MOZGÁSSZIMULÁCIÓK A LÉGKÖRBEN – 2. RÉSZ

Hogyan írjunk érdekes szimulációkat középiskolában?

Stonawski Tamás
Nyíregyházi Egyetem

Az előző cikkben egyszerű kinematikai szimulációk ismertetése után jutottunk el olyan összetettebbek megírásáig, ahol a légkör szerepe már nem volt elhanyagolható. Érdekes újságcikkek és érettségi feladatokon keresztül teszteltük a szimulációkat, eljutva a felhajtóerő befolyásoló hatásáig. A továbbiakban újabb érdekes példákon keresztül folytatjuk a szimulációk írásának technikáját.

A felhajtóerő „felerősödése"

Természetesen nem adtuk fel, tovább kerestünk olyan mozgásokat, ahol a szimulációba beépített felhajtóerőnek akár egyenrangú szerepe lehet (*9. ábra*). Így esett a választásunk a szondázó ballonok tanulmányozására. A TOTEX 200 grammos rotációs öntéssel készült latexballonjának adatait mind a kezdeti értékek megadásához, mind az ellenőrzéshez is felhasználhattuk (hasznos teher = 250 g, felengedési átmérő = 117 cm, pukkanási átmérő = 3 m, pukkanási magasság = 21,2 km). Az előző szimulációt abban kellett módosítani, hogy itt a fölfelé mozgás miatt a megtett út az emelkedési magassággal legyen egyenlő, illetve be kellett toldani még egy feltételt, azaz, ha a léggömb térfogata eléri a pukkanási átmérőt, érjen véget az emelkedés, és szabadeséssel folytatódjon a mozgás. A ballon térfogatváltozását az egyesített gáztörvény alapján határoztuk meg: az előző nyomás-, térfogat- és hőmérséklet-adatokból, illetve az aktuális hőmérséklet- és nyomásadatok alapján minden lépésnél ki tudtuk számíttatni az aktuális térfogatot. A ballon térfogatának és homlokfelületének növekedése miatt a felhajtó- és a közegellenállási erő is növekedett, ami az eredő gyorsulást is nagyban befolyásolta.

```
while v(i)>=0; // amíg emelkedik, tegye a következőket
    i=i+1;
    t(i)=t(i-1)+dt; // időléptetés
    v(i)=v(i-1)+ae(i-1)*dt; // pillanatnyi sebesség
    s(i)=s(i-1)+v(i-1)*dt; // megtett út
    ph(i)=s(i); // a pillantnyi magasság a megtett úttal egyenlő
    ro(i)=rok0*exp(-rok0*g*ph(i)*p0.^-1); // sűrűségfüggvény
    if ph(i)<11000 then T(i)=T(1)-ph(i)*0.0065 // hőmérséklet-
        gradiens a troposzférában
    end
    if ph(i)>=11000 then T(i)=T(i-1) // hőmérséklet a
        sztratoszférában 20 km-ig
    end
    if ph(i)>20000 then T(i)=T(i-1)+(ph(i)-ph(i-1))*0.001 //
        hőmérséklet a sztratoszférában 20 km-től 32 km-ig
    end
    if ph(i)>=32000 then T(i)=T(i-1)+(ph(i)-ph(i-1))*0.0028 //
        hőmérséklet a sztratoszférában 32 km-től 47 km-ig
    else T(i)=T(i-1) // hőmérséklet a sztratoszférában 47 km-től
        52 km-ig
    end
    p(i)=p0* exp(-rok0*g*ph(i)*p0.^-1); // barometrikus
        magasságformula
    V(i)=(p(i-1)*V(i-1)/T(i-1))*(T(i)/p(i)) // a ballon tágulása az
        egyesített gáztörvény szerint
    r(i)=(V(i)*3/(%pi*4))^(1/3) // ballon sugara
    hf(i)=(r(i))^2*%pi // homlokfelület nagysága
    Fk(i)=c*hf(i)*0.5*ro(i)*(v(i).^2) // közegellenállási erő
    Ff(i)=ro(i)*V(i)*g // felhajtóerő
    Fe(i)=-(m*g)-Fk(i)+Ff(i); // eredő erő
    ae(i)=Fe(i)/m // eredő gyorsulás
    if 2*r(i)>3 then v(i)=-0.1 // pukkanási átmérő
        end
    if i>1000000 then // mesterséges megállítás
        break;
    end
```

