XXII. ORSZÁGOS SZILÁRD LEÓ FIZIKAVERSENY – 2. rész

Sükösd Csaba
BME Nukleáris Technika Tanszék

A 22. Országos Szilárd Leó Fizikaverseny döntője 2019. április 17–19. között volt Pakson. A verseny történetében először a döntő helyi szervezését két paksi intézmény közösen vállalta: a Paksi Vak Bottyán Gimnázium, valamint az Energetikai Szakgimnázium és Kollégium (ESZI). Ennek oka az volt, hogy a Verseny eddigi fő szervezője – *Csajági Sándor* tanár úr, az Energetikai Szakgimnázium és Kollégium korábbi igazgatóhelyettese – új, nagy kihívást jelentő feladatot kapott: ő lett a Paksi Vak Bottyán Gimnázium igazgatója. A döntő jó megszervezéséhez szükség volt (és van) Csajági tanár úr több mint két évtizedes szervezési tapasztalataira éppúgy, mint az ESZI infrastruktúrájára. Az új felállás bár adott néhány új egyeztetési és munkamegosztási feladatot, ám az első ilyen összetételben szervezett döntő végülis sikeres volt.

További gondot jelentett, hogy 2019-ben az országos versenyek, olimpiai felkészítők – amelyekkel való ütközések elkerülésére figyelni szoktunk a verseny időpontjának a meghatározásakor – valamennyi áprilisi hétvégét lefoglalták a naptárban, a húsvét kivételével. A két iskolával való egyeztetés eredményeképpen választottuk ki végül a húsvét előtti hét közepét (április 17–19., szerdától péntekig). Ekkor ugyan már nem volt tanítás az iskolákban, ám többek számára ez az időpont éppen egy lehetséges többnapos hosszabb vakációt szakított meg.

Mindezek ellenére sikerült a verseny döntőjét a szokásos színvonalon megrendezni. Talán egyedül az eredményhirdetésen lehetett érezni az időpont problematikus voltát: a meghívott VIP vendégek közül senki sem tudta elfogadni invitálásunkat.

Az új felállásban a tanulók helyszíni regisztrációja és a verseny megnyitója, az elméleti feladatok megírása, a kísérő tanárok számára tartott előadások, valamint a zsűri ülései a Vak Bottyán Gimnáziumban voltak, a verseny kísérleti fordulójának és a számítógépes szimulációknak pedig az ESZI biztosított helyet. Az ESZI-ben étkeztek, illetve kollégiumában volt a versenyzők és kísérőtanáraik szállása is. A feladatok megoldásának ismertetését, valamint a verseny ünnepélyes eredményhirdetését – a Vak Bottyán Gimnázium kérésére – a paksi Csengey Dénes Kulturális Központ színháztermében tartottuk.

A kísérő tanárok és a paksi tanárkollégák részére *Horváth Dezső* (Wigner FK) *Kozmológia: a Világ keletkezése – Teremtés és Ősrobbanás* címen, valamint *Pokol Gergő* (BME) professzorok *A fúziós energiatermelés barátai és ellenségei: gyors részecskék és plazmahullámok* címmel tartottak lebilincselő előadásokat.

E havi részben a döntő elméleti feladatait, míg az októberi számban a kísérleti fordulót, valamint a számítógépes szimulációs feladatot ismertetjük.

Az első hét elméleti feladat mindkét korcsoportnak közös, a maradék három-három feladat azonban különböző volt.

Sükösd Csaba (1947) a BME címzetes egyetemi tanára, az ELFT elnökségi tagja. Kísérleti magfizikus, aki kísérleti munkáját nagyrészt külföldi kutatóintézetekben végezte. Kutatási területe a magreakciók, óriásrezonanciák és némely asztrofizikailag releváns magreakció vizsgálata radioaktív ionnyalábokkal. Marx György tanítványaként részt vett a 70-es évek MTA oktatási kísérletében. Azóta is szoros kapcsolata van a fizikatanárok közösségével, több tanár- és oktatással kapcsolatos program vezetője.

1. feladat

kitűzte: *Radnóti Katalin*

A nyomottvizes atomerőművek aktív zónájában az urán-dioxid üzemanyagot tartalmazó cirkóniumcsövekbe (üzemanyagpálca) körülbelül $4 \cdot 10^5$ Pa (4 bar) nyomású héliumot töltenek. A reaktor üzemeltetése során a csövek mellett áramló víz körülbelül $1{,}2 \cdot 10^7$ Pa (~120 bar) nyomású.

a) Vajon miért héliumot alkalmaznak?

b) Miért nem nagyobb nyomásra töltik fel az üzemanyagpálcákat?

Megoldás

a) A hélium nemesgáz, ezért kémiailag inaktív. Reaktorfizikai szempontból is inaktív, mivel a mag héjszerkezete zárt, így nem fog be neutront, nem befolyásolja a láncreakciót. A hélium a gázok között jó hővezetőnek is számít, miután a gázrészecskék (atomok) tömege kicsi, ezért azonos hőmérsékleten gyorsabban mozognak, mint például a N_2, a CO_2, az Ar, a Ne stb. gázok részecskéi, ugyanis gázok esetében a hővezetés egyre jobb a részecskék átlagos sebességének növekedtével.

b) A pálcákat azért nem töltik nagyobb nyomású héliummal, mert az üzem során keletkező hasadási termékek között gázok is vannak (például kripton, xenon), amelyek az üzemanyagpálcában maradnak, és nyomásuk hozzáadódik a héliuméhoz. Ha a pálcát rögtön a teljes nyomásra töltenék, akkor a kampány végére az akár ki is durranhatna.

