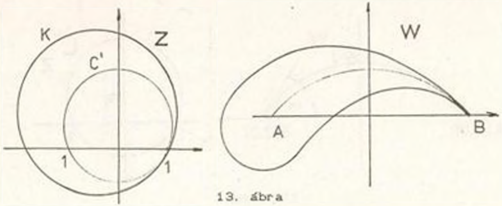
$$\omega = \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^2 \qquad (17)$$

leképezést. Ez a leképezés az adott kör külsejét az ω képsík fent említett félegyenesének külsejére képezi le. Igy a két leképezés "egyenlő", tehát

$$\frac{w-2}{w+2} = \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^2, \qquad (18)$$

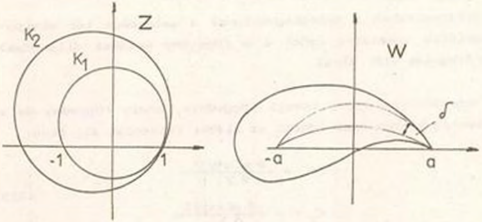
melyből a műveletek elvégzése és rendezés után a $w = z + \frac{1}{z}$ adódik.

Ha most a z sík C' körét, azt a z = 1-ben érintő K körrel vesszük körbe, s erre a K körre alkalmazzuk a Zsukovszkij leképezést, akkor az AB ivet körülfogó Zsukovszkij-féle szárnyprofilhoz jutunk. Ekkor a kilépő él "felső" és "alsó" íve éppen az AB ív - a vázvonal - B pontbeli érintője lesz.



13. ábra

Végül megemlítjük az ú.n. Kármán - Trefftz-féle profilt. Ennek lényege, hogy olyan leképezést alkalmazunk, amely a z sík valós tengelyét -1 és 1 pontban metsző K_1 kört a w sík olyan körívkétszögére képezi le, melynek csúcspontjai w = -a és w = a. Vegyünk fel a z síkban egy olyan K_2 kört, amely a K_1 kört tartalazza és z = 1 pontban érinti. Ekkor a K_2 kör képe az említett profil lesz.



14. ábra

Megmutatható, hogy ha $\delta \to \pi$ (δ tart π-hez), akkor ebből a Zsukovszkij profilhoz jutunk.

4. A síkáramlások leírási módjai

Találunk olyan áramlásokat, ahol az egymással párhuzamos síkok áramképei - sebesség és állapotjelző eloszlásai - megegyeznek (ilyen a "végtelen" szárny körüli áramlás). Az ilyen áramlásokat, amelyeket síkáramlásoknak nevezünk, legcélszerűbb a komplex számsíkon vizsgálni. Azaz:

$$c = c_x + c_y\, j$$
$$c_x = c_x\,(x + y\, j) \qquad (19)$$
$$c_y = c_y\,(x + y\, j)$$

Ha az áramlás instacioner, természetesen a sebesség a τ idő függvényében is változik.

Örvénymentes áramlás esetén létezik egy sebességi potenciálnak nevezett - jelen esetben φ (x+yj) függvény, amelyből gradiens képzéssel származtatható a sebességtér:

$$c_x = \frac{\partial \varphi (x+yj)}{\partial x}$$

$$c_y = \frac{\partial \varphi (x+yj)}{\partial y} \qquad (20)$$

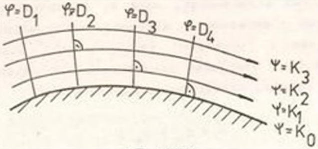
Síkáramlásban a sebességvektorok a sebességi tér ekvipotenciális vonalaira (ahol a φ függvény értékei állandóak) merőlegesek (15. ábra).

Vezessünk be egy ψ (x+yj) függvényt, amely függvény és a sebesség komponensek között az alábbi kapcsolat áll fenn:

$$c_x = \frac{\partial \psi(x+yj)}{\partial y}$$

$$c_y = - \frac{\partial \psi(x+yj)}{\partial x} \qquad (21)$$

Ilyen ψ függvényt általános esetben sajnos nem találunk, de összenyomhatatlan közeg forrásmentes síkáramlása esetén létezik ilyen skalár tér. Ekkor minden áramvonalhoz ψ egy-egy meghatározott értéke rendelhető. Ez azt jelenti, hogy az adott pontbeli sebességvektorok egy ψ = állandó görbe érintői lesznek (15. ábra). Ezt a ψ függvényt áramfüggvénynek nevezzük.