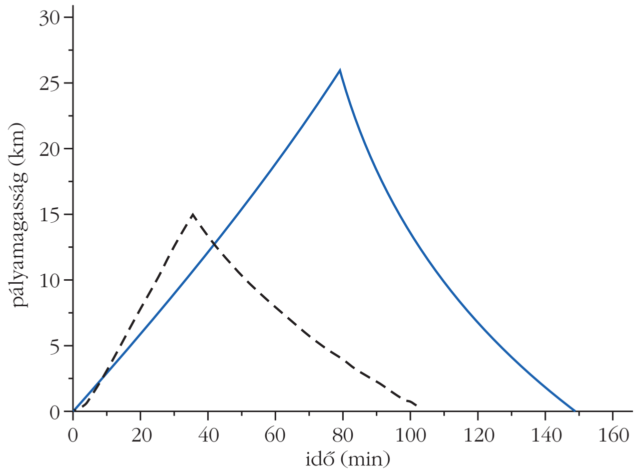
Köszönettel tartozom az Ecsedi Báthori István Gimnázium tanulóinak és a Nyíregyházi Egyetem fizikatanár szakos hallgatóinak.

Stonawski Tamás a Nyíregyházi Egyetemen főiskolai adjunktus. Doktori címét 2016-ban az ELTE Fizika Tanítása doktori program keretében szerezte. Kutatási területe a digitális média alkalmazása a tanulói kreativitás, problémamegoldás és önálló kísérletezés fejlesztésére általános és középiskolában.

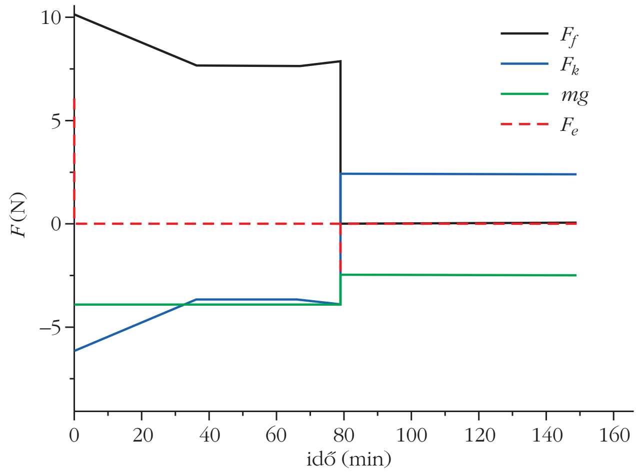
Pukkanás és zuhanás

A pukkanás detektálásával kicsit „becsaptuk" a szimulációt, ugyanis e feltételnek megfelelően az emelkedési sebesség egy nagyon kicsi negatív értéket kapott, így a while ciklus úgy érzékelte, hogy vége az emelkedésnek, így a ciklust befejezte. A pukkanás utáni szabadesés már az eddig megírt szimulációk alapján készült, az ejtőernyő adatait (alaki tényező = 1,3; a homlokfelület 1,5 m^2; V = 1 dm^3) becslések alapján adtuk meg. A szimuláció lefuttatásakor a pukkanási magasság 25,9 km-nek adódott, ami körülbelül 4 km-rel különbözik a gyártó alapján kapott értéktől. Az interneten találtunk felengedett TOTEX 200-as GPS-adatokat [12]. A BME hallgatói által publikált magasság-idő grafikont összehasonlítottuk a szimulációéval (*8. ábra*).

A grafikonok jellegei megegyezők voltak. Különbségeket a pukkanási magasságokban találtunk. A hallgatók által felengedett ballon 15 km-es magasság-



8. ábra. A szimuláció során (folytonos) és a 2018. március 31-én felengedett TOTEX 200 ballon GPS-adatai alapján (szaggatott) kapott magasság-idő grafikonok.



