

zépiskolai csapatversenyen bemutatott előadásukban szereplő kép látható, amely a Balaton-felvidék és környezetének „zöldnövényzet borítottságát”, azaz a területre jellemző NDVI-értékek térképi megjelenítését ábrázolja. A képet a Leoworks program segítségével készítették a <https://ers.cr.usgs.gov> internetes forráson található, ingyenesen letölthető műholdfelvételek felhasználásával.

## Irodalom

1. J. W. Rouse, R. H. Haas, J. A. Schell: Monitoring vegetation systems in the Great Plains with ERTS. In: S. C. Fredeen, E. P. Mercanti, M. A. Becker (eds.): *Third Earth Resources Technology Satellite Symposium, December 10–14, 1973*. NASA STI Office, Goddard SFC and Washington D. C. (1974) 309–317.
2. K. Kovács, A. Cs. Dobos, R. Víg, J. Nagy: Relation analysis between biomass and yield in maize seed production. *Időjárás* 114/4 (2010) 263–273.

# JÁRMŰVEK MOZGÁSÁNAK FIZIKÁJA

## A kerekes járművek teljes mozgási energiájának törvénye

Varga János  
Székesfehérvár

Kinematikai példákban egy jármű mozgásának kapcsán általában a haladási sebességgel – amely alatt a test (jelen esetben a jármű) tömegközéppontjának sebességét értjük – foglalkozunk. Nem vizsgáljuk külön a jármű többi része – például kerekek, illetve annak különböző pontjai – mozgásának kinematikai jellemzőit: pályáját, sebességét stb. Pedig ennek vizsgálata során sok érdekes, olykor meglepő, esetenként pedig a hétköznapi szemléletünkkel teljesen ellentétes eredményre jutunk. Ezen cikk célja, hogy ráirányítsa a figyelmet e kevésbé ismert területre. Ezek némelyike annyira egyszerű, amolyan „övegesi”, hogy tanítása még a közép-szintű fizikaoktatásban is megfontolandó.

A szerző szakítani kíván a rossz gyakorlattal, hogy írásában csak a kész tényeket, eredményeket teszi közzé, és elhallgatja a hozzájuk vezető utat, azt az ötletet, ami a téma boncolgatásában elindította. Sajnos ez a gyakorlat a matematikai publikációkban még inkább megfigyelhető. Erre már *Abel* is felhívta a figyelmet, és emiatt sokszor neheztelt is *Gaussra*, akit „a hóban a nyomokat elseprő lomposfarkú rókához” hasonlított, mivel sohasem írta le, hogy miként jött rá valamire, pedig annak is van információtartalma, és esetleg mások segítségére lehet a kutatásban.

*Neumann Jánost* remek előadónak tartották, aki tisztán és világosan, ösztönzően és felemelően adott elő. Ez főleg annak volt köszönhető, hogy nem csupán a bizonyításokat mondta el, hanem a hozzá veze-



1. ábra. Járműkerék külső pontjának pályája.

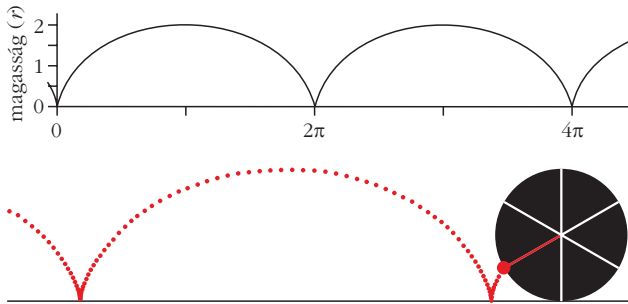
tő útról is beszámolt, a kitérőket is megemlítette. (Érdekes módon, írásaiban viszont hiányzott az oda vezető út ismertetése, amit előadásaiiban sosem hagyott el. Emiatt írásai előadásaihoz képest nehezebben követhetők, ráadásul a bennük rejlő gondolatok megértése összetettségük miatt magukban is szellemi erőfeszítést kívánnak.)

Egy teniszparti után, a felfrissítő fröccs közbeni beszélgetés során egy kamionsofőr-ismerősöm elmesélte egyik éjszakai vezetési élményét. Egy vele szemben haladó másik jármű kerekére rátapadt valami világító-fényvisszaverő gyurmaféle (1. ábra), aminek pályája nagyon érdekes görbe – elmondása szerint „fél hurka” formájú – volt. Matematikai tanulmányaimból én persze egyből tudtam, hogy ez valójában egy *csúcsos ciklois* (egy speciális *ruletta*<sup>1</sup>), ami egy kör egyenesen történő csúszásmentes legördítésekor keletkezik, azaz amit egy kerületi pont bejár.