Az orvosi diagnosztikában a $^{99m}_{43}$Tc izotópot radioaktív nyomjelzőként használják.

a) Mely elem negatív béta-bomlását követően keletkezik ez az izotóp?

b) Milyen sugárzást bocsát ki a $^{99m}_{43}$Tc izotóp? Milyen elem keletkezik?

c) A sugárzó anyag hány százaléka marad még a páciens testében 24 óra múlva?

d) Mennyi lesz 24 óra elteltével egy technéciumizotóp bejuttatásával vizsgált 70 kg-os páciens aktivitása, ha testébe 4,63 ng (nanogramm) izotópot juttatnak be intravénásan?

Adatok: a $^{99m}_{43}$Tc felezési ideje 6 óra, biológiai felezési ideje (amely idő alatt a bevitt radioaktív anyag mennyisége az anyagcsere-folyamatok miatt felére csökken) 1 nap.

Megoldás

a) A negatív béta-bomlásból következik, hogy a technéciumot az eggyel kisebb rendszámú elemből, a molibdénből nyerik:

$$^{99}_{42}\mathrm{Mo} \xrightarrow{\beta^-} {}^{99m}_{43}\mathrm{Tc} + e^- + \tilde{\nu}.$$

b) A gerjesztett állapotban keletkezett $^{99m}_{43}$Tc gamma-sugárzó (hosszú felezési idejű, izomer állapot), ezért bomlása után alapállapotú $^{99}_{43}$Tc keletkezik.

c) A biológiai kiürülésre hasonló exponenciális törvény érvényes, mint a fizikai bomlásra. A két csökkenési mód egymástól független, ezért a maradék aktivitás t idő elteltével:

$$A(t) = A(0) \cdot 2^{-\frac{t}{T_1}} \cdot 2^{-\frac{t}{T_2}} = A(0) \cdot 2^{-t\left(\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}\right)}.$$

Mivel a kérdés $t = 1$ napra szól, ezért praktikus a felezési időket is „nap” egységben megadni. Ezzel

$$t = 1 \text{ nap és } \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1/4} = 5\ \frac{1}{\text{nap}}.$$

Tehát egy nap alatt a sugárzás az eredeti $2^{-5} = 1/32 =$ 3,125%-ára csökken.

d) A vizsgált személybe 4,63 ng $= 4{,}63 \cdot 10^{-9}$ g izotópot juttatnak be, ez összesen

$$N = \frac{m}{M} N_A = 2{,}82 \cdot 10^{13} \text{ darab atom.}$$

A kezdeti aktivitás:

$$A(0) = N \frac{\ln 2}{T_1} = 9{,}04 \cdot 10^8 \text{ Bq} \approx 900 \text{ MBq.}$$

Itt T_1 a fizikai bomlás felezési ideje (6 óra), továbbá másodpercben kell behelyettesíteni, hogy az aktivitást Bq-ben kapjuk. Az 1 nap utáni aktivitás a c) pont alapján pedig 904/32 ~ 28,25 MBq.

Megjegyzés: az eredmény független a vizsgált személy testtömegétől.

Vegyünk három különböző részecskét
elektron ($m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg),
töltött $\pi^\pm$ mezon ($m_\pi \approx 273 \cdot m_e$) és
proton ($m_p \approx 1836 \cdot m_e$).

Első lépésben gyorsítsuk fel őket oly módon, hogy mozgási energiájuk a nyugalmi energia kétszerese legyen. Ez az 1. gyorsító fokozat.

a) Milyen gyorsító feszültséget kell alkalmazzunk, ha azt szeretnénk, hogy egy 2. lépcsőben történő további gyorsítás hatására a részecskék *teljes* energiája megduplázódjon?

b) Mekkora lesz a részecskék sebessége fénysebességegységekben ($\beta \equiv v/c$) az 1. és a 2. fázis után?

Megoldás

Jelölje E_0 a részecskék nyugalmi energiáját. A feladat szerint az első gyorsító fokozat után a részecskék mozgási energiája ennek kétszerese, azaz a teljes energiája: $3E_0$. A második fokozat után a teljes energia duplázódik, tehát a teljes energia $6E_0$ lesz, amiből a mozgási energia $5E_0$. Ennek eléréshez a második fokozatban $5E_0 - 2E_0 = 3E_0$ energiát kell adni a részecskéknek.

A részecskék tömegét praktikusabb eV egységekben kifejezni. Az elektron esetén ez 511 keV/c^2, azaz E_0(e) = 0,511 MeV. Tudjuk, hogy az elektronnak (és a többi részecskének is) egységnyi elektromos töltése van, ezért következik, hogy a 2. gyorsító feszültség: $3 \cdot 0{,}511$ MV = 1,533 MV. Mivel a tömegek az elektrontömeg arányában vannak megadva, ezért ez eV egységekben is igaz lesz. Így a három részecskére írhatjuk:

	tömeg (m_e)	E_0 (MeV)	2. feszültség (MV)
elektron	1	0,511	1,533
$\pi^\pm$ mezon	273	139,503	418,509
proton	1836	938,196	2814,688

b) A részecskék teljes energiájának és nyugalmi energiájának aránya:

$$\frac{E}{E_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \text{ahonnan} \quad \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2}.$$

Mivel a feladat szerint a teljes és a nyugalmi energia aránya mindhárom részecskére azonos, ezért a β értékek is azonosak lesznek. Tehát az első gyorsítás után:

$$\beta_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} \approx 0{,}943,$$

a második gyorsítás után pedig

$$\beta_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{6}\right)^2} \approx 0{,}986.$$

Megjegyzés: az egyszerűség kedvéért a feladat szövegében a pion- és a protontömegek egész értékre kerekítve szerepelnek.

