26. S. Britzen és tsai: A cosmic collider: Was the IceCube neutrino generated in a precessing jet-jet interaction in TXS 0506+056? *A&A 630* (2019) 103.
27. A. Loeb, E. Waxman: The cumulative background of high energy neutrinos from starburst galaxies. *JCAP 5* (2006) 3.
28. LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration: GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral. *Phys. Rev. Lett. 119* (2017) 161101.
29. T. Piran: The physics of gamma-ray bursts. *Rev. Mod. Phys. 76* (2005) 1143.
30. M. G. Aartsen és tsai (IceCube): Extending the Search for Muon Neutrinos Coincident with Gamma-Ray Bursts in IceCube Data. *ApJ 843* (2017) 112.
31. M. G. Aartsen és tsai (IceCube): First year performance of the IceCube neutrino telescope. *Astroparticle Phys. 26* (2006) 155.
32. M. G. Aartsen és tsai (IceCube): Evidence for High-Energy Extraterrestrial Neutrinos at the IceCube Detector. *Science 342* (2013) 1.
33. M. G. Aartsen és tsai (IceCube): Time-Integrated Neutrino Source Searches with 10 Years of IceCube Data. *Phys. Rev. Lett. 124* (2020) 051103.
34. M. G. Aartsen és tsai: Multimessenger observations of a flaring blazar coincident with high-energy neutrino IceCube-170922A. *Science 361* (2018) eaat1378.
35. M. G. Aartsen és tsai (IceCube): Neutrino emission from the direction of the blazar TXS 0506+056 prior to the IceCube-170922A alert. *Science 361* (2018) 147.

VERSENYFELADATOK AZ EÖTVÖS-INGA BŰVÖLETÉBEN – 1. rész

Radnai Gyula
ELTE, Anyagtudományi Tanszék
Cserti József
ELTE, Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

Az interneten olvasható legtömörebb megfogalmazás szerint az Eötvös-inga olyan érzékeny torziós inga, amely a nehézségi erő kis térbeli változásainak mérésére szolgál.

Jellegzetes alakja mára már szimbólummá vált. Megjelent az *Eötvös Loránd* emlékét őrző alkalmi bélyegeken, telefonkártyán, díjat megjelenítő érmén (*1. ábra*). Még szobor is készült róla, ez Budapesten látható, a nemrég még Eötvös Lorándról elnevezett Geofizikai Intézet előkertjében (*2. ábra*). Eötvös eredeti ingája, amellyel az 1900. évi Párizsi Világkiállításon aranyérmet nyert, és amelyet az ELTE Anyagfizikai Tanszéke őriz, jelenleg az ELTE Egyetemi Könyvtár *A pontosság bűvöletében* című kiállításán látható. Ez adta az ötletet a mi címválasztásunkhoz is.

1. ábra. Az Eötvös-inga szimbolikus megjelenítései.

Öt olyan feladatot választottunk ki, amelyek színvonalas fizikaversenyeken szerepeltek és amelyek mindegyike kapcsolódik az Eötvös-ingához, vagy valamelyik nevezetes Eötvös-kísérlethez. Meghagytuk a feladatok eredeti megfogalmazását és a megoldásokban alkalmazott jelöléseket azért is, hogy ha az itt némileg tömörített megoldást az olvasó részleteiben is követni szeretné a megadott elérhetőségeken, ne nehezítsük meg ezt az ottani jelölések megváltoztatásá-

Radnai Gyula ny. egyetemi docens, kandidátus, matematika-fizika tanári szakon végzett 1962-ben. Az ELTE Kísérleti Fizika tanszékén kapcsolódott be a tanárképzésbe. A hazai fizika kultúrtörténetének kutatója a ’70-es évektől, amelyet a *Physics in Budapest* című könyv, a *Fizikai Szemlében* és a *Természet Világában* megjelent számos publikációja fémjelez. 1973-tól volt az Eötvös-versenybizottság tagja, *Vermes Miklóst* követően, 1988-tól 2013-ig vezetője. 1989-től vezeti a *KöMaL* fizikai szerkesztőbizottságát.

Cserti József 1982-ben végezett az ELTE fizikus szakán, majd az ELTE korábbi Szilárdtestfizika Tanszékén kezdte oktatói munkáját. 2004-ben habilitált, 2010 óta az MTA doktora, 2013-tól az ELTE Komplex Rendszerek Fizikája tanszéken professzor. Kutatási területe a nanofizikai rendszerek, normál-szupravezető rendszerek, spintronika, grafén és a topologikus szigetelők. 2005 óta szervezi az ELTE-n az Atomoktól a csillagokig előadás-sorozatot középiskolásoknak.

val. Az Ortvay-verseny feladatainak megoldásakor pedig – amelyek még nem lettek publikálva, itt jelennek meg először – a középiskolainál magasabb matematikai eszközökkel éltünk, így jobban hasonlítanak azon gondolatmenetekre, amelyeket Eötvös Loránd alkalmazott eredeti publikációiban, elméleti fizikai megközelítéseiben.

De mielőtt ezeket a feladatokat bemutatnánk, érdemes lesz megemlékeznünk arról, hogyan is születhetett meg Eötvös Lorándban ezen inga ötlete.

Tények, képek, gondolatok az Eötvös-inga megszületéséről

Mikor és miért választotta Eötvös Loránd éppen a gravitációt kutatási témául? *Mikola Sándor* szerint „lehetséges, hogy az első impulzust a Természettudományi Társulat adta meg 1881-ben, amikor megbízta, hogy határozza meg a nehézségi gyorsulást Budapesten, a Kárpátokban és az Alföldön. Lehetséges, hogy e kérdést hosszú ideig forgatta elméjében és így jutott rá módszereire” [1].

Selényi Pál úgy gondolta, hogy a kísérletező tudósra jellemző folytonos próbálgatás, tapogatózás közben talált Eötvös a kutatásra érdemes témára [2].

Körmendi Alpár hívta fel a figyelmet, hogy az *Internationale Erdmessung* Bécsből és Potsdamból irányított programjaiba – a földi nehézségi erőtér görbületének meghatározása, a „függővonal-elhajlás” mérése – bizonyára bekapcsolódott a Magyar Tudományos Akadémia is, amelynek Eötvös 1889-től elnöke volt [3].

