

Sándor Endre főiskolai docens:

A FELADATMEGOLDÁS NÉHÁNY ELVI, MÓDSZERTANI
PROBLÉMÁJA

Alighanem minden pedagógus, de főként természettudományos gondolkodást igénylő tantárgyat tanító tanár találkozott a hallgatók többségének a problémájával, hogy nem tud hozzáférni a feladat megoldásához. Jelen cikkben - teljesség igénye nélkül, mintegy gondolatébresztésül - szeretnék egy-két gondolatot fölvetni, néhány forrásmunkára és a tapasztalatra támaszkodva arra vonatkozóan, hogy miként érzem "jósnak" a gondolkodás formálását, hogy milyen stratégiát képelek el általában a feladatmegoldás megtanítását illetően.

A probléma meglehetősen komplex és sok oldalról megközelíthető. Mindenesetre a gyakorló pedagógus érzi, hogy a feladatmegoldó órák, az ismeretek gyakorlati alkalmazását igénylő foglalkozások megszervezése és vezetése az egyik legnehezebb didaktikai feladat. A módszertan szerint is helytelen az a gyakorlat - mégis tipikus -, amikor egy hallgató dolgozik a táblánál, és önállóan vagy a tanár segítségével, esetleg a szakasz bevonásával, megold egy feladatot. A szakasz bevonása ilyenkor rendszerint abból áll, hogy valamelyik hallgató a helyén ülve elvégez egy-egy részműveletet, s annak eredményét hangosan diktálja. Ekkor a szakasz nagy része másol.

Az ilyenfajta gyakorlásból a szakasz egyetlen hallgatója sem profitál. A helyükön ülő hallgatók többsége nem gondolkodik a feladat megoldásán, hiszen az a felelős gondja, a táblánál dolgozó hallgató munkáját pedig a tanár állandóan megszakítja azzal, hogy egy-egy részletet mással végeztet el.

A leghatékonyabb módja a gyakorlásnak az, ha minden hallgató teljesen önállóan oldhatja meg a számára kitűzött feladatot vagy feladatokat.

Feladatunk tehát megmutatni azt az utat, a gondolkodásnak azt a módját, amelyet általában követni kell a kitűzött feladatok megoldása során.

Látnunk kell azt is, hogy a matematikai problémák megoldásában való jártasság általában a problémamegoldó gondolkodás képességét hivatott kifejleszteni. Végsősoron ez adja - főként az alap- és középfokú képzésben - az iskolai matematika-tanítás nagy jelentőségét, és ezért mondjuk azt, hogy a matematika-tanítás elsődleges és legfontosabb feladata az önálló gondolkodásra, problémamegoldásra nevelés.

A tanítás során előforduló matematika feladatokat két csoportra szokták osztani: gyakorló- vagy típusfeladatok, ill. gondolkodtató feladatok. A gyakorló- vagy típusfeladatok általában olyan feladatok csoportját jelentik, amelyek az elméleti összefüggések, formulák, típuseljárások közvetlen egyszerű alkalmazását kívánják meg. Természetesen e feladatcsoport a maga szintjén is gondolkodtató, hiszen a tanárnak tudatosan fel kell hívnia a hallgatók figyelmét azokra a feltételekre, jegyekre, amelyek az adott eljárás alkalmazását lehetővé teszik, így az előző felosztás nem feltétlen helytálló. Típusfeladattá egy feladat akkor válik, ha már annyiszor oldották meg azt a típust, hogy a gondoltsor automatizált készség szintjén jelentkezik, a feladatot "gondolkodás nélkül", könnyűszerrel is meg tudják oldani. A sok egyforma vagy hasonló típusfeladat megoldása nem viszi előre a hallgatókat a matematika-tanítás általános célja felé, ti.: azt a bizonyos feladattípust meg tudják oldani, de ezeken keresztül nem feltétlenül sajátítják el a feladatok megoldásának általános technikáját. A sablonfeladatok mégis szükségesek a matematika oktatásában, hiszen az ismeretek rögzítését segítik elő, de pusztán csak a sablonfeladatok megoldása, a megoldási módszer gépies gondolkodás szintjén, ok-okozati összefüggések nélküli gyakoroltatása, begyakorlása megbocsáthatatlan dolog.