<sup>1</sup>Ruletták azok a görbék, amelyeket úgy származtatnak, hogy egy álló görbén csúszás nélkül legördítenek egy másik görbét. A cikloisok olyan ruletták, amelyeknél a legördülő görbe kör. A cikloisokat először *Nicolaus Cusanus*, német püspök vizsgálta az 1400-as években. Pontos definíciójukat csak 100 évvel később tudta megadni *Marin Mersenne* francia szerzetes.



Varga János mérnök-tanár, rendszerszervező gépészmérnök, diplomáját a Miskolci Nehézipari Műszaki Egyetemen szerezte 1974-ben. Kitüntetéses gépész mérnök-tanári képesítését a Budapesti Műszaki Egyetem Gazdaság- és Társadalomtudományi karán szerezte 1996-ban, majd közép- és főiskolai tanárként dolgozott. Rendszeresen publikál, tart előadásokat tudománytörténetről, saját matematikai-fizikai eredményeiről itthon és külföldön, és gyakran szerepel ismeretterjesztő tudományos rádióműsorokban.



2. ábra. Fölül: egység sugarú kör generálta csúcsos ciklois [1], alatta az egyenletes sebességgel haladó járműkerék külső pontjáról készített „stroboszkopikus” rajz.

Ezt egy üres pohár asztalon való gurításával be is mutattam neki. Kamionsofőr-ismerősöm maga rájött, hogy e „fél hurka” formájú görbe (a továbbiakban használjuk tisztos matematikus nevét, a cikloist) hossza biztosan nagyobb, mint a járműkerék kerülete, amennyivel csúszásmentes gördülés esetén egy fordulat alatt a jármű előrehalad. Ekkor fogalmazódott meg bennem a következő:

### Háromkérdéses feladat

a. Ha egy jármű (autó, busz, kamion, bicikli stb.)  $v$  átlagsebességgel halad, akkor mennyi a járműkerék külső, az úttesttel csúszásmentesen érintkező pontjainak  $\langle v_{\text{külső}} \rangle$  átlagsebessége?

b. Egy  $v$  átlagsebességgel haladó járműnek (az előbbieket mellett gondoljunk a villamosra, vonatra is) van-e olyan pontja, amely esetenként a menetiránnyal ellentétes irányban, tehát visszafelé mozog, illetve milyen pillanatnyi sebességgel mozognak a járműkerék egyes pontjai?

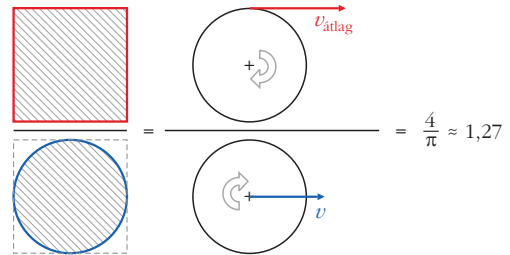
c. Mekkora egy kerekeken guruló jármű teljes mozgási energiája?

### Megoldás

a. A járműkerék tengelye a kör középpontja, úttesttel érintkező pontja a kör kerületi pontja. Csúszásmentes, azaz tiszta gördülést feltételezve a  $d$  átmérőjű kör középpontja egy fordulat alatt éppen egy kerületnyi, azaz  $\pi d$  távolságot tesz meg. A kör kerületi pontja cikloison mozog (2. ábra), és egy fordulat alatt egy cikloisív hosszával megegyező utat, azaz pontosan  $4d$  távolságot tesz meg [1]. Más megfogalmazásban: egy cikloisív olyan hosszú, mint a gördülő kör köré írható négyzet kerülete.<sup>2</sup>

A kör kerületi pontja és középpontja által ugyanannyi (egy körülfordulásnyi) idő alatt megtett utak hányadosa  $4/\pi \approx 1,27$ , ami egyben az átlagsebességek hányadosa, ezt a 3. ábrával szemléltethetjük.