Az igazság sokoldalú, s a fenti magyarázatok az igazság más-más oldalára világítanak rá. Újabb oldalról közelítve a témához, lássuk, mit mondott 1889. január 16-án *Lengyel Béla,* a Királyi Magyar Természettudományi Társulat akkori titkára: „Örömmel tölt el, hogy fáradozásaiért Eötvös megkapta a jutalmat; olyan jutalmat, amilyennél szebbet és nagyobbat a búvárkodó tudós nem remélhet. Mert van-e annál szebb és nagyobb jutalma a tudósnak, mint mikor búvárlati az eddig nem ismert és tőle keresett igazság felismerésére vezetik? Ebben a jutalomban részesült báró Eötvös Loránd is, és társulatunk büszkeségét és örömét lelheti abban, hogy a tudóst népszerű előadások tartására buzdítva, impulzust adott a mélyebb tudományos búvárlatra és új igazságok felderítésére” [4].

Alig két hónappal azután mondta ezt Lengyel Béla, hogy Eötvös 1888. november 12-én beszámolt az Akadémián *Vizsgálatok a gravitatio jelenségének körében* [5] címmel. Ez az első dokumentálható, gravitációval foglalkozó előadása az Akadémián. Ő maga 1896-ban úgy emlékszik *Vizsgálatok a gravitatio és a mágnesség köréből* [6] című tanulmányában, hogy nyolc éve foglalkozik a gravitáció témájával, vagyis emlékezete szerint 1888-ban kezdte gravitációs kutatásait.

Az 1887/88-as tanévben két segítségre talált a kísérletek összeállításához. Egyikük Lengyel Béla volt, egykori heidelbergi diáktársa, aki akkor már *Than Károly* után a II. Kémiai Intézetet vezette. Az ő érdeme is, hogy Eötvös megtarthatta tíz előadásból álló sorozatát 1888 január–február–márciusában. Ennek keretében Eötvös leghatásosabb előadását a gravitációról tartotta!

2. ábra. Eötvös-ingát ábrázoló szobor a Magyar Földtani és Geofizikai Intézet kertjében.

Eötvös másik segítője egy akkor első éves egyetemi hallgató, *Tangl Károly* volt, aki így emlékezett 1929-ben: „Abban a szerencsés helyzetben voltam, hogy e mérésekben még hallgatókoromban részt vehettem, ennek immár 40 esztendeje.”

Lengyel Béla mellett tehát Tangl Károly a másik hiteles szemtanú, aki megerősítheti Eötvös Loránd saját visszaemlékezését a gravitációs vizsgálatok megkezdéséről. Tangl így emlékezik: „Már 1888-ban sikerült báró Eötvös Lorándnak a tömegvonzás jelenségét egy népszerű előadáson nagyobb számú hallgatóságnak bemutatni. Ez az eszköz azóta hazai középiskolák szertárában is otthonos lett. A fémszekrényben jól védett Coulomb-féle mérleg alatt kvadránsokra osztott hengeres vasedény volt elhelyezve, aminek szemben álló kvadráns párjait felváltva higannyal lehetett megtölteni. A higany vonzása eltérítette a mérleg rúdját, amit a mérlegre erősített tükörrel visszavert fénysugár tett láthatóvá.”

A következő mondatot Tangl minden bizonnyal Eötvös Lorándtól idézi: „Az eszköz már 3-4 percnyi lengésidővel is elegendő érzékenységet, s e mellett a kivilágított és fűtött tanteremben is kellő állandóságot tanúsított” [7].

Erről az előadásról, amely a Lengyel Béla által említett – pártolt és szervezett – tíz előadásból álló sorozat egyik első (ha nem a legelső) előadása lehetett, így emlékezik meg a korabeli *Vasárnapi Újság:* „…a lámpától csillogó, fűtött előadási teremben több mint 300 hallgató jelenlétében megmutatta azt, hogy hogyan vonz néhány kilogrammnyi higany egy nem egészen 100 grammnyi súlyú ólomdarabkát” [8].

Lengyel Bélától tudjuk, hogy Eötvös Loránd előadásán ott voltak a kultuszminisztérium neves képviselői is: *Berzeviczy Albert* államtitkár, *Markusovszky Lajos,* az orvos- és gyógyszerészképzésért és *Klamarik János,* a középiskolai oktatásért felelős osztálytanácsosok. Így történhetett, hogy Eötvös higanykvadráns eszköze később *otthonos lett a hazai középiskolák szertárában*.

3. ábra. Charles Augustin de Coulomb (1736–1806) és Henry Cavendish (1731–1810).

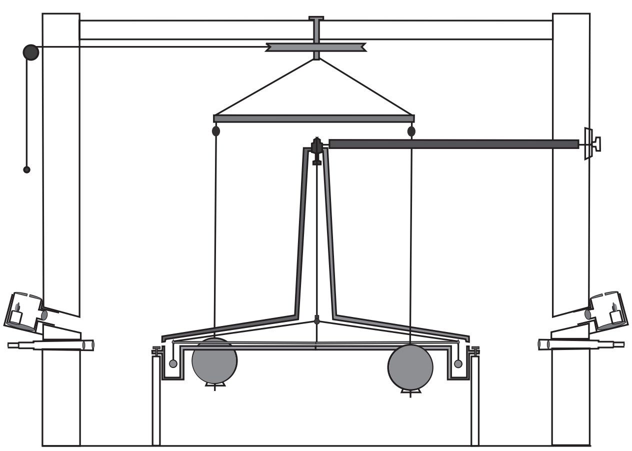
A siker szárnyakat ad. Eötvös az előadás-sorozat befejeztével nyilván hozzálátott a legsikeresebb, leghatásosabb kísérlet további finomításához. Ekkor és így kezdte el tehát Eötvös gravitációs kutatásait!

A szemtanú Tangl Károly – aki szerint „a gravitáció állandójának meghatározása képezte 1888 óta az egyetemi fizikai intézetben folyó vizsgálatoknak egyik célját” – ezt írja Eötvösről:

„…gravitációs kutatásaiban is mindenek előtt arra törekedett, hogy a mérési módszert tökéletesítse, a mérést pontosabbá és biztosabbá tegye, s a mérőeszköz érzékenységét növelje. A gravitációs erők mérésére elég érzékeny eszköz meg volt adva: a Coulomb-féle mérleg. A gravitációs állandó meghatározására eddig is többnyire ezt az eszközt használták, azonban nem volt elég állandó; a mérleg egyensúlyi helyzete egyelőre indokolatlan, kiszámíthatatlan ingadozásokat mutatott, minek folytán az egy- és ugyanazon eszközzel végzett egyes mérések közt jelentékeny eltérések mutatkoztak.