9. ábra. A ballonra ható erők az idő függvényében. Jól látható a felhajtóerő kiemelkedő szerepe, hiszen legnagyobb nagyságú a pukkanásig. Az eredő erő nullához közelít (szaggatott vonal).

ban pukkant ki, ami körülbelül 6 km-rel tér el a gyártó alapján megadott értéktől (többel, mint a szimulációban). Az emelkedés idők: szimulációnál számított: 79 perc (15 km-es magasság 49 percnél), ballonnál mért: 36 perc.

Ekmondhatjuk, hogy a középiskolai képletekkel szimulált ballon mozgása – a kapott adatok alapján – valóságosnak mondható.

Ballisztikus pályák

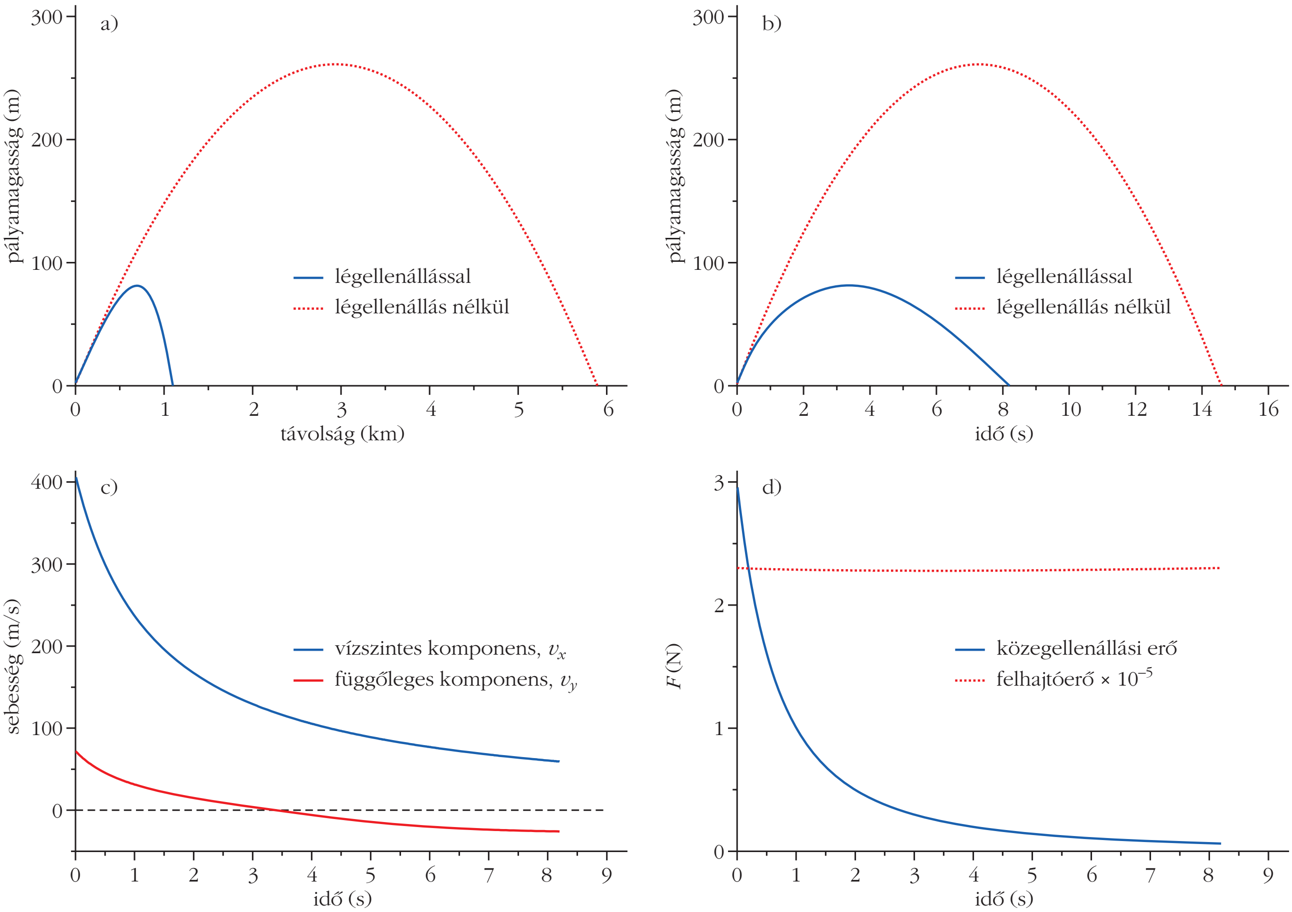
Az eddigiekben egydimenziós, azaz vonalmenti mozgásokkal foglalkoztunk, a téma további bővítését az egydimenzióból kilépve érhetjük el, ekkor a síkmozgásokat vesszük górcső alá. A síkmozgás egyik tipikus esete a ferde hajítás. A ferde hajításnál tanultak alkalmazásának egyik legérdekesebb témaköre a ballisztika. Ez a témakör magában foglalja a tetszőleges irányú kezdősebességgel elhajított, ellőtt testek mozgását. Különösen a nagy torkolati sebességgel rendelkező fegyvereknél fontos ismerni a levegő lövedék pályájára gyakorolt hatását. A mesterlövészek komoly fizikai előtanulmányokban vesznek részt, hogy megtanulják, melyek a ballisztikát befolyásoló hatások, és ezen tudás birtokában érjék el a lehető legpontosabb találatot.