<sup>2</sup>Erre állítólag Galilei tanítványa Vincenzo Viviani (1622–1703) jött rá. Más források szerint ezt Christopher Wren (1632–1723) angol építész vezette le. Érdekessége, hogy a cikloisív hossza a körrel ellentétben nem tartalmazza a  $\pi$ -t, tehát rektifikálható (kiegyenesíthető).



3. ábra. A négyzet és az oldalhosszával megegyező átmérőjű kör területének aránya megegyezik a gördülő kör kerületi és középpontja átlagsebességének arányával.

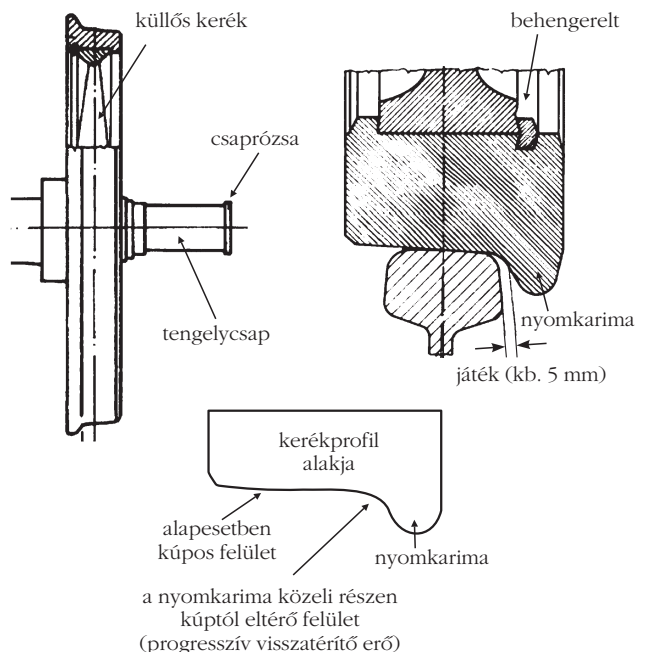
b. Szinte természetesnek vesszük, ha egy jármű valamilyen irányban halad, akkor annak minden alkatrésze, pontja szintén ugyanazon irányba mozog. De vajon ez mindig így van? Most ezt a kérdést vizsgáljuk meg részletesen.

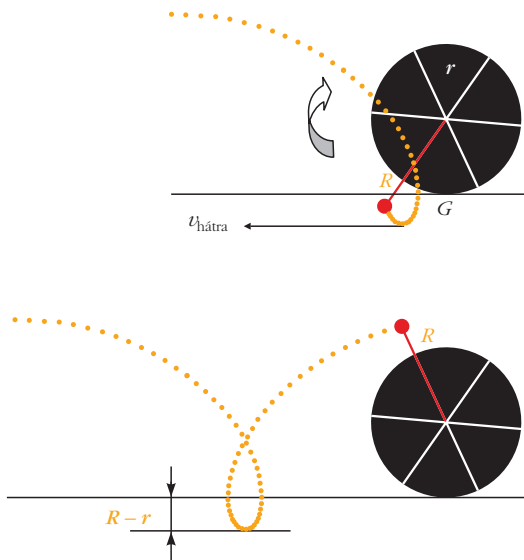
Egy vonatkerék alakját a 4. ábra mutatja [4]. A kisklás elleni biztonságot egy belső perem – szaknyelven nyomkarima (4. ábra) – szolgálja, amelynek külső pontjai a sínen guruló kerék  $r$  sugaránál (amely a ciklois szempontjából egyben a generáló kör sugara) nagyobb,  $R$  sugarú körön helyezkednek el, tehát forgáskör a sín kerékkel érintkező felületének síkja alá is kerülnek, így azok az 5. ábra szerinti burkolt ciklois mentén fognak mozogni.

Jelölje  $G$  a pillanatnyi gördülési középpontot, ahol a kerék az úttesthez ér. (Valóságban ez egy felület, hiszen a jármű súlya miatt a kerékgumi jobban, de még a vasúti kocsikereke is egy kicsit belapul.) Ezen ponthoz képest a keréktengely, a perem és sőt a kerék összes pontjának  $\omega$  szögsebessége megegyezik (hiszen merev testtel van dolgunk), ezért az alábbi egyenleteket írhatjuk:

$$v_{\text{tengely}} = r\omega, \quad (1)$$

4. ábra. Vonatkerék profilja, metszeti képe és futófelületének részei.