E zavarok eredetét báró Eötvös Loránd a mérleget magába záró szekrényben fellépő levegőáramokban kereste, melyeket apró hőmérséklet-különbségek hoznak létre. Hogy e zavaró hőmérséklet-különbségeket lehetőleg csökkentse, többféle próbálgatás után a Coulomb-féle mérleget kettős-, sőt hármasfalú fémszekrénybe zárta; hogy pedig a szekrényben foglalt levegő mennyiségét leszállítsa, a rudat körülvevő fémszekrénynek lapos hengeralakot, vagy amikor nagy lengésekre nem volt szükség, lapos parallelepiped vagy hengeres csőalakot adott. Ezzel az egyszerű fogással tényleg sikerült az eszközt annyira állandóvá tenni, hogy nem csak kedvező hőmérsékleti viszonyok között, jól védett laboratóriumi helyiségekben lehetett vele biztosan mérni, hanem künn a szabadban, egyszerű vászonsátorban is” [7].

4. ábra. John Michell torziós mérlegének rajza. Cavendish ezzel határozta meg a gravitációs állandót és következtette ki a Föld tömegét. A kísérletet azóta Cavendish-kísérletnek nevezik.



1888-ban persze még nem kellett a vászonsátor, Eötvös ekkor még nem vitte ki az eszközt a laboratóriumból. Azzal törődött, hogy a laboratóriumi mérés érzékenységét fokozza, ehhez szerkesztett újabb és újabb eszközöket, amelynek csodájára jártak fizikusok és nem fizikusok egyaránt. *Pekár Dezső* szerint „nagy találékonysággal megszerkesztett multiplikátorával és különösen gravitációs kompenzátorával, melynek érzékenységét a végtelenségig fokozhatta, hihetetlenül kis vonzó hatásokat mutatott ki, így néhány liter levegő vonzását” [9].

Coulomb volt az a fizikus (*3. ábrán* balra), akinek „mérlegét” Eötvös Loránd fel kívánta javítani, előadási kísérletéhez meggyőzőbbé tenni. Coulomb személyisége is szimpatikus lehetett számára, mivel hadmérnöki diplomával a zsebében, különböző mérnöki megbízások teljesítése közben is szenvedélyesen hódolt hobbijának: a fizikai jelenségek mögötti kvantitatív törvények keresésének. Az építmények szilárdságát, tartógerendák lehajlását vizsgálta, az oszlopok csavarodásának vizsgálata pedig logikusan vezette a hajszálvékony rugalmas huzalok csavarási törvényének megállapításához. Ez adta az ötletet a csavarási (torziós) mérleg megszerkesztéséhez, amellyel rendkívül kis erőket tudott mérni. Először csak a huzal rugalmassága érdekelte, később jött az ötlet, hogy ezt fel lehetne használni a nagyon kis erők mérésére. Fogalma sem volt arról, hogy Skóciában *John Michell* (1724–1793) e célra már kitalálta és meg is építette a torziós mérleget (*4. ábra*), Coulomb is kitalálta majdnem ugyanazt. Michell nem publikálta találmányát, nevét is csak onnan tudjuk, hogy eszközét *Cavendish* (*3. ábrán* jobbra) rendelkezésére bocsátotta, aki erről becsületesen beszámolt, amikor saját mérési eredményeit publikálta a *Philosophical Transactions* lapjain. Erre azonban már csak azután került sor, hogy Coulomb is publikálta és saját mérési eredményeivel támasztotta alá a pontszerű töltések között fellépő erők $1/r^2$-es törvényét.

A tömegvonzás Newton-törvényének torziós mérleggel történő laboratóriumi kísérleti igazolása tehát nem a francia Coulomb, hanem az angol Cavendish nevéhez fűződik, aki ezt 1798-ban végezte el John Michell torziós mérlegével. Ekkor Michell már nem élt.

Eötvös Loránd a Coulomb-mérleg feljavításával ugyanazokat a kísérleteket vitte véghez, amelyeket Cavendish elvégzett. Eötvös azonban egy fontos vonásban alapvetően eltért Coulomb és Cavendish eszközeitől. Az Eötvös-inga torziós szálán függő rúd két végéhez csatlakozó két azonos tömegű test közül csak az egyik van közvetlenül a rúdra erősítve, a másik viszont egy függőleges szálon függ, ennek közvetítésével kapcsolódik a rúd másik végéhez. Ez a lényeges különbség tette lehetővé, hogy Eötvös képes legyen a földi nehézségi erőtér kicsiny térbeli változásait meghatározni a műszer környezetében. Továbbá ez adja az Eötvös-inga azon jellegzetes alakját, amelyet a róla készült képzőművészeti alkotásokon láthatunk.

Hogyan születhetett meg ez a megoldás Eötvös fejében? A valószínű válasz megtalálásához érdemes visszanyúlnunk Eötvös első tudományos publikációjához e témában, a *Mathematikai és Természettudományi Értesítőben* 1896-ban megjelent 46 oldalas cikkhez, amelynek szándékosan visszafogott címe: *Vizsgálatok a gravitatio és mágnesség köréből (Előleges jelentés)* [6]. Az egyetlen fizikus, akire többször is hivatkozik a cikkben, *Jolly.*

Idézzük Eötvös bevezető szavait, hogyan határozza meg az általa vállalt feladatot: „Ismereteink a nehézség térbeli változásaira vonatkozólag, a felismerésükre szolgáló módszerek elégtelensége miatt, mindeddig nagyon hiányosak. Az inga e változások kicsinységéhez mérten ki nem elégítő érzékenységével csak nagy távolságokban teszi lehetővé azoknak felismerését, a mérleg pedig, úgy a mint azt Jolly használta, ugyan érzékenyebben, hanem csak egy kiváltságos irányban, t. i. lefelé tárja fel a változás nagyságát. Azok a módszerek és azok az eszközök, melyekről e jelentésemben fogok szólni, lehetővé teszik e változások lemérését kicsiny, néhány deciméternyi távolságokban és különböző irányokban. Sőt az e módszerek szerint tett mérések az ingával és Jolly-féle mérleggel tett megfigyeléseket úgy egészítik ki, hogy ezekkel együtt a nehézség nagyságát és irányát teljesen ismertté teszik, nemcsak egyes pontokban, hanem a térnek egy olyan nagy kiterjedésű részében, a melyben ez erőt egyenletesen változónak feltételezhetjük.” [6].

Mérési módszerének leírását pedig így fejezi be: „Megjegyzem még, hogy a függélyes síkban lengő inga mechanikáját abban a modorban tárgyalva, mint azt itt a Coulomb-féle ingára vonatkozólag röviden előadtam, az elmélet a *g* nehézségi gyorsulás függőleges változásának meghatározására a Jolly-féle eljárásnál előnyösebb módszerekkel kecsegtet, azoknak megvalósítása azonban a vízszintes forgási tengelyeket létesítő szerkezetek tökéletlensége miatt nekem mindeddig nem sikerült.” [6].