Véleményem szerint a fenti probléma élessége tompítható, ha a feladatok megoldásának módját - még a típusfeladatokét is - akként mutatjuk meg, hogy megvilágítjuk a feladatok megoldásának általános technikáját.

A következőkben erre a "technikára" vonatkozóan szeretnék néhány megjegyzést tenni, főként az algoritmizálható vagy típusfeladat megoldásának oldaláról, és esetleg kitérve más típusú megoldásokra is. A gondolataimat alapvetően matematikai oldalról fejtem ki, de úgy gondolom, hogy ezek adaptálhatók azon tárgyak körére is, amelyek a matematikát felhasználják.

Lényegében minden feladatmegoldás során a feladatokban megbúvó, egymással szorosan összefüggő, de mégis különböző hármasságból kell kiindulnunk:

1. Cél,
2. Feltételrendszer,
3. Alkalmazható számítási eljárások.

E három elem bármely feladattípusnál mindig megtalálható. Ezek segítségével az algoritmizálható feladatok megoldásának általános sémája röviden az alábbi módon fogalmazható meg.

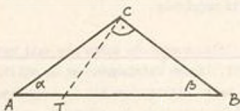
A cél és a feltételrendszer egyeztetésével kiválasztani az alkalmazható számítási eljárásokat, és ezeken alapuló megoldási algoritmus készítése, végül a feladat algoritmuson alapuló megoldása.

1. A cél jelentése világos: az, amit a feladatmegoldás során meg kell határozni, amit a feladat célul tűz ki. Tágabb értelemben: az az állítás, amit a feladat kapcsán bizonyítani kell. Általánosan azt is mondhatjuk, hogy minden feladatmegoldás is célként tartalmaz egy állítást, ti. azt, hogy a meghatározandó értéke az, ami. Egy egyenlet megoldása során azt is mondhatnánk: bizonyítsuk be, hogy például az egyenlet gyöke 3.
2. A feltételrendszer összetettebb, ugyanis megkülönböztethetünk un. explicit illetve implicit feltételeket.
Az explicit feltételek alatt mindazon adatok (mennyiségek) összességét kell érteni, amelyek a cél eléréséhez közvetlen információkat adnak. Ezek lehetnek megadott adatok, vagy feltételként megadott tulajdonságok. Az implicit feltételek alatt egyrészt azon feltételek, tulajdonságok összességét kell értenünk, melyek a szóban forgó céllal kapcsolatos objektum mibenlétéből következnek, másrészt pedig számolható adatok.
3. Az alkalmazható számítási eljárások azon fogalmak, tételek összessége, amelyek az adott probléma megoldására közvetlenül alkalmasak, vagy amelyek alkalmazását a feltételrendszer elemei (feltételei) biztosítják.

Nyilvánvaló, hogy a feladatmegoldások vagy általában a problémamegoldások során alapvető követelmény e három egység első lépésként való tisztázása, az egységekben levő elemek tudatos feltárása. Mindenekelőtt fontos - mondhatni prioritási kérdés - az elérendő vagy kitűzött cél tisztánlátása. A célt mindig világosan kell látnunk, tudnunk kell, hová kell eljutnunk. (Mi a célunk? Mit is akarunk?) Az algoritmus felállítása során minden alkalmazott lépésnél tisztázunk kell, hogy közelebb jutottunk-e az elérendő célhoz.

A következő lépésben feltétlenül tisztázunk kell a rendelkezésre álló feltételrendszer elemeit. Az explicit és implicit feltételek jelentésének tisztázása érdekében tekintsük az alábbi példákat.

F.1. Az ABC egyenlő szárú háromszög alapja 32 cm, a szárak hossza 20 cm.



Az alappal szemközti csúcsban merőlegest állítunk az egyik szárra. Mekkora részekre osztja ennek meghosszabbítása az alapot?

Explicit feltételek:

a./ Megadott adatok: $c = 32$ cm ; $a = b = 20$ cm ; $\angle C = 90^\circ$.

b./ $\alpha = \beta$.

Implicit feltételek:

a./ Minden olyan tétel, amely a háromszögben érvényes.

b./ A $CTB \triangle$ derékszögű háromszög.

c./ Az $ACB \sphericalangle$ szögfelezője merőlegesen felezi az AB szakaszt.