5. ábra. Gördülő keréken kívül eső pont pályája a *hurkolt ciklois*.

valamint

$$v_{\text{hátra}} = (R - r) \omega. \quad (2)$$

Az (1) egyenletről  $\omega$ -t kifejezve és a (2)-be helyettesítve megkapjuk a kerékperem legkülső pontjának sebességét, amely a legnagyobb hátrafelé mutató sebesség:

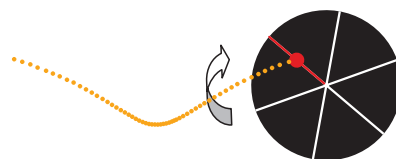
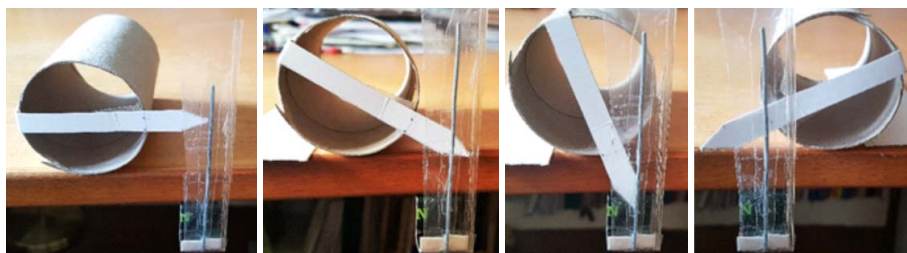
$$v_{\text{hátra, max}} = \frac{R - r}{r} v. \quad (3)$$

A teljesség kedvéért jegyezzük meg, hogy a járműkerék tengelye és gördülőköre közötti belső pontok a 6. ábra szerinti *nyújtott ciklois* mentén mozognak. Ezen pontok átlagsebességének számítása a nyújtott ciklois ívhosszának számítása miatt bonyolultabb.

A hurkolt ciklois érdekes tulajdonsága, hogy a gördülési felület alatt a hurok pontjainak (amelyekre igaz, hogy a tengelytől távolabb esnek, mint a gördülő kör  $r$  sugara) sebessége az  $r$  sugarú kör bármely belső pontjának mozgásával ellentétes irányú. Tehát a vonatkocsi kerekének azon pontjai, amelyek a gördülő kör és nyomkarika legkülső köre által alkotott körgyűrűben helyezkednek el, a sín felszíne alatti helyzetükben visszafelé mozognak. Normál körülmények között ezt nem, csak a mozgást lelassítva tudjuk megfigyelni. Viszont egyszerűen készíthetünk olyan – az arányokat a vizsgálat céljára megváltoztatott – modellt, amelyen a jelenséget jól szemléltethetjük, így a tanórán érdemes bemutatni.

A 7. ábrán látható modellben a kocsikerék egy toalett-papír kartonhengere, a nyomkarimát pedig a ráragasztott, hegyes végű papírcsík modellezi. Ezt egy asztal szélére (mint sínre) helyezve lassan guríthatjuk, és megfigyelhetjük a hegyes vég mozgását, ami az alsó hurokban jól láthatóan visszafelé mozog [5].

7. ábra. Vasúti kocsikerék nyomkarimamodelljének mozgása előre, majd hátra.



6. ábra. A kerék belső pontja *nyújtott ciklois* ír le.

c. Egy  $v$  sebességgel haladó,  $m_{\text{össz}}$  tömegű, kereken guruló jármű teljes  $E_k$  mozgási energiája nem egyezik meg a csupán translációs mozgást végző, azonos  $m_{\text{össz}}$  tömegű test

$$E_{\text{transz}} = \frac{1}{2} m_{\text{össz}} v^2$$

összefüggéssel számolt kinetikus energiájával, hanem annál nagyobb. Oka a kerekek *gördülése*. A homogén gördülő korongnak tekinthető kerék mozgási energiája két mozgás, a translációs és a szimmetriatengely körüli forgás energiájának összege.