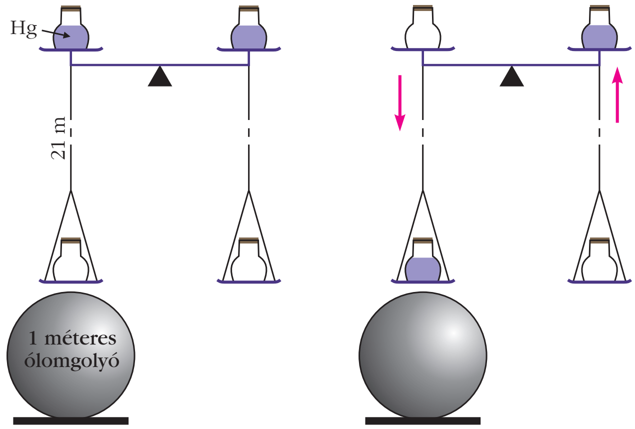
Ki volt hát Jolly, és mi volt az eljárása? A *História Tudósnaptárban* többek között ezt olvashatjuk róla:

„Jolly, Philipp Johann Gustav von,

Mannheim, Németország, 1809. szept. 26. – München, 1884. dec. 24.

Német fizikus, matematikus

Heidelbergben, Bécsben és Berlinben tanult, tanulmányait üvegfúvóknál és műszerkészítőknél végzett gyakorlattal egészítette ki. Tanulmányai befejezése után 1839-ben kinevezték Heildelbergbe a matematika rendkívüli tanárának, majd 1846-ban fizikaprofesszornak. 1854-ben Münchenben George Simeon Ohm utóda lett. Még ebben az évben nemesi címet kapott. Elsősorban kísérleti fizikus volt, számos precíziós műszert alkotott.



5. ábra. Jolly mérésének elve.

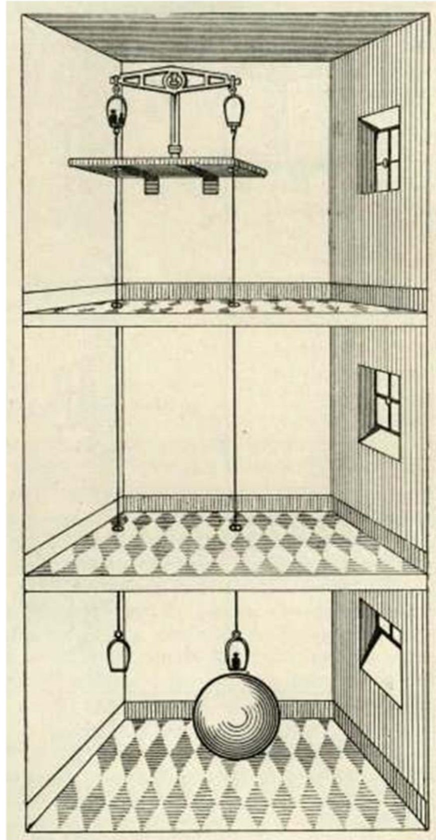
Nagy pontossággal megmérte a gravitációs gyorsulást. Később híressé vált diákja volt a müncheni egyetemen Max Planck, akit a legenda szerint 1878-ban megpróbált lebeszélni a fizikával kapcsolatos további tanulmányairól, mivel szerinte a fizika tudománya már majdnem elérte végleges stabil formáját, és már csak néhány apró részletprobléma vár megoldásra. Planck szerencsére nem hallgatott tanárának tanácsára.” [10].

Nos, talán ez az utolsó mondat felfedi, miért nem szokás ma emlegetni Philipp von Jollyt a fizikában. Eötvös Loránd számára azonban Jolly személye mintája lehetett a precíz kísérleti fizikusnak, aki hasonló célú kísérleteket végzett, mint amelyet ő is kitűzött maga elé: a földi gravitációs tér változásának vizsgálatát, kísérleti meghatározását – igaz, hogy csak egyetlen egy, még pedig függőleges irányban. És mi volt Jolly eljárása?

Jolly kettős mérleget készített a gravitációs állandó, illetve a Föld tömegének a meghatározására. A mérleg két karján két-két mérlegtányér függött, amelyekben azonos tömegű testeket, például higannyal töltött lombikokat helyezett el (*5. ábra*). Az elvégzett kísérletekben az alsó és felső mérlegtányérok között elő-

6. ábra. Jolly kísérletéről nem készült fénykép, viszont az 5775,2 kg tömegű ólomgolyó eredeti méretű modellje megtekinthető a müncheni Deutsches Múzeumban.

7. ábra. Jolly laboratóriumi kettős mérlege.



8. ábra. Ügyetlen, hamis magyarázó ábra Jolly kísérletére.

ször csak 5 méter, végül már 21 méter volt a szintkülönbség. Ha az egyik karon alul, a másikon felül helyezte el a higannyal töltött lombikot és az alul lévő lombik alá egy méteres ólomgolyót gördített (*6. ábra*), akkor a higany és az ólomgolyó vonzása megbontotta a mérleg egyensúlyát, s elég érzékeny mérlegen le is lehetett mérni, hogy mennyivel.

Jolly itt vehette észre, hogy a két különböző magasságban lévő test súlyának különbsége bizony akár egy nagyságrenddel is nagyobb lehet, mint a mérni kívánt vonzóerő, ezért később erre hegyezte ki a kísérletet, a nehézségi gyorsulás függőleges változásának minél pontosabb mérését tudta elvégezni minden ólomgolyó nélkül, csupán annak kihasználásával, hogy mérlegének egyik karján a tányért hosszú fonálon lelógatta (*7. ábra*). Jolly kísérletéről nem készült fénykép, 1878-as, valamint 1881-es publikációjához [11] se csatolt ábrát.

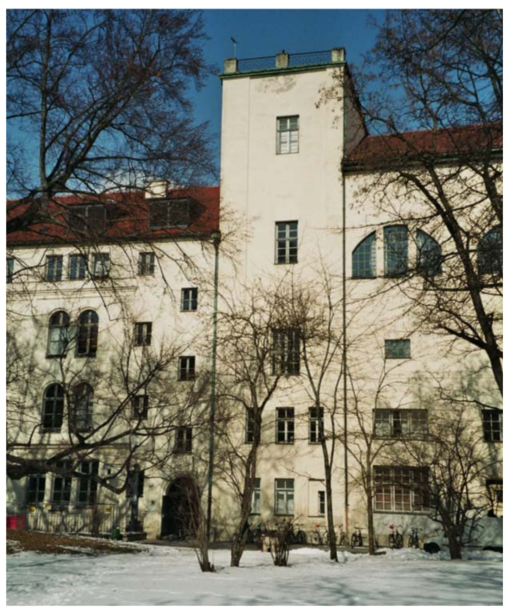
Azonban a Jolly-kísérletet magyarázó, népszerűsítő szerzők fantáziáját megragadta a tény, hogy ezt Jolly Münchenben, az akkoriban felépült Aulaturmban (aulatoronyban) végezte el, még egy magyarázó ábra is született (*8. ábra*) [12].