F.2. Oldjuk meg az alábbi egyenletet:

$$\frac{x+2}{x+1} + \frac{x-2}{x-1} = \frac{4}{x^2-1} \quad | \cdot$$

Explicit feltételek:

- a./ A felírt egyenlőség egyenlet.
- b./ Az egyenlet típusa: ismeretlen nevezőben tartalmazó egyenlet.

Implicit feltételek:

- a./ Az ismeretlen szóba nem jöhető értékei -1, ill. 1.
- b./ $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$
- c./ A vonatkozó egyenletrendezési szabályok.

F.3. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet:

$$y'' - 3y' - 10y = x^2 + 2x + 3$$

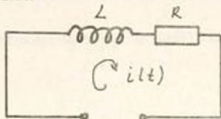
Explicit feltétel:

Az adott egyenlet differenciálegyenlet.

Implicit feltételek:

- a./ A differenciálegyenlet lineáris.
- b./ A differenciálegyenlet konstans együtthatós.
- c./ A differenciálegyenlet inhomogén.
- d./ A differenciálegyenlet másodrendű.
- e./ A zavarótag másodfokú polinom.

F.4. Egy 100 V-os egyenfeszültségű áramforrás sarkaira a sorbakapcsolt $L = 0,5$ H induktív és $R = 100 \Omega$ ohmikus ellenállásokat kötjük. Határozzuk meg, hogy az áramerősség mennyi idő alatt éri el a 0,99 A értéket!



Explicit feltételek:

- a./ Megadott adatok: $L = 0,5 \text{ H}$, $R = 100 \Omega$, $U = 100 \text{ V}$
b./ R és L sorbakapcsolt ellenállások.

Implicit feltételek:

- a./ Érvényes Kirchhoff II. törvénye.
b./ Érvényes Lenz törvénye.
c./ Az induktív ellenálláson eső feszültség $L \frac{di}{dt}$, az ohmikus ellenálláson eső feszültség $R \cdot i$.
d./ Érvényes a következő kezdeti feltétel $i(0) = 0$.

Természetesen a fenti feltételek figyelembevételével megalkotott matematikai modell további elemzésre szorul.

Mint az előző példából kiderül, az implicit feltételek megállapításához az objektumot elemeznünk kell. Elemeznünk kell magát a fizikai jelenséget: meg kell állapítanunk az érvényes fizikai törvényszerűségeket, elemeznünk kell az algebrai szerkezetet, ill. fel kell tárunk a geometriai objektum tulajdonságait.

A harmadik elemet, az alkalmazható számítási eljárásokat a cél figyelembevételével kell számbavennünk. Ez azt jelenti, hogy tisztáznunk kell a cél eléréséhez alkalmas számítási eljárásokat, majd ezeket szelektálnunk kell: csak azokat az eljárásokat tartjuk meg, melyek alkalmazásához szükséges feltételek a feltételrendszerben megtalálhatók.

Az oktatás során tehát nagyon fontos hangsúlyoznunk és tisztáznunk, hogy mely eljárások milyen mennyiségek meghatározására alkalmasak, ill. az egyes matematika szerkezetekhez milyen megoldási elvek csatlakoznak.

Például az előzőekben megadott feladatok esetén az alábbiakat kell tisztáznunk:

F.1. esetén:

- a./ Milyen általános módszert ismerünk szakasz hosszának és szög nagyságának meghatározására?

- b./ Milyen tételek, összefüggések alkalmasak "hossz" meghatározására?
(Ezek: Pitagorasz-tétel; szögfüggvények, sinus-, cosinus-tétel; hasonlóság; párhuzamos szelők tétele; arányossági tételek a derékszögű háromszögben, stb.)
- c./ Milyen tételek, összefüggések alkalmasak szög nagyságának meghatározására?
(Pl.: szögfüggvények, sinus-, cosinus-tétel, hasonlóság, szögpárok)

F.2. esetén:

- a./ Milyen szerkezetű az egyenlet?
- b./ Mi a megadott szerkezetű egyenlet megoldásának általános sémája?
- c./ Hogyan kell megállapítani a legkisebb közös többszöröst?
- d./ Milyen azonosságokat kell alkalmazni a szorzattá alakításhoz?
- stb.