15. ábra

A (20) és (21) egyenletek egybevetése alapján megállapítható, hogy a sebességi potenciál és az áramfüggvény örvény és forrásmentes síkáramlás esetén a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{22}$$

egyenletek szerint kapcsolatosak egymással. Ez utóbbi egyenletek viszont alakilag megegyeznek a komplex függvények differenciálhatósági feltételeit kifejező Cauchy-Riemann parciális differenciálegyenletekkel (lásd (3) egyenlet).

Ez alapján tehát a $z = x + yj$ számsíkon képezhető egy

$$W(z) = \varphi(z) + j\ \psi(z) \tag{23}$$

alaku - komplex potenciálnak nevezett - függvény. Ez egy olyan reguláris komplexváltozós függvény, amelynek a $\varphi(z)$ sebességpotenciál a valós, a $\psi(z)$ áramfüggvény pedig a képzetes része. A komplex potenciál

$$\frac{dW(z)}{dz} = c_x - c_y\ j = \hat{c} \tag{24}$$

differenciálhányadosa az adott pontbeli sebességvektor konjugáltját adja, amelynek abszolút értéke megegyezik a sebességvektor abszolút értékével.

A komplex potenciál bevezetése számos előnnyel jár. Például bonyolultabb áramlás sebességterét meghatározhatjuk több ismert, egyszerűbb sebességtér komplex potenciáljának összegzése segítségével. Mind forrásos, mind örvényes síkáramlás leirható komplex potenciállal, ami csak sebességi potenciállal vagy áramfüggvénnyel nem tehető meg.

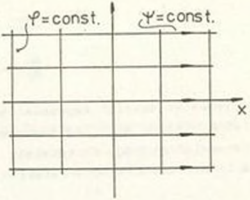
Most ismerkedjünk meg röviden néhány egyszerű áramkép komplex potenciáljával.

<u>Párhuzamos síkáramlás</u>

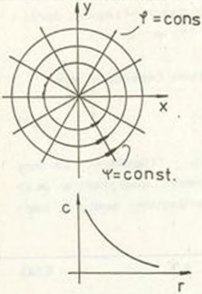
Ekkor a síkáramlás sebessége mindenütt egyenlő és az áramvonalak párhuzamos egyenesek, igy a komplex potenciál:

$$W(z) = C\,z \qquad (25)$$

ahol C egy állandó komplex szám. Ha az áramlás párhuzamos a valós tengellyel, akkor C valós szám (16. ábra).



16. ábra



17. ábra

Potenciálos örvény

A potenciálos örvény sebesség megoszlása a sugár függvényében hiperbolikus, így áramlása az örvényvonalon kívül örvénymentes. Ha a koordinátarendszer kezdőpontját az örvényvonal és az áramlási sík döféspontjába helyezzük, akkor az áramlás komplex potenciálja:

$$W(z) = j\,\frac{\Gamma}{2\pi}\,\ln z\,, \qquad (20)$$

ahol Γ az örvény erössége. Az áramvonalak az origóra koncentrikus körök, az ekvipotenciális vonalak pedig a kezdőponton áthaladó egyenesek (17. ábra).

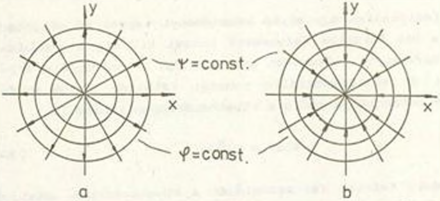
Forrás vagy nyelő

Az áramlási tér azon pontját, amely szüntelenül folyadékot bocsát ki és onnan minden irányba egyenletesen elfolyik, forrásnak nevezzük (18a. ábra). Nyelőről akkor beszélünk, ha a sebesség értelmét ellenkezőjére változtatjuk, mert ekkor a középpontban állandóan folyadék tűnik el (18b. ábra).