Az igazság az, hogy Jolly a kísérletet a lépcsőfordulóban tudta összeállítani, ahol a kísérlethez elegendő, mintegy 1,5 méter szélességű hely állt a rendelkezésére. (*Foucault* ingakísérletét ma is láthatjuk egyetemek, de akár a többemeletes középiskolák középen üres lépcsőházaiban is.)

Vajon nem innen vette Eötvös az egyik karról leeresztett tömegű inga ötletét? Jollynak komoly tekintélye lehetett Heidelbergben és később Münchenben is, az ő helyére került *Kirchhoff* Heidelbergbe és ő javasolta Kirchhoff tagságát később a Bajor Akadémiának. Kísérleteit Jolly 1878-ban publikálta először és 1881-ben másodszor az *Annalen der Physikben* [11].

9. ábra. Philipp von Jolly (1809–1884).

10. ábra. Az Aulaturm ma is kiemelkedik a szomszédos épületek közül Münchenben.



Eötvös Loránd, mivel maga is publikált e színvonalas folyóiratban, mindjárt megjelenéskor olvashatta ezeket. Ráadásul Jolly első cikke után véletlenül éppen *Fröhlich Izidor* írása következett.

Arról nincs információnk, hogy személyesen ismerhették volna egymást, azonban Eötvös Loránd Kirchhofftól Heidelbergben bizonyosan hallott, mégpedig jókat hallhatott Jollyról. A korkülönbség elég nagy volt közöttük: Jolly még Eötvös Loránd édesapjánál, *Eötvös Józsefnél* is négy évvel volt idősebb.

Amikor Eötvös Loránd elkezdte saját gravitációs kísérleteit, Philipp von Jolly (*9. ábra*) már nem élt – ahogyan John Michell sem, amikor Henry Cavendish elkezdte kísérleteit.

A nevezetes müncheni Aulaturm (*10. ábra*) ma is megvan, csak már beépült a Fizikai Intézetbe [13].

Az ünnepi Eötvös-verseny első feladata

(1998. október 16.)

Hazánk fizikus közössége 1998-ban ünnepelte Eötvös Loránd születésének 150. évfordulóját. Ebből az alkalomból az Eötvös-verseny akkori versenybizottsága olyan feladatot tűzött ki, amely Eötvös Loránd egyik nevezetes kísérletéhez, méréséhez kapcsolódott. A versenyen hagyományosan öt óra állt rendelkezésre a három feladat megoldására, egy-egy feladat szerzője pedig a versenybizottság egy-egy tagja volt. 1998-ban az első feladatot *Radnai Gyula,* a másodikat *Károlyházy Frigyes,* a harmadikat *Gnädig Péter* tűzte ki.

Az Eötvös-verseny már kezdettől fogva érvényes szabálya, hogy a versenyző diákok minden magukkal hozott, írt vagy nyomtatott segédeszközt, jegyzetet, könyvet felhasználhatnak a megoldáshoz. Ez alapvetően megkülönbözteti az általában szokásos tanulmányi versenyektől, amelyeken elsősorban a tanulók memóriája és csak másodsorban gondolkodási képessége van próbára téve.

Eötvös Loránd személye többszörösen kapcsolódik e versenyhez. 1894-ben, kultuszminiszterré történt kinevezése alkalmából és ennek tiszteletére határozta el az éppen általa létrehívott Mathematikai és Physikai Társulat vezetősége (*Schmidt Ágoston* és *Kőnig Gyula* alelnökök, valamint *Rados Gusztáv* és *Bartoniek Géza* titkárok), hogy minden év őszén, az abban az évben érettségizett diákok számára tanulóversenyt indítanak matematikából és fizikából. Ezt egyfajta tehetségfelmérő versenynek szánták, hogy az egyetemi tanárok lássák, kik is kerültek be az egyetemre. A versenybizottság ma is úgy állítja össze a feladatokat, hogy a tárgy művelésében való jártasságot, ne a tárgyi tudást mérjék. Kezdettől fogva ez a célkitűzés emelte ki a versenyt a többi tanulmányi verseny közül, ennek köszönheti máig meglévő jó hírét, pedig az évtizedek során sok mindenben megváltozott.

A megmérettetés nagyon hamar matematikai versennyé alakult át, ezért *Károly Ireneusz,* a Schmidt Ágostont követő társulati alelnök 1916-ban létrehozott egy alapítványt azért, hogy néhány nap eltéréssel két tanulóversenyt is lehessen rendezni, egyiket matematikából, a másikat fizikából. A fizikai versenybizottság elnöke ekkor Eötvös Loránd, további két tagja pedig Bartoniek Géza és Mikola Sándor lett. Eötvös maga is kitalált feladatokat a fizikai tanulóversenyre, amelyet első alkalommal *Jendrassik György* nyert meg, ekkor *Szilárd Leó* lett a második, a következő évben pedig *Sztrókay Pál* lett az első, és *Náray-Szabó István* a második helyezett. 1919-ben Eötvös Loránd meghalt, hamarosan a Társulat és a régebben indult matematikai tanulóverseny is felvette a nevét. A fizikait később az akkor már szintén elhunyt Károly Ireneuszról nevezték el.

A második világháború után a Társulat kettévált. 1949-től indult újra a fizikaverseny, most már – és azóta is – Eötvös Loránd Fizikaverseny elnevezéssel. Eötvös Loránd nevét vette fel a Társulat fizikai része is, a másik részt Bolyai János Matematikai Társulat néven ismerjük. Az a matematikai tanulóverseny pedig, amelyik addig Eötvös nevét viselte, *Kürschák József* nevét vette fel. Azóta is ősszel, két, egymást követő héten rendezik meg az Eötvös- és a Kürschák-versenyt.