4. feladat

kitűzte: *Halász Máté*

A $^{7}_{4}$Be-atommagok protonfeleslegüktől gyenge kölcsönhatással (a béta-bomlások valamelyikével) elvileg két módon szabadulhatnak meg.

a) Melyik ez a két lehetséges mód? Vizsgáljuk meg a megadott adatok alapján, hogy közülük energetikailag melyik valósulhat meg?

b) A lehetséges bomlás felezési ideje a Földön 53,6 nap, a Nap belsejében viszont átlagosan 83,2 nap. Mi lehet az eltérés magyarázata?

Adatok: $M(^{7}_{4}\mathrm{Be})$ = 7,016929 u, $M(^{7}_{3}\mathrm{Li})$ = 7,016003 u (*atom*tömeg, 1 u = 931,494 MeV/c^2), $m_e c^2$ = 0,511 MeV.

Megoldás

a) A $^{7}_{4}$Be-izotópnak protontöbblete van, amelytől pozitív béta-bomlás, illetve elektronbefogás útján szabadulhat meg. A pozitív béta-bomlás energiamérlege:

$$Q_{\beta^+} = \left[M(^7\mathrm{Be}) - M(^7\mathrm{Li}) - 2\,m_e\right] c^2 = -0{,}1594\ \mathrm{MeV} < 0.$$

Az elektronbefogás energiamérlege:

$$Q_{\beta^+} = \left[M(^7\mathrm{Be}) - M(^7\mathrm{Li})\right] c^2 = 0{,}8626\ \mathrm{MeV} > 0.$$

Tehát a $^{7}_{4}$Be-atommag alapállapotból, külső energia befektetése nélkül csak elektronbefogással képes bomlani.

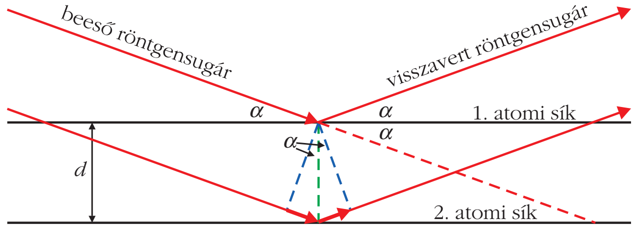
b) Az elektronbefogás időegységre eső valószínűsége függ az atommagot körülvevő elektronsűrűségtől. Mivel a Napban az anyag nagyrészt plazmaállapotban van, ezért a $^{7}_{4}$Be-atommagok túlnyomó többségben ionizált állapotban vannak, ezért jelentősen kisebb elektronsűrűség van az atommagok körül. Innen az eltérés a Földön, illetve a Napban mérhető átlagos felezési idők között.

Megjegyzés: elektronbefogás legnagyobb valószínűséggel az atommaghoz legközelebb lévő, 1*s* állapotban lévő elektronnal történik. Ezért ennek valószínűségét az 1*s* állapotban lévő elektronok száma befolyásolja leginkább. Kérdés, hogy vajon van-e a Nap belsejében elég magas hőmérséklet ahhoz, hogy a legbelső, 1*s* héjról is hiányozzon elektron, azaz legalább 3 elektron hiányozzon az elektronhéjból? Táblázatok[1] szerint a 3. elektron leszakításához 154 eV kell, és ez már 1,8 millió K-en megtörténhet. Az utolsó, 4. elektront pedig körülbelül 212 eV energia befektetésével lehet leszakítani. A részecskék mozgási energiája körülbelül 2,5 millió K-en ekkora. A Nap magjában, ahol a fúziós reakciók lezajlanak, ekkora hőmérséklet biztosan van.

5. feladat

kitűzte: *Tarján Péter*

Grafit egykristályt 0,153 nm hullámhosszú röntgensugárzással vizsgálunk Bragg-geometriában (lásd az *ábrát*). A visszavert röntgensugarak 3. erősítési maximumának iránya a beeső sugarak irányától 40°-kal tér el. Mekkora a grafitkristály rácsállandója?



Megoldás

A röntgen-diffrakciónál a beesési és a visszaverődési szöget nem a beesési merőlegestől, hanem a kristály felszínétől mérjük. Itt is igaz viszont a visszaverődés törvénye, azaz a feladat feltételei mellett mind a beesési, mind a visszaverődési szög 20°. Az egymással szomszédos atomi síkokról „visszaverődött” röntgensugarak útkülönbsége tehát $2d\cdot\sin\alpha$. Az erősítés feltétele, hogy az útkülönbség a hullámhossz egész számú többszöröse legyen. A feladat a harmadrendű maximumra vonatkozó szöget adja meg, tehát $3\lambda = 2d\cdot\sin\alpha$. Innen kapjuk:

$$d = \frac{3\,\lambda}{2\sin\alpha} = 6{,}71\cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}.$$

6. feladat

kitűzte: *Ujvári Sándor*

Pionok és müonok egyforma, 130 MeV/c lendülettel haladnak át egy átlátszó közegen. Milyen tartományba esik a közeg törésmutatója, ha csak a müonok keltenek Cserenkov-sugárzást?