Hogyan tudjuk az eddig megírt szimulációinkat kétdimenziósra bővíteni? Az egyetlen erőtörvény helyett most két erőtörvényt kell felírni bizonyos fizikai mennyiségek *x* és *y* komponenseivel. A kezdeti értékek a kezdősebesség nagysága és a vízszintessel bezárt szöge (ezekből v_{0x} és v_{0y} meghatározható, és innen fogjuk származtatni a többi mennyiséget is), a lövedék alakja (*bc* = ballisztikus tényezője), mérete és tömege (*r, h*), a puskacső pozíciója (például *h* = 1,5 m magasságból tüzelünk) lesznek. Ennél a mozgásnál a közegellenállási erőnek függőleges és vízszintes, míg a felhajtóerőnek csak függőleges (kis méretű lövedékek esetén elhanyagolhatóan kicsi) komponense van. A közegellenállás *y* komponensénél figyelembe kell venni a maximális magasságnál bekövetkező előjelváltást (ezt a szignum függvénnyel érhetjük el, ahol a *vy* lesz az argumentum).

A modern fegyverek torkolati sebessége a hangsebességet is túlhaladják (akár 2-3-szorosa is lehet), így a lövedéket – nagy sebessége miatt – a közegellenállási erő is jelentősen akadályozza a mozgásában. A szimulációnkat úgy írtuk meg, hogy a közeg figyelembevételével és a közeg nélkül vett számításokat is össze tudjuk hasonlítani (*10. ábra, y-x* grafikon).

```
while y(i) >= 0; // amíg földet nem ér, tegye a következőket

   i=i+1;
   t(i)=t(i-1)+dt;
   vx(i)=vx(i-1)+aex(i-1)*dt;
   vy(i)=vy(i-1)+aey(i-1)*dt;

   x(i)=x(i-1)+vx(i-1)*dt;
   y(i)=y(i-1)+vy(i-1)*dt;

   ph(i)=h+y(i);
   ro(i)=rok0*exp(-rok0*g*ph(i)*p0.^-1); //sűrűségfüggvény

   Fkx(i)=cx*hfx*0.5*ro(i)*(vx(i).^2)
   Fky(i)=-cy*hfy*0.5*ro(i)*(vy(i).^2)*signm(vy(i))

   Ff(i)=ro(i)*V*g // felhajtóerő

   Fex(i)=-Fkx(i)
   Fey(i)=-(m*g)+Fky(i)+Ff(i); //eredő erő

   aex(i)=Fex(i)/m
   aey(i)=Fey(i)/m;

   if i>100000 then
      break;
   end
end
```

A grafikonról leolvasható, mennyire erősen befolyásolja a közeg a lövedék pályáját: míg az *y-x* grafikon a közeg nélküli esetben szimmetrikus parabolaág, a közeg figyelembevételével a parabolaív eltorzul, az emelkedés után „kihegyesedik”. A lövés távolsága is meglehetősen lerövidül: 6 km-ről 1 km-re (a lövés magassága ugyanígy), a lövés időtartama 14 másodpercről 8-ra csökken. A *v-t* grafikon a sebesség füg-