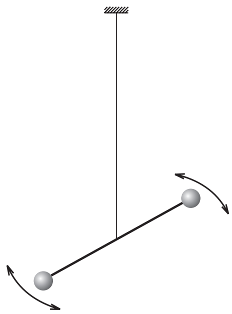
Csak az 1949-től 1998-ig eltelt fél évszázadot tekintve is számos elméleti fizikus sikeres karrierje kezdődött az Eötvös-versenyen való kiváló szerepléssel. Csupán néhányukat kiragadva a [14, 15] könyvekben olvasható részletes felsorolásból és máris elnézést kérve azoktól, akiket itt nem említünk: *Zimányi (Mráz) József* (1949, 1950), *Zawadowski Alfréd* (1953, 1954), *Geszti Tamás* (1956), *Mezei Ferenc* (1960), *Nagy Dénes Lajos* (1962), *Tichy Géza* és *Major János* (1963), Gnädig Péter (1965), *Meszéna Géza* és *Simányi Nándor* (1973), *Szép Jenő* (1974, 1975), *Vankó Péter* (1976, 1977), *Kaufmann Zoltán* (1978, 1979), *Krausz Ferenc* (1980), *Tóth Gábor* (1981, 1982), *Frei Zsolt* (1983), *Kaiser András* (1985, 1986), *Cynolter Gábor* (1986, 1987), *Fucskár Attila* (1987, 1988), *Katz Sándor* és *Veres Gábor* (1992, 1993), *Varga Dezső* (1993, 1994, 1995), *Tóth Gábor Zsolt* (1994, 1995, 1996).

1997-ben még csak az Eötvös-verseny 11–15. helyezettje volt *Sarlós Ferenc,* a bajai III. Béla gimnázium 12. évfolyamú tanulója, aki a következő évben, 1998-ban már mint szegedi fizikus egyetemi hallgató, meg is nyerte az Eötvös-versenyt, holtversenyben *Végh Dáviddal,* akkor már az ELTE fizikus hallgatójával, aki a budapesti Fazekas Gimnáziumban érettségizett. 2020-ban Sarlós Ferenc az MTA Szegedi Biológiai Központ Biofizikai Intézetének kutatója és a Szegedi Tudományegyetem Biotechnológiai Tanszékének oktatója. Végh Dávid elméleti fizikus külföldön él, megjárta már az MIT-t és a Harvardot is posztdoktorként, jelenleg a Queen Mary University of London kutató fizikusa.

Lássuk hát ezt az 1998-as Eötvös-verseny feladatát, amely Eötvös Loránd 1889-es nevezetes publikációjára épül, a Szt. Gellérthegy vonzó erejére vonatkozó vizsgálatairól [16].

A feladat

Eötvös Loránd görbületi variométerében egy vékony torziós szálra középen felfüggesztett könnyű rúd végein két test helyezkedik el azonos magasságban (*11. ábra*). Eötvös megmérte e görbületi variométer torziós lengésidejét (kis kitérések esetén) a Gellérthegy lábánál, egyszer úgy, hogy a vízszintes rúd egyensúlyi helyzetében a hegy közepe felé mutatott, másszor úgy, hogy erre merőleges egyensúlyi helyzet körül lengett a rúd. Az első esetben 564,6 secundumnak, a második esetben 572,2 secundumnak találta a lengésidőt.



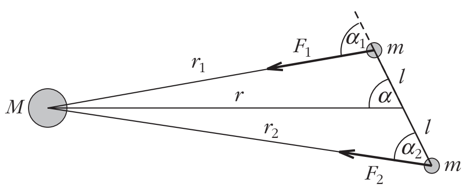
11. ábra. A feladathoz tartozó ábra: a görbületi variométer működésének elvi rajza.

Tegyük fel, hogy a Gellérthegy gravitációs hatása egy, a műszertől vízszintesen 300 méter távolságra levő, megfelelő tömegű, pontszerű test vonzásával egyenértékű. Ezek után Eötvös fenti mérési adatait felhasználva becsüljük meg, hogy a Gellérthegy mekkora szöggel módosítja a mérés helyén a függőón irányát! [17]

(Radnai Gyula)

Megoldás

A hivatalos megoldás a *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapokban* jelent meg [17]. Itt egy rövidített változatot közlünk. Tekintsük *12. ábrát!* A könnyű



12. ábra. Az ingára ható erők.

rúd hosszát $2l$-lel, a rúd végein lévő kis testek tömegét m-mel, a Gellért-hegyet „helyettesítő” pontszerű test tömegét pedig M-mel jelöltük. A rúd közepe M-től állandó r = 300 m távolságra van; az ábra egy olyan helyzetet mutat, amikor az ábra (vízszintes) síkjában lengő rúd egyik vége r_1, másik vége r_2 távolságra van M-től. Felrajzoltuk a kis testekre ható, M által kifejtett gravitációs vonzó erőket is (F_1, illetve F_2). Jellemezzük az inga helyzetét az r távolsággal és az ábrán látható α szöggel! A koszinusz-tétel kétszeri alkalmazásával az m tömegek távolsága az M tömegtől az alábbi alakban írható:

$$r_1 = \sqrt{r^2 + l^2 - 2\,l\,r\cos\alpha}$$

és

$$r_2 = \sqrt{r^2 + l^2 + 2\,l\,r\cos\alpha}\ .$$

Newton gravitációs törvénye szerint

$$F_1 = \gamma\frac{m\,M}{r_1^2},\quad \text{illetve}\quad F_2 = \gamma\frac{m\,M}{r_2^2}.$$

Írjuk fel az ezen erők által a rúdra kifejtett Γ gravitációs forgatónyomatékot!

$$\Gamma = F_1\,l\sin\alpha_1 - F_2\,l\sin\alpha_2.$$

Egy-egy szinusz-tétel felhasználásával ez így is írható:

$$\begin{aligned}\Gamma &= \left(\frac{F_1}{r_1} - \frac{F_2}{r_2}\right) l\,r\sin\alpha = \\ &= \gamma\,m\,M\,l\,r\sin\alpha\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right) = \\ &= \gamma\,m\,M\,l\,r\sin\alpha\left[\frac{1}{\left(r^2 + l^2 - 2\,l\,r\cos\alpha\right)^{3/2}} - \right. \\ &\qquad \left. - \frac{1}{\left(r^2 + l^2 + 2\,l\,r\cos\alpha\right)^{3/2}}\right].\end{aligned} \tag{1}$$

A Γ forgatónyomatékot sikerült csupán a változó α szög függvényében kifejezni.

Kihasználva, hogy

$$x = l\frac{\cos\alpha}{r} \ll 1,$$

az (1) egyenlet szögletes zárójelében lévő tényezőt a

$$(1 + x)^n \approx 1 + n\,x$$

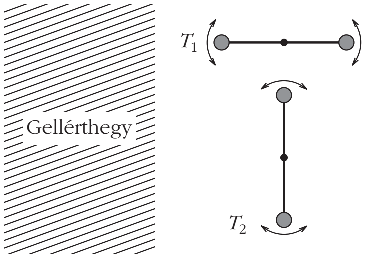
közelítő formula használatával átalakíthatjuk:

$$\begin{aligned}\Gamma &= \gamma\,m\,M\,l\,r\sin\alpha\frac{6\,l}{r^4}\cos\alpha = \\ &= \gamma\frac{m\,M}{r^2}\frac{l^2}{r}3\sin 2\alpha = 3\,F_0\frac{l^2}{r}\sin 2\alpha,\end{aligned} \tag{2}$$

ahol az utolsó egyenlőségnél bevezettük az

$$F_0 = \gamma\frac{m\,M}{r^2}$$

jelölést.