Adatok: a pion nyugalmi tömege 140 MeV/c^2, a müoné 106 MeV/c^2. (Cserenkov-sugárzás akkor keletkezik, ha a közegben haladó töltött részecske sebessége nagyobb, mint a fény sebessége az adott közegben.)

Megoldás

A vákuumra vonatkozó törésmutató definíció szerint $n = c/v$, ahol c a fénysebesség vákuumban, míg v a fény sebessége az adott közegben, és $n \geq 1$. A Cserenkov-sugárzás küszöbsebessége

$$v > \frac{c}{n} \Rightarrow \frac{v}{c} \equiv \beta > \frac{1}{n}.$$

Fejezzük ki β-t a részecske lendületével és energiájával:

$$E = \sqrt{(p\,c)^2 + E_0^2} = \frac{E_0}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Ebből átrendezéssel kapjuk:

$$\beta = \frac{p\,c}{E}.$$

Ismerve a müon lendületét: $p_\mu c$ = 130 MeV, a müon energiája:

$$E_\mu = \sqrt{(p_\mu\,c)^2 + \left(m_\mu\,c^2\right)^2} = \sqrt{130^2 + 106^2} =$$
$$= 167{,}73\ \mathrm{MeV}.$$

---

[1] Lásd például https://en.wikipedia.org/wiki/Ionization_energies_of_the_elements_(data_page)

Ezért

$$\beta_\mu = \frac{p_\mu c}{E_\mu} = \frac{130}{167{,}73} = 0{,}775.$$

Hasonló számolással a pionra kapjuk:

$$\beta_\pi = \frac{p_\pi c}{E_\pi} = \frac{130}{191{,}05} = 0{,}680.$$

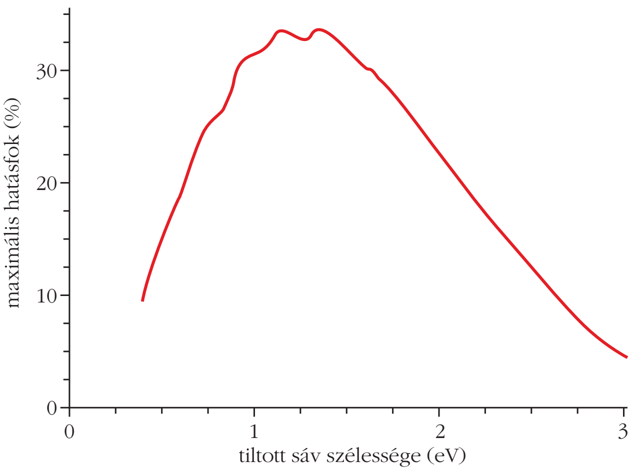
Ebből a közeg n törésmutatójára adódik:

$$n_\mu = \frac{1}{\beta_\mu} = 1{,}29 < n < n_\pi = \frac{1}{\beta_\pi} = 1{,}47.$$

7. feladat

kitűzte: Papp Gergely

Az egyszerű p-n átmenetű félvezető napelemek hatásfokának van egy elméleti felső határa, az úgynevezett Shockley–Queisser-limit. Maximumát 33,7%-nál éri el, azaz 1000 W/m^2 beeső napsugárzásból csak maximum 337 W/m^2 teljesítmény nyerhető ki. A hatásfok függését a félvezető tiltott sáv szélességétől az *ábra* mutatja.



a) A Nap felszíni hőmérséklete 5778 K. Milyen hullámhosszon sugározza a legtöbb energiát? Hány eV ennek a hullámhossznak megfelelő fotonenergia? *Vázlatosan* rajzoljuk le a sugárzási spektrumot!

b) Próbáljuk megmagyarázni a hatásfoklimit létezését kvalitatívan (nem számszerűleg)!

c) Miért függ a hatásfok a tiltott sáv szélességétől, és miért nem monoton ez a függés?

Megoldás

a) Közelítsük $b \approx 2897$ μm·K-nel a Wien-törvény állandóját. Ebből a Nap sugárzásának maximuma:

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T} = \frac{2897\ (\mu\mathrm{m}\cdot\mathrm{K})}{5778\ (\mathrm{K})} \approx 501{,}4\ \mathrm{nm}.$$

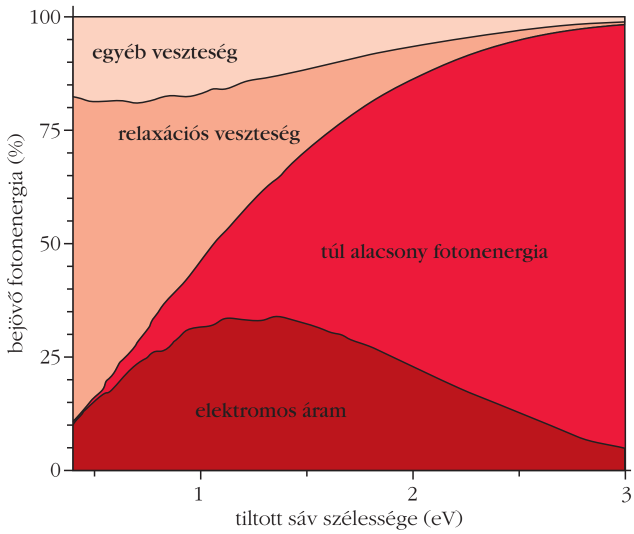
Az ilyen hullámhosszúságú fotonok energiája 2,47 eV.

b) A hatásfokban három effektus játszik szerepet:

1) A napsugárzás spektruma folytonos, alakját a fekete test sugárzási törvényből kaphatjuk meg.