10. ábra. A .357 Magnum kézifegyver adataival lefuttatott szimuláció. A felső két ábra a közegellenállás figyelembevételével és anélkül hasonlítja össze a lövedék pályáját (a), illetve a magasság-idő grafikonokat (b). Az alsó ábrákon: balra a lövedék sebességének x és y komponensei (c), jobbra a közegellenállási erő és a felhajtóerő időbeli változása látható (d). A kezdeti értékek: v_0 = 411 m/s, α = 10°, h_0 = 1,5 m, d = 9,1 mm, m = 0,0102 kg, l = 29,3 mm, c_x = 0,45, c_y = 0,8.

gőleges komponensének előjelváltását jól szemlélteti, de a 8. másodperc utáni viszonylag nagy becsapódási sebességek is jól leolvashatók róla. Az *F-t* grafikon elemzésekor szembetűnik a közegellenállási erő felhajtóerővel szembeni dominanciája (5 nagyságrendű), és hirtelen csökkenése (a sebességhez hasonlatosan).

Egy másik érdekes kérdés, hogy amíg közeg nélkül azonos kezdősebesség mellett a 45°-os szögben kilőtt lövedék repül a legmesszebbre, úgy ez az érték a közeg hatására 30°-ra módosul (*11. ábra*).

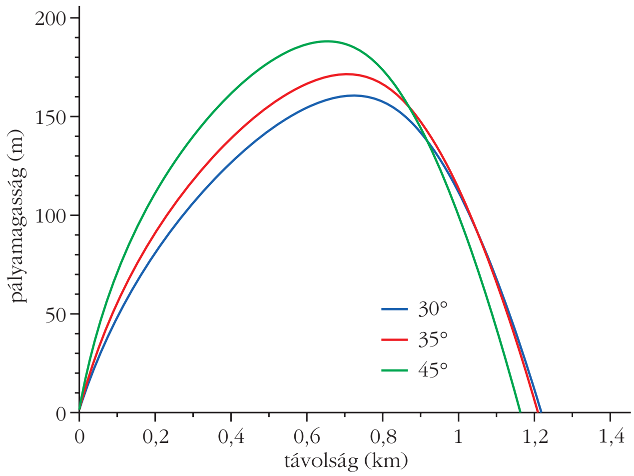
A szimuláció „hitelesítését” egy vadászoknak fejlesztett szoftveroldalról letöltött ábra alapján végeztük el [13]. Mivel az ábrán feltüntették a lövedék torkolati sebességét, a lövedék tömegét és ballisztikus együtthatóját (a lövés szögét az ábráról kiszámoltuk), az így kapott ábrát be tudtuk helyettesíteni a szimulációba, és össze tudtuk vetni az eredetivel. A feladat egyik különlegessége a más mértékegységben való „gondolkodás” volt, az átváltásokat a programunkban is végre kellett hajtanunk (*12. ábra*).