13. ábra. A kétféle lengésidő mérése.

Mikor lesz a Γ gravitációs forgatónyomaték zérus? Amikor $\sin 2\alpha = 0$, vagyis $\alpha = 0$ és $\alpha = \pi/2$ esetén. Egyik az a helyzet, amikor a rúd éppen M felé mutat, a másik helyzet erre merőleges. Ha csak a gravitációs erők hatnának, akkor $\alpha = 0$ a rúd stabil egyensúlyi helyzete lenne, míg $\alpha = \pi/2$ esetén a rúd labilis egyensúlyi helyzetben lenne.

Most azonban a rúdra nem csak a gravitációs forgatónyomaték hat, hanem az elfordulás közben megcsavarodó torziós szál által kifejtett „visszatérítő” forgatónyomaték is. Kis $\Delta\alpha$ szögkitérés esetén ez $\Delta\alpha$-val arányosnak tekinthető; az arányossági tényezőt D^*-gal szokás jelölni.

Ha nem lenne a gravitációs forgatónyomaték, akkor a torziós inga lengésidejét így lehetne kiszámítani:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{D^*}},$$

ahol Θ a rúd közepére vonatkozó tehetetlenségi nyomaték. Milyen taggal egészül ki D^*, ha gravitációs forgatónyomaték is fellép?

Határozzuk meg a kis $\Delta\alpha$-hoz tartozó $\Delta\Gamma$-t!

$$\Delta\Gamma \approx \frac{d\Gamma}{d\alpha}\Delta\alpha = 6 F_0 \frac{l^2}{r}\cos 2\alpha\, \Delta\alpha.$$

Ebből leolvasható, hogy $\alpha = 0$ esetén D^* korrekciója

$$6 F_0 \frac{l^2}{r},$$

míg $\alpha = \pi/2$ esetén

$$-6 F_0 \frac{l^2}{r}$$

lesz, így

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{D^* + 6 F_0 \frac{l^2}{r}}}$$

és

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{D^* - 6 F_0 \frac{l^2}{r}}}.$$

Ezeket a T_1 és T_2 lengésidőket mérte le Eötvös Loránd (*13. ábra*).

Hogyan lehet ebből kiszámítani a függőón „elhajlását”? Tegyük fel, hogy a függőónra – fonálon függő kis testre – a Föld mg nagyságú függőleges irányú, a Gellérthegy pedig $F_0 = mg^*$ nagyságú vízszintes irányú erőt fejt ki. Ekkor az a pici δ szög, amivel a függőón a függőlegestől eltér, így kapható meg:

$$\delta = \frac{g^*}{g},$$

vagyis a lengésidőképletekben F_0 rejti a szükséges információt. Felírhatjuk, hogy

$$\frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T_2^2} = \frac{12}{4\pi^2}\frac{F_0 l^2}{\Theta r} = \frac{3}{\pi^2}\frac{m g^* l^2}{2 m l^2 r} = \frac{3}{2\pi^2}\frac{g^*}{r}.$$

(Felhasználtuk, hogy $\Theta = 2ml^2$.) Így a keresett δ szög:

$$\delta = \frac{g^*}{g} = \frac{2}{3}\pi^2 \frac{r}{g}\left(\frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T_2^2}\right).$$

Behelyettesítve a $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$, $r = 300$ m, $T_1 = 564{,}6$ s, $T_2 = 572{,}2$ s értékeket, kapjuk:

$$\delta = 1{,}7 \cdot 10^{-5}\ \text{radián} = 3{,}4''.$$

Ezzel a feladatot megoldottuk, mégis érdemes a megoldáshoz egy kiegészítő megjegyzést fűzni. A kapott eredmény birtokában meghatározható a vonzócentrum tömege! Minthogy

$$F_0 = \gamma \frac{mM}{r^2} = m g^*,$$

ezért

$$M = g^* \frac{r^2}{\gamma} = 2{,}2 \cdot 10^{11}\ \text{kg}.$$

14. ábra. Gravitációs mérés a szabadban, a Ság-hegyen (1891). A vászonsátorban elhelyezett torziós inga állását távcső segítségével Eötvös Loránd észleli. Mögötte Tangl Károly egyetemi hallgató áll, a földön Kövesligethy Radó csillagász, a széken Bodola Lajos geodéta ül.

A Föld átlagos ϱ = 5515 kg/m^3 sűrűségét felhasználva becslést adhatunk a vonzócentrum térfogatára is: ez 48,5 millió köbméter lesz, ami egy 226 méter sugarú gömb vagy egy 365 méter élhosszúságú kocka térfogata. A Gellérthegy meglehetősen szabálytalan alakú, Eötvös később ezért keresett egy szabályosabb alakú hegyet az országban. A Szombathely közelében lévő Ság-hegy csonkakúp alakja nyerte meg tetszését, itt készült az a ma már híres fénykép, amelyen a mérést végző Eötvös látható munkatársaival, Tangl Károllyal, *Bodola Lajossal* és *Kövesligethy Radóval* (*14. ábra*).