Az F.3. feladat esetén:

- a./ Hogyan áll elő a lineáris inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása?
- b./ Mi a homogén egyenlete és az milyen szerkezetű?
- c./ Hogyan kell a partikuláris megoldást meghatározni a differenciálegyenlet szerkezetének függvényében?

Az ismertetett "hármasság" tisztázása után kell a megoldási algoritmust felépítenünk. Itt is legfontosabb a cél szem előtt tartása: abból lebontva építjük fel az algoritmust eljutva a kiinduló feltételekig.

Pólya György az algoritmus felépítésére az alábbi, jól kezelhető sémát adja:

"Problémánk van - olyan A célunk, amelyet közvetlenül nem tudunk elérni. A cél megvalósításához megfelelő tevékenységet keresünk. A cél lehet elméleti vagy gyakorlati, esetleg matematikai: valamilyen mennyiség meghatározása vagy valamilyen tétel bizonyítása. A cél kezünkbe adja az eszközt, szüli az eszköz gondolatát, B eszközt, amely az A cél elérésére szolgálhat. Gondoljuk, hogy A-hoz eljuthatunk B megléte esetén. Ennek a B eszköznek gondolata szüli az eléréséhez alkalmas C gondolatát. A C-hez való eljutás szüli a D gondolatát, melynek megléte elvezethet C-hez, és így tovább. D-t megszerezhetjük, ha volna E-nk, no de már E-nk van! Ez az E zárja a gondolatláncot, E-vel "már rendelkezünk", az dott, ismert.

A gondolatlánc tehát: azt vizsgáltuk, hogy elérnök A-t, ha B, B-t, ha C, C-t, ha D, D-t, ha E. Ez a fázis a megoldás tervezése, az algoritmus felállítása. (Megjegyzés: A feladatot matematikai értelemben akkor érti a hallgató, ha mindezt átlátja!) A kivitelezés, a feladatmegoldás gyakorlati megvalósítása e láncolat visszafelé való felgöngyölítése: E-ből kiindulva eljutunk D-hez, D-ből C-hez, C-ből B-hez és B-ből A-hoz."

Nézzünk ismét egy példát!

F.5. Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amely áthalad a $P_1(3;0)$ és $P_2(-1;2)$ pontokon, és a középpontja az $x-y+2=0$ egyenesre illeszkedik!

1./ Cél: a kör egyenletének felírása, azaz "látnunk kell" a kör egyenletét $(x-u)^2+(y-v)^2 = r^2$ - szükségünk van tehát a középpont két koordinátájára $K(u;v)$ és a kör sugarára (r).

2./ Feltételrendszer

a./ Explicit feltételek:

- a kör áthalad a $P_1(3;0)$ és $P_2(-1;2)$ pontokon: azaz mindkét pontnak ki kell elégítenie a kör egyenletét!
- a középpont az $x-y+2 = 0$ egyenes valamely pontja.

Megjegyzés: Pólya György az amerikai Stanford egyetem magyar származású világhírű professzora.

b./ **Implicit feltételek:**

- P_1P_2 szakasz a kör egy húrja (azaz a P_1 és P_2 egyenlő távolságra van a kör középpontjától);
- a kör bármely húrjának felező merőlegese átmegy a kör középpontján;
- a kör sugara bármely kerületi pontjának a középponttól mért távolsága;
- az érintő és az érintési pontba húzott sugár merőlegesek egymásra;
- bármely kerületi szög fele a vele azonos köríven nyugvó középponti szögnek;
- érvényes a Thalesz-tétel;
- körhöz külső pontból húzott érintőre vonatkozó tulajdonságok; stb.

3./ A cél szempontjából figyelembe veendő (alkalmazható) számítási eljárások, elvek:

- pont koordinátáinak meghatározására vonatkozó módszerek, elvek;
- metszéspont koordinátáinak meghatározása a mértani helyek (alakzatok) egyenletéből adódó egyenletrendszer megoldását kívánja meg;
- a sugár hossza két pont távolságaként adódik;
- az egyenes egyenletének irányvektoros alakja (párhuzamosság és merőlegesség feltétele);
- felezőpont koordinátáinak meghatározása.