Határozzuk meg a gördülő kerék forgási energiáját! Egy  $\Theta$  tehetetlenségi nyomatékú,  $\omega$  szögsebességgel rotáló test  $E_{\text{rot}}$  forgási energiája:

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \Theta \omega^2.$$

Az  $m_{\text{kerék}}$  tömegű,  $r$  sugarú,  $v$  sebességgel gördülő homogén korong tehetlenségi nyomatéka és szögsebessége:

$$\Theta = \frac{1}{2} m_{\text{kerék}} r^2 \quad \text{és} \quad \omega = \frac{v}{r},$$

így egy kerék forgási energiája

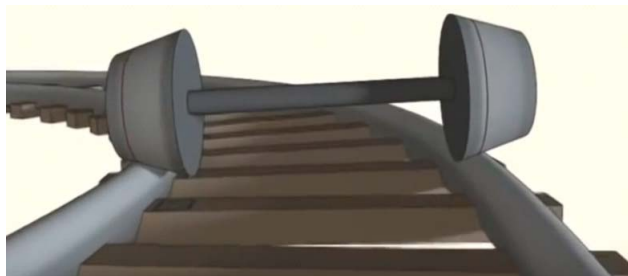
$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} m_{\text{kerék}} r^2 \left( \frac{v}{r} \right)^2 = \frac{1}{4} m_{\text{kerék}} v^2,$$

vagyis a kerék forgásából származó kinetikus energia éppen fele a translációs mozgásából származó energiának.

Így felírhatjuk az  $E_k$  teljes kinetikus energiát, amely a jármű translációs és  $n$  darab kerekének rotációs mozgásából adódik:

$$E_k = E_{\text{transz}} + n E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \left( m_{\text{össz}} + \frac{n}{2} m_{\text{kerék}} \right) v^2.$$

Így megkaptuk a cikk alcímeként felvetett probléma megoldását: egy kereken állandó sebességgel guruló jármű teljes mozgási energiája ugyanannyi, mint



8. ábra. Kanyarodó vonatkerékpár helyzete, a külső ívvel nagyobb, a belső ívvel kisebb átmérőn érintkezik a kúpos kerék.

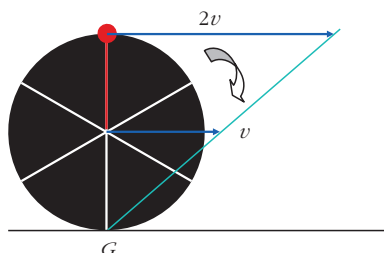
azon test mozgási energiája, amely ugyanakkora sebességgel csupán haladó mozgást végez (kerekei nem forognak), de tömege a guruló kerekek tömegének felével nagyobb a guruló jármű össztömegénél.

## Vonat kanyarodása

Kanyarodáskor az autók – kardántengelyük segítségével – a külső és belső kerekek által megteendő ívhosszkülönbséget kiegyenlítik, a külső kerék többet forog, mint a belső. A vonat és a villamos sínen gördülő kerekeit azonban az összekötő tengely fixen, elfordulásmentesen rögzíti egymáshoz. Emiatt kanyarodáskor – a kerék megcsúszását megelőzendő – a külső, tehát a hosszabb íven futó kerék átmérőjét növelni, a belsőjét pedig éppen ellenkezőleg csökkenteni kell. A megoldás, hogy az egy tengelyen lévő kerékpárok profilja kifelé szűkülő, kettős csónakakúp. Kanyarodáskor a centrifugális erő miatt a kocsiszekrény a kerekekkel együtt sugárirányban kifelé mozdul, a külső kerék nagyobb, a belső pedig kisebb átmérőjű körön érintkezik a sínnel (8. ábra), így igyekeznek kiegyenlíteni ki a pályáívek hosszának különbségét.

Néhány további intézkedés arra szolgál, hogy a vonat ne hagyja el a sínpárt. Kanyarban a külső kerék nyomkarima-érintkezéssel halad, amely a sínszál belső oldalával érintkezik, így akadályozza meg, hogy a kerék és vele együtt a szerelvény ne csússzon le a sínről. A kanyarodáskor ébredő centrifugális erő hatásának csökkentése végett az ívben fekvő vágányokat *tülemeléssel* építik, azaz a külső sínszál a tülemelés értékével magasabban fekszik, mint a belső. Ugyancsak fontos a sínszálak elhelyezése is, amelyek nem függőlegesen állnak, hanem befelé dőlnek pont akkora szögben, mint a kerekek kúpszöge, így biztosítva, hogy a sínekre merőleges erő hasson (9. ábra).

10. ábra. A legmagasabb kerékpont pillanatnyi sebessége.



9. ábra. A befelé döntött sínpárra ható erők iránya.