2) A félvezetőben a tiltott sáv szélességénél kisebb energiájú fotonok nem tudják a valenciasávból a vezetési sávba gerjeszteni az elektronokat. Ezért a spektrumból a tiltott sáv szélességénél kisebb energiájú fotonok a folyamat szempontjából elvesznek.

3) A vezetési sávba került elektron csak a sáv szélességének megfelelő mennyiségű energiát tudja elektromos áram formájában leadni, a „maradék” energia hővé alakul.



c) A b) pontban írtak alapján: ha a sáv szélessége alacsony, akkor ugyan több fotont nyel el a félvezető, de fotononként kevés elektromos energiát tudunk kinyerni. Ha a tiltott sáv szélessége nagy, akkor pedig fotononként több energiát tudunk ugyan kinyerni, de kevesebb fotont tudunk hasznosítani. Az adott energián elérhető fotonok számát a napsugárzás spektruma határozza meg. Így az optimum valahol a kettő között van.

8. feladat (Junior kategória)

kitűzte: Radnóti Katalin

Egy liter asztali fehér bor 77 g etilalkoholt (C_2H_5-OH) és 1 g káliumot tartalmaz. Határozzuk meg, hogy a bor elfogyasztását követő percekben hogyan aránylik a felszívódó kálium ^{40}K izotópjától származó aktivitás (A_K) az alkohol ^{14}C tartalmától származó aktivitáshoz (A_C)!

Adatok: A kérdéses izotópok részarányai, valamint felezési ideik:

$$\frac{N(^{14}\mathrm{C})}{N(\mathrm{C})} = 1{,}14\cdot 10^{-12},\quad \frac{N(^{40}\mathrm{K})}{N(\mathrm{K})} = 1{,}18\cdot 10^{-4};$$

$$T_{1/2}(^{14}\mathrm{C}) = 5730\ \text{év},\quad T_{1/2}(^{40}\mathrm{K}) = 1{,}248\cdot 10^{9}\ \text{év}.$$

Megoldás

Az aktivitás képlete:

$$A = N\frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \left(\frac{m}{M}N_A\right)\frac{\ln 2}{T_{1/2}}.$$

Ezért a két aktivitás felírható:

$$A_K = \left(\frac{1}{40} \cdot 6 \cdot 10^{23}\right) \cdot \frac{0{,}693}{1{,}248 \cdot 10^9 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600} \frac{1}{\mathrm{s}} = $$
$$= 31{,}288 \ \mathrm{Bq}.$$

Illetve (figyelembe véve, hogy az alkoholmolekulában 2 szénatom van):

$$A_C = 2 \cdot \left(\frac{77}{46} \cdot 6 \cdot 10^{23}\right) \cdot \frac{0{,}693}{5{,}730 \cdot 10^3 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600} \frac{1}{\mathrm{s}} = $$
$$= 8{,}816 \ \mathrm{Bq}.$$

Ebből pedig az aktivitások arányára kapjuk:

$$\frac{A_K}{A_C} = \frac{31{,}288 \ \mathrm{Bq}}{8{,}816 \ \mathrm{Bq}} \approx 3{,}55.$$

9. feladat (Junior kategória) kitűzte: *Kis Dániel*

Az uránizotópok a neutronokkal indukált hasadás, illetve radioaktív bomlás mellett spontán hasadásra is képesek. Az ^{238}U izotóp esetében a bomlások f_{sf} = $5{,}4 \cdot 10^{-5}$%-ban következik be spontán hasadás.

a) A paksi atomerőműben átlagosan mennyi *spontán* ^{238}U-hasadás történik egy nap alatt?

b) Ez mekkora energiafelszabadulást jelent?

Adatok: a spontán hasadásból felszabaduló energia $3{,}2 \cdot 10^{-11}$ J, az urán mennyisége 42 t/blokk, az átlagos dúsítás 4% (atomszázalék). Ezen a dúsításon az urán moláris tömege 237,93 g/mol, a ^{238}U radioaktív felezési ideje $4{,}468 \cdot 10^9$ év. Az erőműnek 4 blokkja van.

Megoldás

Az ^{238}U magok számát a tömeg, a dúsítás és a moláris tömeg értékéből számíthatjuk:

$$N_{238} = \frac{(1-d)\, m}{M_{\mathrm{U}}} N_A = $$
$$= \frac{0{,}96 \cdot 4 \cdot 4{,}2 \cdot 10^7 \ \mathrm{g}}{237{,}93 \ \mathrm{g/mol}} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} \frac{1}{\mathrm{mol}} = $$
$$= 4{,}08 \cdot 10^{29}.$$

A felezési időt célszerű nap egységekben megadni, és ekkor az egy napra számított aktivitás (egy nap alatt bekövetkező spontán hasadások száma):

$$A_{\mathrm{sf}} = N_{238}\, f_{\mathrm{sf}} \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = $$
$$= 4{,}08 \cdot 10^{29} \cdot 5{,}4 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{0{,}693}{4{,}468 \cdot 10^9 \cdot 365} = $$
$$= 9{,}37 \cdot 10^{10} \frac{1}{\mathrm{nap}}.$$

b) Az atomerőmű négy blokkjában a spontán hasadások miatt egy nap alatt felszabaduló energia tehát: $E_{\mathrm{sf}} = 3{,}2 \cdot 10^{-11} \cdot 9{,}37 \cdot 10^{10} = 2{,}998 \approx 3$ J.