4./ Az algoritmus kialakításánál is a célból kell kiindulnunk - azt mindenkor szem előtt kell tartanunk -, és az algoritmus egyes fázisait kérdésekre adott válaszok alapján célszerű felépíteni. A kérdéseket akkor tekinthetjük jól megfogalmazottnak, ha megválaszolásuk a problémamegoldó-képesség kifejlesztéséhez adnak általános ismereteket, intuícókat.

A kérdéseknek a logikai kapocs, az ok-okozati összefüggések megláttatására kell irányulniuk.

Az F.5. feladat kapcsán a következő kérdések megválaszolása segíthet az algoritmus felállításában.

- 1./ Pont meghatározására milyen módszerek vannak a koordináta-geometriában?
- 2./ Milyen alakzatok - mértani helyek - metszéspontjaként adódnak a középpont?
- 3./ Ezekből melyiket ismerjük és melyiket kell meghatározni?
- 4./ A meghatározásra szoruló egyenlet felírására milyen adatok állnak rendelkezésre? Mit kell ismernünk az egyenlet felírásához?
- 5./ A hiányzó adatok milyen feltételekből határozhatók meg? Ezek közül melyik hozható kapcsolatba a céllal és a feltételrendszerrel?
- 6./ Hogyan kell egy normál vektort előállítani?
- 7./ A húr irányvektora vagy vektor meghatározásához mit kell ismernünk?
- 8./ Felezőpont meghatározásához mire van szükség?

E kérdések megválaszolásával az algoritmus fázisai felépíthetők, s e láncolatban visszafelé haladva oldjuk meg a feladatot.

A probléma megoldásának az előző algoritmus alapján történő felvázolását Pólya György Hobbes nyomán regresszív tervnek, míg a kivitelezést progresszív munkának nevezi.

Az algoritmus felépítésének azonban van egy általánosabb formája is. Tudniillik, amikor nem tisztán egy másodlagos cél szükséges az A cél eléréséhez.

Pólya György a következőképpen fogalmaz:

"Célunk A. Közvetlenül nem érhetjük el, de észrevesszük, hogy ha különböző dolgokkal, B'-vel, B''-vel, B'''-vel... rendelkezünk, akkor elérhetnők. Nos ezek a dolgok ugyan nincsenek meg nekünk, de azon kezdünk töprengeni, hogyan is szerezhetnők meg őket; s akkor másodlagos célul tűzzük ki B', B'', B''' elérését. Némi gondolkodás után esetleg rájövünk, hogy megvalósíthatnók másodlagos célunkat, ha egy sereg másik dologgal rendelkezünk, legyen az mondjuk C', C'', C''' ... Valójában ezek nincsenek birtokunkban, de próbálkozunk a megszerzésükkel, és így ezeket tűzzük ki harmadlagos célul, és így tovább. Egyre szűvögetjük tervünk hálóját. Esetleg többször mondjuk majd: "miért lehetne ez, ha azokkal és azokkal rendelkezünk", egészen odáig, amíg szilárd alapszálakra találunk, olyan dolgokra, amelyek valóban a birtokunkban vannak. Hálónk szövedéke a fő célnak alárendelt mellékcélok és azok összessége."

Véleményem szerint a problémamegoldó képesség kifejlesztése, az önálló feladatmegoldás gátjaként jelentkező "nem tudom, hogy kezdjek hozzá a feladat megoldásához" probléma kiküszöbölésének útja, hogy tudatos és következetes tanári munkával - kimondva vagy kimondatlanul - már a legegyszerűbb alkalmazási szintet megkövetelő feladatoknál is kérdéseinknek a tárgyalat egységei megvilágítására kell irányulniuk. Fel kell hívni a hallgatók figyelmét a cél, a feltételrendszer és az alkalmazható eljárások feltárására. Ugyanakkor a foglalkozások tartásakor kiemelten hangsúlyozni kell, hogy az ismertetett apparátusok alkalmazásának mi a feltétele, s hogy milyen szerkezetű problémák megoldására alkalmasak.