Irodalom

1. Mikola S., *Természettudományi Közlöny 51* (1919) 210; letölthető: https://adtplus.arcanum.hu/en/view/TermtudKozl_1919_kommun/?pg=0&layout=s
2. Selényi P.: *Eötvös Loránd összegyűjtött munkái.* (1953); letölthető német nyelven: https://www.szaktars.hu/akademiai/view/eotvos-lorand-eotvos-lorand-osszegyujtott-munkai-1953/?pg=5&layout=s
3. Körmendi A.: Az Eötvös-inga és alkalmazásai. *Természet Világa (Természettudományi Közlöny) 129* (1998) 352; letölthető: https://adtplus.arcanum.hu/hu/view/TermtudKozl_1998/?pg=651&layout=s (fizikai oldalszám 652) vagy http://www.termeszetvilaga.hu/fizika_eve/tortenet/fiztort/eotvos/kormendi.html
4. Lengyel B., *Természettudományi Közlöny 21* (1889) 66; letölthető: https://adtplus.arcanum.hu/hu/view/TermtudKozl_1889/?query=SZ&pg=77&layout=s
5. Eötvös L.: Vizsgálatok a gravitatio jelenségének körében. *Természettudományi Közlöny 20* 477 (1888); letölthető: http://real.mtak.hu/103577/1/TermtudKozl_1888__pages489-489.pdf
6. B. Eötvös L.: Vizsgálatok a gravitatio és mágnesség köréből (Előleges jelentés.). *Mathematikai és Természettudományi Értesítő XIV* (1896) 221–266; letölthető: http://real-j.mtak.hu/4428/1/MatematikaiTermTudErtesito_14.pdf#221
7. Tangl K.: Vizsgálatok a gravitáczióról. *Mathematikai és Physikai Lapok 27* (1918) 130; letölthető: https://adtplus.arcanum.hu/hu/view/MTA_Konyvek_227795/?pg=114&layout=s&query=gravitációról (fizikai oldalszám 115)
8. *Vasárnapi Újság* 1889/19; letölthető: https://epa.oszk.hu/00000/00030/01836/pdf/01836.pdf
9. Pekár D.: Az ötvenéves Eötvös-inga. *Természettudományi Közlöny 73* (1941) 224–230; letölthető: https://adtplus.arcanum.hu/hu/view/TermtudKozl_1941/?pg=184&layout=s&query=Pekár (fizikai oldalszám 248–254)
10. *Tudósnaptár* itt: https://tudosnaptar.kfki.hu/historia/egyen.php?namenev=jolly
11. Ph. v. Jolly: Die Anwendung der Waage auf Probleme der Gravitation (Mérleg alkalmazása gravitációs problémára). *Annalen der Physik 241* (1878) 112–134; letölthető: http://archiv.ub.uni-heidelberg.de/volltextserver/12716/ és
Ph. v.Jolly: Die Anwendung der Waage auf Probleme der Gravitation: zweite Abhandlung (Mérleg alkalmazása gravitációs problémára: második értekezés). *Annalen der Physik, 250* (1881) 331–355; letölthető: https://archiv.ub.uni-heidelberg.de/volltextserver/12717/
12. L. Graetz: *Die Physik.* Max Planck Institute for the History of Science, Leipzig (1917) 66; a kép letölthető: http://einstein-virtuell.mpiwg-berlin.mpg.de/VEA/SC-1816523987_MOD355385129_SEQ-114471879_SL154826715_en.html
13. G. Oittner-Torkar: Philipp von Jolly und das Geheimnis der Bleikugel (Philipp von Jolly és az ólomgolyó titka). In: *Deutsches Museum München, Tudományos Évkönyv* (1990) 72–81; letölthető:https://www.physik.uni-muenchen.de/lehre/vorlesungen/wise_12_13/E1/zusatzmaterialien/jolly.pdf
14. Vermes M.: *Az Eötvös-versenyek feladatai I. 1959–1988.* Typotex Kft., Budapest (1997) 163 old.; részletek: https://www.typotex.hu/book/79/vermes_gyula_az_eotvos_versenyek_feladatai_1
15. Radnai Gy.: *Az Eötvös-versenyek feladatai II. 1989–1997.* Typotex Kft, Budapest (1998), digitális tankönyvtár: https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tkt/eotvos-versenyek/ar08.html
16. Eötvös L.: Jelentés a Szent-Gellérthegy vonzó erejéről. *Természettudományi Közlöny* (1889) 398., Akadémiai előadás ismertetője; letölthető: http://real-j.mtak.hu/6584/1/TermtudKozl_1889.pdf#page=414 (fizikai oldalszám: 414)
17. Radnai Gy.: Beszámoló az 1998. évi Eötvös-versenyről. *KöMaL* 1999. március, 172–181. (1. feladat); letölthető: http://elft.hu/wp-content/uploads/2016/11/Eotvos-verseny_1998.pdf és http://db.komal.hu/KomalHU/cikk.phtml?id=199818

BONIS BONA KITÜNTETÉST KAPOTT RADNAI GYULA

Radnai Gyula 1962-ben végzett az ELTE matematika–fizika szakán, azóta egyetlen munkahelye az Eötvös Loránd Tudományegyetem, ahol évtizedekig foglalkozott a fizikaszakos egyetemi hallgatók tanításával. Tanítványaiból lettek azok a fizikát, matematikát tanító középiskolai tanárok, akik az elmúlt fél évszázadban – a tanár úr lelkesítő példáját követve – az ország legjobb tanárai, mérnökei, kutatói, a fizikanépszerűsítés, a tehetséggondozás elkötelezettjei lettek.

1990-ben nyerte el az ELTE doktora és az MTA fizikai tudomány kandidátusa címet. Hosszú ideig dolgozott az országos fizika felvételi bizottságban, amelynek közel tíz évig elnöke volt. 1988-ban *Vermes Miklóstól* vette át, majd 25 évig ellátta az Eötvös-verseny feladatkitűző bizottsága elnöki feladatát. 30 éve meghatározó alakja, fizika szerkesztőbizottsági elnöke a *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapoknak.*

Emblematikus alakja a magyar fizikatanításnak. Bár tanárként nem dolgozott a közoktatásban, munkássága révén mégis oktatott, több középiskolai példatárával segítette fizikából a tehetséggondozást és a felkészülést a továbbtanulásra. Nemzedékek nőttek fel a híres Dér–Radnai–Soós-példatáron. Rendszeresen meghívták előadónak a vidéki és fővárosi középiskolák fizika témájú rendezvényeire. Lehetővé tette és szívügyének tekintette, hogy a fizikából legtehetségesebb magyar diákok összemérhessék tudásukat az Eötvös-versenyen. Több ezerre tehető azon középiskolás diákok száma, akik a *KöMaL* és Radnai tanár úr miatt szerették meg igazán a fizikát. Több országos fizikaverseny zsűrielnöke, mint a nagykanizsai Zemplén Győző, a székesfehérvári Lánczos Kornél és a szolnoki Tarján Imre fizikaversenyek. Az 1990-es, 2000-es években az Eötvös Loránd Fizikai Társulat főtitkár-, illetve elnökhelyettese is volt.

Több mint 100 publikációja jelent meg a *Természet Világa,* az *Élet és Tudomány,* a *KöMaL,* a *Fizikai Szemle* és egyéb szaklapok hasábjain, túlnyomó részük a magyar fizika történetével és tudósaival ismerteti meg olvasóit. Ismeretterjesztő cikkei mindig gondos kutatómunkát követően, precíz tényanyaggal és élvezetes stílusban készülnek. A fizika tehetséggondozás iránti elkötelezettségét mutatja az is, hogy az egész országban és a határon túl is rengeteg meghívást kap középiskolásoknak vagy tanároknak szóló előadások tartására.

Radnai Gyulának szívből gratulálunk a kitüntetéshez.

A 2020. augusztus 24-i díjátadón elhangzott laudáció alapján.