## Kerékpontok sebessége

Szerkesszük meg, illetve számítsuk ki a csúcsos cikloison mozgó pont, azaz a  $v$  sebességgel guruló kör kerületén, nevezetes helyzetekben elhelyezkedő pontok pillanatnyi sebességét.

### A legmagasabb kerékpont sebessége

Jelölje  $G$  a pillanatnyi gördülési középpontot, amely megegyezik a kerék úttesttel érintkező pontjával. A keréktengely és a legmagasabb pont szögsebessége megegyezik, ezért – a  $v = r\omega$  ismert összefüggés alapján – a legmagasabb pont sebessége  $2r\omega$ , azaz  $2v$  lesz (10. ábra). A kerék legmagasabb pontjának pillanatnyi sebessége a tengely haladási sebességének kétszerese. Természetesen ugyanerre az eredményre jutunk, ha a talajhoz képest egyenesen  $v$  sebességgel mozgó keréktengelyhez viszonyítjuk a felső pont sebességét, ami ugyanabba az irányba mutat, mint a keréktengelyé és értéke ugyancsak  $v$ . Így e pont talajhoz viszonyított sebessége a két sebesség összege, azaz  $2v$ .

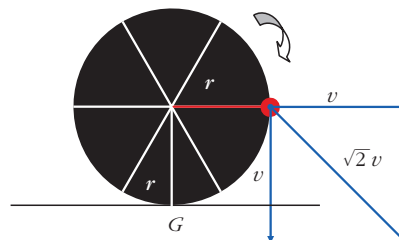
### Tengelymagasságú kerékpontok sebessége

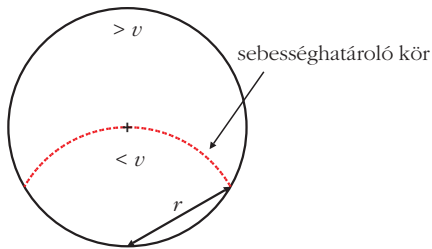
A tengelymagasságú kerékpont vízszintes irányú, translációs sebessége  $v$ , míg függőleges, rotációból eredő sebessége is  $v$ . E két vektor összege  $\sqrt{2}v$ , iránya pedig a vízszintessel  $45^\circ$ -ot zár be, a tengely mögötti pont fölfelé, az előtti lefelé mutat (11. ábra).

### A haladási sebességgel megegyező sebességű pontok

Eddig csak olyan pontokról volt szó, amelyek a kerék kerületén helyezkedtek el. A haladási sebesség nagyságával megegyező pontok nem csupán kerületi pon-

11. ábra. A kerék tengelymagasságú pontjának sebessége.

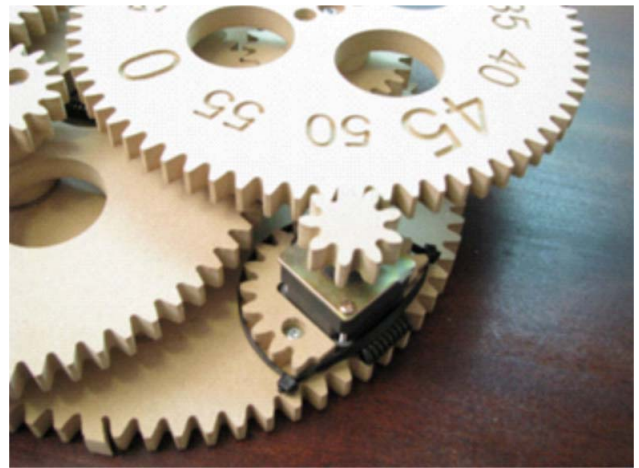
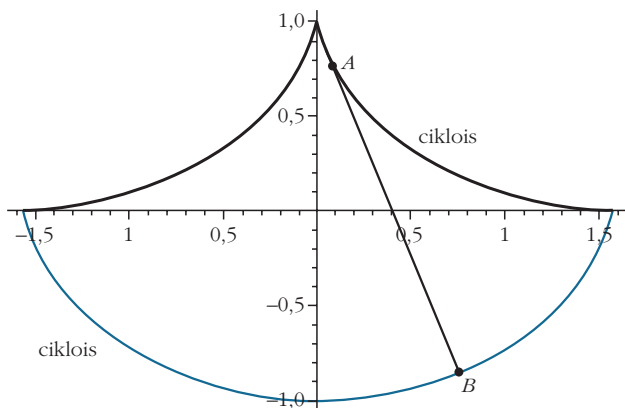
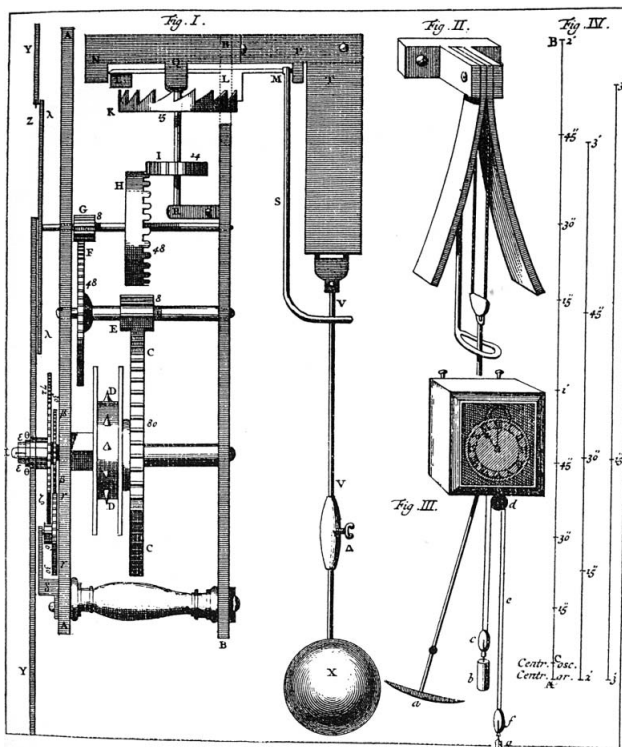