A feladatokban megbúvó "elemek" feltárása és az algoritmus felépítése közös, frontális munkával elvégezhető, s a gyakorlati megvalósítás már önálló munkával történhet.

Nem szabad figyelmen kívül hagynunk - épp a problémaérzékenység kifejlesztése végett sem - a feladatok diszkusszióját. El kell végezni a megoldás diszkusszióját is, s ugyanakkor a feltételrendszerből eredő diszkussziót is.

Például:

F.6. Oldjuk meg az alábbi egyenletet!

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = 1.$$

Ha a sablonos megoldást, az egymás utáni kétszeri négyzetre emelést alkalmazzuk, akkor $x = \frac{5}{4}$ adódik megoldásként, amely természetesen hamis gyök.

A diszkusszió alkalmazásával azonnal adódik, hogy a feladatnak a sikeres megoldására ugyanis $x \geq 1$ -nek kell teljesedni, azaz csak az ennek eleget tevő x -ek között kereshető a feladat megoldása, azonban $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$ összeg már $x = 1$ esetén is nagyobb, mint az 1.

Az előzőekben olyan feladattípus megoldásáról beszéltem, amelynek megoldása algoritmizálható volt, azaz a megoldási terv felépíthető volt.

A megoldási terv azonban - különösen, ha nem megszokott feladattal van dolgunk - nem egyszerre bontakozik ki. Gyakran csak sejtésekre támaszkodhatunk, "ad hoc" megoldásokat keresünk, amelyeket végig kell próbálni ahhoz, hogy meglássuk, célravezetőek-e. Az ilyen sejtésekkor alkalmazott, nem végleges, inkább útkereső okoskodást nevezi Pólya heurisztikus okoskodásnak. A heurisztikus okoskodás kialakításához segítenek a Pólya-féle lista kérdései.

"Nem talákoztál már a feladattal? Esetleg a mostanítól kissé eltérő formában?

Nem ismersz valami rokon feladatot? Vagy olyan tételt, aminek hasznát vehetnéd?

Nézzük csak az ismeretlent! Próbálj visszaemlékezni valami ismert feladatra, amelyben ugyanez - vagy ehhez hasonló - az ismeretlen!

Itt van egy már megoldott rokon feladat. Nem tudnád hasznosítani? Nem tudnád felhasználni az eredményét? Nem tudnád felhasználni a módszerét? Nem tudnád esetleg valami segédelem bevezetésével felhasználhatóvá tenni?

Nem tudnád átfogalmazni a feladatot? Nem tudnád másképpen is átfogalmazni? Idézd fel a definíciót!

Ha nem boldogulsz a kitűzött feladattal, próbálkozz először egy rokon feladattal! Nem tudnál kigondolni egy könnyebben megközelíthető rokon feladatot? Egy általánosabb feladatot? Vagy egy speciálisabbat? Vagy egy analóg feladatot? Nem tudnád megoldani legalább a feladat egy részét? Tartsd meg a kikötés egyik részét, a többit ejtsd el! Mennyire van így meghatározva az ismeretlen, mennyiben változhat meg? Nem tudnál az adatokból valami hasznosat levezetni? Nem tudnál mondani más adatokat, amelyek alkalmasak az ismeretlen meghatározására? Meg tudnád úgy változtatni az ismeretlent vagy az adatokat, vagy ha szükséges, mind a kettőt, hogy az új ismeretlen és az új adatok közelebb essenek egymáshoz?

Felhasználtál minden adatot? Számításba vitted az egész kikötést? Számba vitted a feladatban előforduló összes lényeges fogalmat?"

Hogy a hallgatók a kérdésekre - elsősorban az önmaguknak feltett kérdésekre - válaszolhassanak, ki kell fejleszteniük problémaérzékenységüket. Következetes tanári munkával rá kell vezetni a hallgatókat, hogy mindenekelelőtt elemezzék a feladatot! Olvassák ki az abból nyerhető információt és elemezzék azokat!

A logikai kapcsolatok, az ok-okozati összefüggések feltárása a feladatok elemzése nélkül nem valósítható meg.

Nézzük az alábbi feladatot!

F.7. $2^8 + 2^{11} + 2^n$ egy egész szám négyzete.

Mekkora az n lehetséges értékeinek összege?