Az origó középpontú síkbeli forrás komplex potenciálja:

$$W(z) = \frac{\dot{q}}{2\pi}\,\ln z\,, \qquad (27)$$

ahol $\dot{q}$ -ot forrásbőségnek nevezhetjük. Ekkor az áramvonalak az origóból kiinduló egyenesek, melyek az origó középpontú kör alakú ekvipotenciális vonalakkal alkotják az áramlást jellemző hálózatot.



18. ábra

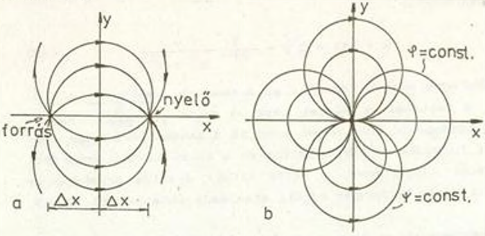
<u>Dipólus</u>

Azonos intenzitású forrás és nyelő megfelelő szuperpozíciójával ugynevezett dipólus áramlást kapunk.

Legyen a valós tengely $-\Delta x$ pontjában egy $\dot{q}>0$ bőségű forrás, a $+\Delta x$ pontjában pedig egy $-\dot{q}$ bőségű nyelő (19a. ábra). Nevezzük el a dipólus momentumának az

$$M = \dot{q}\ \Delta x \tag{28}$$

mennyiséget.



19. ábra

A momentum akkor is állandó marad, ha a forrást és a nyelőt közelítjük egymáshoz, azaz:

$$\lim_{\Delta x \to 0} (\dot{q}\ \Delta x) = M = \text{const.} \tag{29}$$

Ilyen feltétellel egy olyan képződményt kapunk az origóban, amely a bal félsikba folyadékot bocsát ki, mig a jobboldaliról ugyanannyi folyadékot nyel el. Egy ilyen dipólus áramvonalai és ekvipotenciális vonalai láthatók a 19b. ábrán, komplex potenciálja pedig a következőképpen irható le:

$$W(z) = \frac{M}{2\pi z} \tag{30}$$

Az eddig leirtak felhasználását a következőkben mutatjuk be.

5. Profil körüli nyomáseloszlás vizsgálata

Először helyezzünk egy dipólust a valós tengellyel párhuzamos áramlásba. A két áramlás komplex potenciáljának összegeként - a szuperpozició elve alapján - az eredő áramlás komplex potenciálját kapjuk meg:

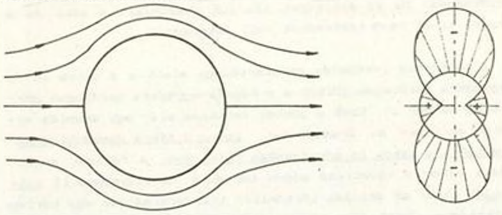
$$W(z) = C z + \frac{M}{2\pi z} \tag{31}$$

A fenti egyenletet kifejtve megkaphatjuk az adott áramlás áramfüggvényét:

$$\psi (x + yj) = C y - \frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} . \tag{32}$$

Különleges esetet képez az az áramvonal, amelyre a $\psi = 0$. Ennek a feltételnek eleget tesz az $r_o = \sqrt{\frac{M}{2\pi C}}$ sugarú origó középpontú kör. Mivel ezen az áramvonalkörön nem léphet át folyadék, a körön belüli és a körön kivüli áramlások egymástól függetlenek. A körön kivüli áramlás áramképe az ideális közeg körhenger körüli áramlását mutatja (20. ábra).

Természetesen az összenyomható és surlódásos közeg körhenger körüli áramlása eltér ettől az áramlástól, de ez az áramlás alapot ad a szárnymetszetek körül kialakuló áramlás vizsgálatához. A kört - mint az a cikk első felében leirtakból kitűnik - egyszerűen lehet szárnymetszetekhez hasonló görbévé transzformálni.



20 ábra

A körhenger körüli áramlás komplex potenciáljának deriválásával az adott pontbeli konjugált sebességet kapjuk meg. Jelen esetben:

$$\hat{c} = \frac{dW(z)}{dz} = \left[1 - \frac{r_o^2}{z^2} \right] \tag{33}$$

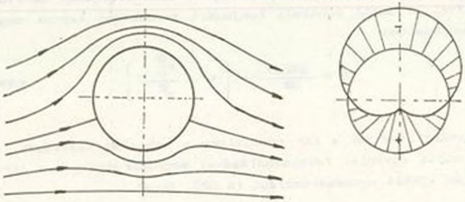
Ha pedig ismerjük a kör pontjaiban a sebesség nagyságát, a Bernoulli egyenlet felhasználásával meghatározhatjuk a körhenger körüli nyomáseloszlást is (20. ábra).