10. feladat (Junior kategória) kitűzte: Mester András

0,2 T erősségű homogén mágneses térben azonos sugárforrásból, az indukcióvonalakra merőleges síkban, egyszerre, egy irányban indul egy $6{,}64 \cdot 10^{-27}$ kg tömegű alfa-részecske $1{,}5 \cdot 10^4$ km/s, egy béta-részecske $8 \cdot 10^4$ km/s sebességgel, és egy gamma-foton. (A relativisztikus hatásoktól tekintsünk el.)

a) Mennyi idő múlva lesz az alfa-részecske sebessége merőleges a gamma-foton pályájára?

b] Mekkora utat tesz meg ezen idő alatt az alfa- és a béta-részecske, illetve a foton?

Megoldás

a) Homogén mágneses térben mind az alfa-, mind a béta-részecske körpályán mozog. A gamma-foton egyenes pályán halad. Az alfa-részecske sebessége egy negyed kör megtétele után lesz merőleges a foton pályájára. Az alfa-részecske pályájának sugara:

$$r = \frac{m\,v}{Q\,B} = \frac{6{,}64 \cdot 10^{-27} \ (\mathrm{kg}) \cdot 1{,}5 \cdot 10^7 \ (\mathrm{m/s})}{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \ (\mathrm{C}) \cdot 0{,}2 \ (\mathrm{T})} = $$
$$= 1{,}55 \ \mathrm{m}.$$

Az alfa-részecske körmozgásának periódusideje:

$$T = \frac{2\pi\, r}{v} = \frac{2\pi \cdot 1{,}55 \ (\mathrm{m})}{1{,}5 \cdot 10^7 \ (\mathrm{m/s})} = 6{,}51 \cdot 10^{-7} \ \mathrm{s}.$$

Negyed kört tehát $T/4 = 1{,}63 \cdot 10^{-7}$ s alatt tesz meg.

b) Mivel a részecskék sebességének abszolút értéke állandó (a körpályán tartó Lorentz-erő csak a sebesség irányát változtatja meg, nagyságát nem), ezért a részecskék által megtett utat az egyenletes mozgás út-idő összefüggéséből könnyen meghatározhatjuk:

$s_\alpha = v_\alpha t = 1{,}5 \cdot 10^7 \ (\mathrm{m/s}) \cdot 1{,}63 \cdot 10^{-7} \ (\mathrm{s}) = 2{,}44 \ \mathrm{m}$ (körpálya mentén megtett út).

$s_\beta = v_\beta t = 8 \cdot 10^7 \ (\mathrm{m/s}) \cdot 1{,}63 \cdot 10^{-7} \ (\mathrm{s}) = 13{,}02 \ \mathrm{m}$ (körpálya mentén megtett út).

$s_\gamma = c t = 3 \cdot 10^8 \ (\mathrm{m/s}) \cdot 1{,}63 \cdot 10^{-7} \ (\mathrm{s}) = 48{,}8 \ \mathrm{m}$ (egyenes vonalban megtett út).

11. feladat (I. kategória) kitűzte: Tarján Péter

A debreceni Atommagkutató Intézetben található Magyarország legnagyobb részecskegyorsító berendezése, amely 1985 óta szolgáltat részecskenyalábokat alap- és alkalmazott kutatások számára, illetve orvosi és ipari alkalmazásokhoz is. A gyorsító D alakú üreges fém elektródái (duánsok) a síkjukra merőleges 1,4 T erősségű homogén mágneses térben helyezkednek el. A gyorsított részecskék legnagyobb pályasugara R = 45 cm.

a) Legfeljebb hány MeV energiára tudja gyorsítani ez a ciklotron a protonokat, illetve az alfa-részecskéket?

b) 5 MeV végenergiára gyorsításnál az alkalmazott mágneses tér nagysága 0,72 T. Mekkora frekvenciájú váltakozó feszültséget kell kapcsolni a duánsokra, hogy a proton, illetve az alfa-részecske a duánsok között mindig gyorsuljon? Hogyan tudnak ilyen alfa-részecskéket gyorsítani, ha a gyorsítófeszültség frekvenciája csak a 8–24 MHz intervallumban változtatható?