12. ábra. A haladási sebesség nagyságával megegyező sebességű kerékpontok.

tok lehetnek, hanem mindazok, amelyek a  $G$  ponttól való távolsága megegyezik a kerék  $r$  sugarával, ugyanis a kerék összes – belső és kerületi pontja –  $\omega$  szögsebességgel fordul el a  $G$  ponthoz képest és csak ezekre a pontokra teljesül a  $v = r\omega$  összefüggés. Ezt a helyzetet, azaz a  $G$  középpontú,  $r$  sugarú körívet mutatja a 12. ábra. Ezen körív alatti kerékpontok pillan

14. ábra. Huygens izochron ingaórája, alatta az izochron inga.



13. ábra. Ciklois fogprofilú fogaskerék-kapcsolat.

natnyi sebessége kisebb, a körív feletti kerékpontok sebessége pedig mindig nagyobb a jármű haladási sebességénél.

## A ciklois alkalmazása a gyakorlatban

### Fogaskerek fogazata

Bizonyos fogaskerek fogazata cikloisalakot követ. Ez azért előnyös, mert kisebb fogszámú kerek készíthetők cikloisfogazással, mint az általában elterjedt evolvens fogazással alámetszés nélkül. Így kisebb lesz a fogaskerék átmérője, emiatt kis helyen nagy áttétel valósítható meg. Kis méretük miatt főként mechanikus szerkezetű órákban használják őket. A 13. ábrán ilyen fogaskerék-kapcsolat látható, amelyben egy 9-es fogszámú kerék kapcsolódik egy 60-as fogszámú kerékkel. A cikloisfogazás további előnye, hogy a kapcsolódó kerek tengelytávolsága igen pontosan tervezhető, illetve gyártható, ellentétben az evolvens fogazásával.

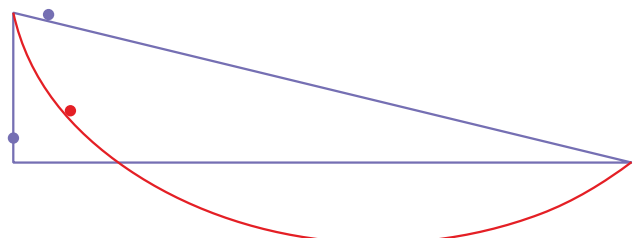
### Pontos ingaóra

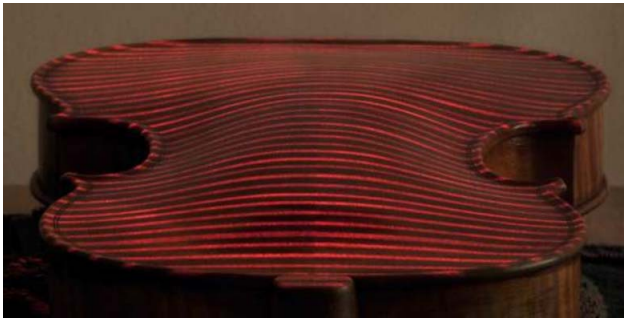
Az inga lengésideje csak kis kitérések esetén független közelítőleg a kitérés nagyságától. A valóságban a kitéréstől függ a lengéside. Huygens készített először kitérésfüggetlen lengésidejű (izochron) ingát (14. ábra).