Helyezzünk el egy r>1 sugarú körhenger körüli áramképet úgy a z komplex számsíkon a valós tengelyre szimmetrikusan, hogy a hátsó torlópont a +1 pontban legyen. Ekkor a Zsukovszkij féle leképezés alkalmazásával (lásd 8. ábra) a 3. fejezetben leirt módon megkapjuk a dúcprofil körüli nyomáseloszlást.

Miért igy kell elhelyezni a körhengert a z számsíkon? Azért mert a Zsukovszkij leképezés a -1 pontban - mivel ott a függvény deriváltja zérus - elveszti a szögtartóságát. Igy -

a Zsukovszkij profilra jellemző – késéles kilépőél alakul ki. Illetve az $r_o > 1$ egyenlőtlenség miatt a másik kritikus pont ($z = 1$) a kör belsejébe kerül. A körön belül kialakult de a körön kivülitől független áramlást nem képezzük le a w képsíkba. A nyomáseloszlás meghatározásához a kör leképezése szükséges. Ha az áramképet akarjuk szemlélni, a kört és a rajta kivül lévő tartományt kell leképezni.

A konformis leképezés szögtartósága miatt a z síkon levő, egymásra merőleges görbék a w képsík egymásra merőleges görbéibe mennek át. Ezek a görbék lehetnek akár egy áramlás ekvipotenciális és áramvonalai. Így a z síkra megadott áramképnek a w síkon is egy áramkép felel meg. A feladat megoldása ekkor a következő módon történik: a szárnyprofil külsejét (ahol az áramlás történik!) transzformáljuk egy körlap külsejére, majd az eredeti problémát körlapra fogalmazzuk át, megoldjuk és a transzformációt az "ellenkező irányba" alkalmazva kapjuk az eredeti feladat megoldását.



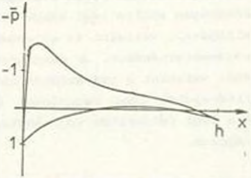
21. ábra

Az előzőekben leirt körhenger körüli áramlásra szuperponáljunk még egy Γ erősségű potenciálos örvényt is. Ekkor az áramkép egy forgó körhenger körüli áramlásnak fog megfelelni, amely a 21. ábrán látható. Az áramlás komplex potenciálja pedig

$$W(z) = C\,z + \frac{M}{2\pi z} + j\,\frac{\Gamma}{2\pi}\ln z \qquad (34)$$

lesz. Természetesen most is meghatározható a körhenger körüli nyomáseloszlás. Ha ezt az áramképet az előző módon elhelyezzük a z komplex számsíkon és a Zsukovszkij vagy a Kármán-Trefftz módon leképezzük a w számsíkra (lásd 13. és 14. ábrák), akkor egy szárnyprofil körüli áramképet kapunk.

Az álló körhengernél leirtak alapján meghatározható az szárnyprofil körüli nyomáseloszlás és ebből - ideális közeg áramlása esetén - a keletkező eredő felhajtóerő is (22. ábra).



22. ábra

Felhasznált irodalom

1 - J. Duncan: Bevezetés a komplex függvénytanba, Műszaki Könyvkiadó Budapest 1974;

2 - Dr. Gáspár Gyula: Komplex függvénytan, Tankönyvkiadó Budapest 1982;

3 - Fuksz - Szabat: Komplex változós függvények és néhány alkalmazásuk, Tankönyvkiadó Budapest 1971;

4 - Fazekas Ferenc: Komplex függvénytan, Tankönyvkiadó Budapest 1963;

5 - Dr. Pásztor E. - Dr. Konecsny F.: Műszaki hő- és áramlástan II. Tankönyvkiadó Budapest 1981;

6 - Dr. Gruber J. - Blahó M.: Folyadékok mechanikája Tankönyvkiadó Budapest 1963;

7 - Мхитарян А.М.: Аэрогидромеханика, Машиностроение Москва 1984.