Megoldás

A részecskék a duánsok közötti résben gyorsulnak. A duánsok belsejében azonban nincs elektromos tér (Faraday-kalitka), így ott csak a mágneses tér hatásával kell számolni, a részecske állandó nagyságú sebességgel, körpályán halad. Ennek dinamikai feltétele:

$$m\,\frac{v^2}{r} = Q\,v\,B \;\Rightarrow\; v = \frac{Q\,B\,r}{m}.$$

A legnagyobb sebességet – és ezzel a mozgási energiát – tehát a maximális pályasugár és a mágneses tér erőssége korlátozza. A klasszikus ciklotron nem működik relativisztikus energiákon,[2] ezért az elérhető legnagyobb energiát közelítőleg lehet klasszikusan számolni:

$$E_{\max} = \frac{1}{2}\,m\,v_{\max}^2 = \frac{Q^2\,B^2\,R^2}{2\,m}.$$

Vegyük észre, hogy a maximális energia a részecske Q^2/m arányától függ. Miután $m_\alpha \approx 4\,m_\mathrm{p}$ és $Q_\alpha = 2\,Q_\mathrm{p}$ így ez az arány ugyanaz az alfa-részecskére, mint a protonra. Emiatt:

$$E_\mathrm{p} = E_\alpha = 3{,}046\cdot 10^{-12}\ \mathrm{J} = 19{,}01\ \mathrm{MeV}.$$

b) A részecske a duánsok belsejében félkör alakú pályán halad. A félkör megtételéhez szükséges idő alatt a gyorsító feszültségnek éppen ellenkező polaritásúra kell váltania. Ezért a gyorsító feszültség T periódusidejére felírhatjuk:

$$\frac{T}{2} = \frac{r\pi}{v} = \pi\,\frac{m}{Q\,B} \;\Rightarrow\; f = \frac{Q}{m}\,\frac{B}{2\pi}.$$

Az adatokat behelyettesítve kapjuk:

$$f_\mathrm{p} = 1{,}098\cdot 10^7\ \mathrm{Hz} = 10{,}98\ \mathrm{MHz}$$

és

$$f_\alpha = 5{,}526\cdot 10^6\ \mathrm{Hz} = 5{,}526\ \mathrm{MHz} \approx \frac{1}{2}\,f_p.$$

Látható, hogy a szükséges frekvencia az alfa-részecskék esetében a rendelkezésre álló tartomány alá esik. Ehelyett annak a frekvenciának a háromszorosát (16,58 MHz) használják, ami már hozzáférhető. Ekkor is fennáll ugyanis, hogy a polaritás ellenkezőjére vált, mire a részecske befutja a félkört a duánsok belsejében.

[2]Az Atomki ciklotronja nem teljesen klasszikus, hanem szektorfókuszált ciklotron, amivel a relativisztikus tömegnövekedést bizonyos mértékig kompenzálni lehet.

12. feladat (I. kategória)

kitűzték: *Szűcs József* és *Sükösd Csaba*

Mintegy 100 évvel ezelőtt, az 1920-as évek elején – amikor még a kvantummechanika nem született meg, és a neutront sem fedezték fel (1932. *Chadwick*) – az atommagok összetételét a tudósok még úgy képzelték el, hogy a magban A számú proton és $A-Z$ számú elektron van kötött állapotban. Így például az ^{16}O atommagban 16 proton tart kötött állapotban 8 elektront. Az atommag méretére is csak a Rutherford-kísérlet adott egy felső korlátot: $R < 10^{-14}$ m. Az 1920-as években azonban *Louis de Broglie* felfedezte a róla elnevezett összefüggést, és ezzel minden részecskéhez hullámot is rendeltek, amely a részecske lendületével van kapcsolatban.

a) A de Broglie-összefüggés felhasználásával mutassuk meg, hogy egy elektron nem lehet kötött állapotban a $A = 16$ protont tartalmazó, 10^{-14} m sugarú atommagban!

b) Legalább mekkora sugarúnak kellene lennie az $A = 16$ protont tartalmazó atommagnak, hogy fogva tudjon tartani akár csak egyetlen elektront?

Megoldás

Ha a Rutherford-féle becsült magméretet vesszük a de Broglie-hullámhossz becsült méretének is, akkor $\lambda_\mathrm{B} \approx 10^{-14}$ m. Ekkor az elektron mozgási energiája a következő lenne:

$$E_m = \frac{p^2}{2\,m_\mathrm{e}} = \frac{h^2}{2\,m_\mathrm{e}\,\lambda_\mathrm{B}^2} = 2{,}41\cdot 10^{-9}\ \mathrm{J} \approx 15000\ \mathrm{MeV}.$$

Az elektron kötését biztosítani hivatott negatív elektrosztatikus potenciális energia viszont:

$$E_p \approx -\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{16\,e^2}{R} = -3{,}68\cdot 10^{-13}\ \mathrm{J} \approx -2{,}3\ \mathrm{MeV}.$$

Mivel a mozgási energia négy nagyságrenddel nagyobb, mint a potenciális energia, ezért az elektron nem lehet kötött állapotban.

b) Az elektron kötött állapotának feltétele: $E_{teljes} = E_m + E_p < 0$. Kiírva:

$$\frac{h^2}{2\,m\,R^2} - \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{16\,e^2}{R} < 0 \;\Rightarrow\; R > 6{,}25\cdot 10^{-11}\ \mathrm{m}.$$

Ekkora méret viszont ellentmond a Rutherford-szórás kísérleti eredményeinek ($R < 10^{-14}$ m).

Megjegyzés: a b) pontban számolt méret a klasszikus Bohr-sugárral (alapállapotú hidrogénatom) összemérhető.