Megoldás:

Tudjuk tehát, hogy $2^8 + 2^{11} + 2^n = z^2$, ahol z pozitív egész szám.

Hogyan haladjunk tovább?

Vizsgálva az egyenlet bal oldalát látni, hogy minden tag 2 hatványait tartalmazza, vagyis kiemeléssel szorzattá alakítható!

$$2^8 (1 + 2^3 + 2^{n-8}) = z^2$$

Milyen információt nyertünk? A z^2 egy olyan szorzatként állt elő, melynek egyik tényezője négyzetszám, következésképpen a másik tényezőnek is négyzetszámnak kell lennie, azaz

$$1 + 2^3 + 2^{n-8} = k^2 \quad (\text{ahol } k \text{ pozitív egész}).$$

Látjuk, az összevonás elvégezhető:

$$9 + 2^{n-8} = k^2, \text{ mivel a } 9 \text{ négyzetszám, s a } k^2 \text{ is az}$$

(emlékezve az $a^2 - b^2$ azonosságra), adódik

$$2^{n-8} = k^2 - 9.$$

Hogyan haladjunk tovább? Az egyenlet jobb oldala "mutatja az utat":

$$2^{n-8} = (k - 3)(k + 3)$$

Mit tudunk ebből leolvasni?

A bal oldal 2 hatványaiból áll, következésképpen a jobb oldalnak is annak kell lennie, de akkor mindkét tényező külön-külön 2 valamilyen hatványa kell legyen, azaz

$$k - 3 = 2^t$$

$$\text{ill. } k + 3 = 2^m, \text{ ahol } t \text{ és } m \text{ pozitív egész,}$$

és $t+m = n-8$, továbbá $m > t$.

Hogyan haladjunk tovább? Van két egyenletünk, emlékeztet az egyenlet-rendszer megoldására, vonjuk ki az alsóból a felsőt!

$$2^m - 2^t = 6.$$

Ez az egyenlőség milyen információval bír? A bal oldal ismét szorzattá alakítható, a jobb oldal pedig $2 \cdot 3$.

$$\text{Tehát } 2^t(2^{m-t} - 1) = 2 \cdot 3.$$

Mivel 2^t és $(2^{m-t} - 1)$ legnagyobb közös osztója 1, így az egyenlőség csak úgy állhat fenn, hogy $2^t = 2$, ill. $2^{m-t} - 1 = 3$, melyekből $t = 1$ és $m-t = 2$, azaz $m = 3$ adódik. Így az egyenlet lehetséges n értéke:

$$n - 8 = t + m, \text{ azaz } n = 12.$$

Fontosnak tartom megjegyezni, hogy a Pólya-féle lista kérdései nem csak matematikai feladatok megoldásánál használhatóak!

A képességek, a problémamegoldó gondolkodás képességének kifejlesztéséhez kitartó, következetes tanári és tanulói munkára van szükség. A tanár részéről ez tudatosan megtervezett kérdés-sorozat összeállítását jelenti. A kérdések feltevése után a feladat megoldási vázlatát közös munkával célszerű elkészíteni, amely alapján a hallgatók önálló munkával megoldják a feladatot.

A tanár kérdései azt célozzák, hogy a hallgatókat rávezzék arra, hogyan fogjanak hozzá valamely probléma megoldásához, milyen kérdéseket tegyenek fel önmaguknak, ha önállóan - minden segítség nélkül - kell dolgozniuk.

Nagyon lényeges, hogy a kérdések - az érthetőségen túl - általánosak legyenek, ne csak az adott feladat megoldásához adjanak támpontot, hanem igazítsanak útba más feladatok esetén is.

Meggyőződésem, hogy a leírtakon alapuló tudatos, célszerűen megtervezett tanári tevékenység, következetes tanári munka a matematika-oktatás általános céljának elérése irányába hat. Segíti a hallgató önálló tevékenységét a feladatok megoldása során, s ezen keresztül hat a problémamegoldó gondolkodás képességének kifejlesztésére, alapul szolgál a természettudományos gondolkodás fejlesztéséhez.

Felhasznált irodalom:

1. Pólya György: A problémamegoldás iskolája
2. A matematikatanítás módszertanának néhány kérdése