### A leggyorsabb lejtő

Két tetszőleges, de nem egy magasságban lévő pont között a legrövidebb idejű utat a ciklois alakú (15.

15. ábra. Ciklois alakú lejtőn ér le a legrövidebb idő alatt az állandó külső erő által mozgatott test.





16. ábra. Hegedű háta lézerfényrel világítva, a görbület ciklois.

ábra) lejtő biztosítja. Ez az úgynevezett brachisztocron probléma, amit *Jacob Bernoulli* (1654–1705) oldott meg.

### Hegedűk formája

Az Amati, Guarneri és Stradivari hegedűk hátának külső görbülete a tökéletes hangzás elérésének érdekében nyújtott ciklois (16. ábra). Persze a hát nem állandó vastagságú, legvékonyabb és legvastagabb része között több milliméter eltérés is lehet.

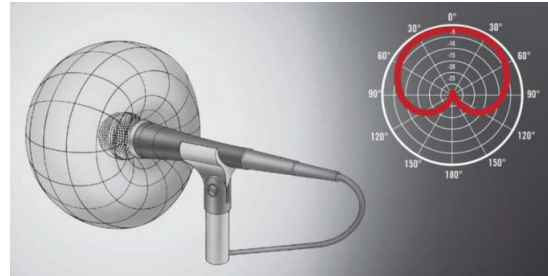
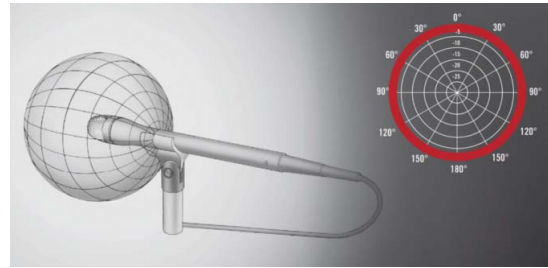
### Mikrofonok formája

A gömb karakterisztikájú mikrofon nyitott, membránja mindkét oldalára hat a hangnyomás, minden irányból érzékel. Az irányított (például kardioid) karakterisztika főirányba maximális érzékenységgű, egyéb irányokba fokozatosan gyengülő érzékenységgű (17. ábra) [2].

### Építészet

A texasi Fort Worth-ben található, híres ázsiai és európai művészeti gyűjteménynek és kiállításoknak otthont adó Kimbell Art Múzeum előkertjének tetőszerkezete ciklois formát követ (18. ábra).

18. ábra. Kimbell Art Múzeum (Fort Worth, Texas) előkertjének tetőszerkezete is ciklois.



17. ábra. Gömb, illetve kardioid formájú mikrofonok.

### A ciklois előfordulása a természetben

A sejtek osztódásának speciális tulajdonságai miatt a természetben számtalan helyen találkozhatunk cikloisokkal. A levelek formája, napraforgó magjainak elrendeződése, meggy vagy cseresznye alakja, a „pávaszem” néven ismert mintázat a pávakakas felső farkfedőtollán (19. ábra képei) mind-mind valamilyen ciklois.

### Irodalom

1. Vitkóczy Fanni: *Kalandozások a cikloisok világában – epi- és bipocikloisok*. Szakdolgozat, ELTE, 2003.
2. Gabika és a Slepp: *Görbe a kávéscsészében*. Miskolci Herman Ottó Gimnázium, 2016.
3. wikipedia.hu: *ciklois* címszó
4. Zobory István.: *Járműrendszerek, I. rész*. 2008, <http://www.sze.hu/~szenasy/VILLVONT/Jarmurendszerek-VJT.pdf>
5. Varga János: *Előre baladó jármű hátrafelé mozgó pontjai*. – videó, <http://fizikaiszemle.hu/extra/202105/varga.mp4>

19. ábra. Cikloisok a természetben.