13. feladat (I. kategória)

kitűzte: Sükösd Csaba

Az ELI-ALPS szegedi kutatóintézet szuperlézereinek HF-PW nevű ága 2 PW maximális teljesítményű, 17 fs hosszúságú lézerimpulzusokat szolgáltat 800 nm közepes hullámhosszon.

a) Mekkora egyetlen lézerimpulzusban tárolt energia? (Tegyük fel, hogy az átlagos teljesítmény a maximális teljesítmény fele!)

b) Hány koherens foton van egyetlen ilyen impulzusban?

c) Mekkora az elektromos térerősség maximális amplitúdója, ha ez a nyaláb 1 mm^2 felületre van fókuszálva?

d) Hasonlítsuk össze a c) pont eredményét a proton által létrehozott térerősséggel az alapállapotú H-atom sugaránál!

e) Mekkora lehet az ebben az impulzusban lévő fotonok hullámhossz-bizonytalansága?

Javaslat: használjuk ki, hogy egy vákuumban terjedő elektromágneses hullámban az egységnyi felületre eső S teljesítmény kifejezhető a hullám elektromos térerősségének amplitúdójával: $S = c\varepsilon_0 E^2$, ahol c a fénysebesség és $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ As/Vm, a vákuum permittivitása. *További tipp:* $\Delta(1/x) = \Delta x / x^2$.

Megoldás

a) Az átlagos teljesítmény 1 PW = 10^{15} W. Az ebben tárolt energia:

$$W = P\,t = 10^{15}\left(\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}\right)\cdot 17\cdot 10^{-15}\ (\mathrm{s}) = 17\ \mathrm{J}.$$

b) Egyetlen 800 nm hullámhosszúságú foton energiája:

$$\varepsilon_\mathrm{f} = h\frac{c}{\lambda} \approx 2{,}5\cdot 10^{-19}\ \mathrm{J},$$

ezért a 17 J energiát

$$n = \frac{17}{2{,}5\cdot 10^{-19}} = 6{,}84\cdot 10^{19}$$

koherens foton tudja szolgáltatni.

c) Ha ezt a nyalábot 1 mm^2 felületre fókuszáljuk, akkor a maximális felületi teljesítménysűrűség:

$$S = \frac{P}{A} = \frac{2\cdot 10^{15}\ (\mathrm{W})}{\left(10^{-3}\ (\mathrm{m})\right)^2} = 2\cdot 10^{21}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}.$$

Felhasználva a megadott $S = c\varepsilon_0 E^2$ összefüggést, kapjuk, hogy

$$E = \sqrt{\frac{S}{c\,\varepsilon_0}}\,,$$

illetve behelyettesítve az adatokat:

$$E \approx 8{,}7\cdot 10^{11}\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}.$$

d) A hidrogénatom sugara $r_0 = 52{,}92\cdot 10^{-12}$ m (ez a Bohr-sugár). A protontól ilyen távolságban az elektromos térerősség:

$$E = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{e}{r_0^2} = 5{,}142\cdot 10^{11}\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}.$$

Látszik, hogy egy ilyen lézerimpulzus által létrehozott térerősség akár még az elektront fogva tartó térerősségnél is nagyobb lehet, azaz akár ki is tudja szakítani az elektront az atom/molekula kötelékéből. Azaz ionizálni is tud, annak ellenére, hogy egyetlen fotonja erre képtelen lenne (mikroszkopikus szempontból ez többfotonos ionizáció).

e) Induljunk ki a helyre és a lendületre vonatkozó Heisenberg-féle határozatlansági összefüggésből:

$$\Delta x\,\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}.$$

A helyre vonatkozóan $\Delta x = c\Delta t$, ahol Δt a lézerimpulzus időbeli „hossza”. A lendületre vonatkozóan pedig:

$$\Delta p_x = h\,\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{h}{\lambda^2}\,\Delta\lambda,$$

ahol kihasználtuk a feladat kiírásában adott tippet. Ezekből kapjuk:

$$c\,\Delta t\,h\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} \geq \frac{h}{4\pi}.$$

Azaz

$$\Delta\lambda \geq \frac{\lambda^2}{4\pi\,c\,\Delta t} \approx 10\cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}.$$

A lézer hullámhossztartománya tehát $\lambda = 800\pm 5$ nm. Mivel az összefüggés csak alsó korlátot adott meg, azt is elfogadtuk, ha valaki a $\lambda = 800\pm 10$ nm eredményt adta meg.

Értékelés

Minden feladatra maximálisan 5 pontot lehetett kapni. A feladatsor nehéznek bizonyult a diákok számára, a korábbi évekhez képest alacsonyabb pontszámok születtek.

Az elérhető 50 pontból az I. kategóriások legjobbjainak maximum 34 pontot sikerült szerezniük, a junioroknak (a három könnyebb feladatnak köszönhetően) 41 pontot.

Meglepő módon a leggyengébben az első feladat sikerült; erre a maximálisan lehetséges pontszám (5) helyett az átlagosan elért eredmény mindössze 0,95 pont volt az I. kategóriánál és 1,3 pont a junioroknál. Az első, a hetedik, és a tizenkettedik feladat (I. kategóriás) kivételével valamennyi feladatra érkezett tökéletes (5 pontos) megoldás is. A 7. és a 12. feladatra maximum 4 pontos megoldások érkeztek, az első feladatra maximum 2 pontot értek csak el egyes tanulók.

A legjobb átlagos pontszámot a második feladatra érték el az I. kategóriás versenyzők (3,85 pont), a Junior tanulók legjobb átlaga (4,9 pont) a kilencedik – kifejezetten junior versenyzők számára készült – feladatnál volt.

Folytatjuk.