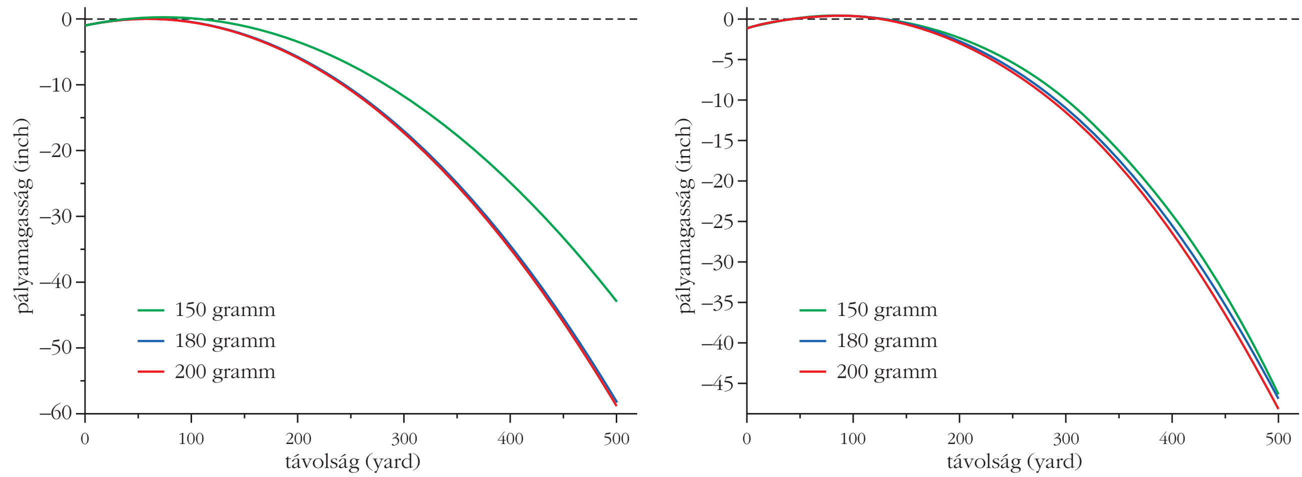
4–10 inches eltérést tapasztaltunk a vizsgált 500 yardos távolságnál a gyári adatoktól. A szimulációnkban a jóval kisebb (150 g) tömegű és ballisztikai tényezőjű lövedék „süllyedése” elmaradt a másik két lövedékétől, a gyári grafikonon ugyanezt nem tapasztaltuk.

Játékfegyverrel is végeztünk kísérleteket, az így kilőtt lövedék videóanalízisét is összevetettük a szimulációval, ami szintén jó egyezést mutatott.

Összegzésképpen elmondható, hogy szimulációnk jól közelítette a valóságos mozgásokat, de több szempontból is finomítani lehetne. A nagy sebességű lövedék ugyanis maga előtt összepréseli a levegőt (ez a sű-

11. ábra. Különböző szögekben kilőtt lövedék pályái a szimuláció alapján. Az ábrán a 25°-hoz tartozó pálya közel egybeesne a 35°-hoz tartozóval.





12. ábra. A bal oldalon a szimulációnk alapján kapott trajektória, a jobb oldalon a gyártó szoftverének grafikonja.

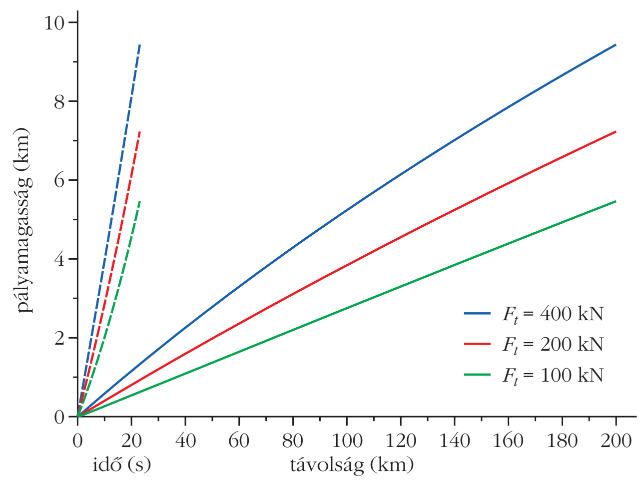
rűségnövekedés sebességfüggő), így nagyobb sűrűségértékekkel kellene számolni, a vektorok vízszintes és függőleges komponensekre való felbontásánál pedig a lövedék nem tartja a vízszintes helyzetet, így a homlokfelület nagysága is folyamatosan változik a mozgás során. Ezen korrekciók beépítésével – feltehetően – jobban közelíthetünk a valóságos trajektóriákhoz.

Ideális rakéták

Még izgalmasabb a fent leírt ferde hajítás, ha a lövedéket nem hagyjuk magára a nehézségi erőtérben, hanem a rakétamozgás során megismert tolóerőt is beépítjük a szimulációba (*13. ábra*). Szakkörön a legegyszerűbb esettel foglalkoztunk, amikor a tolóerő állandó és sebesség irányú (azaz előremutató), a mozgás során pedig (a kiáramló hajtóanyag miatt) egyenletes tömegcsökkenés következik be.

A rakéták mozgását nem túl messze engedve tanulmányozhatjuk csak, mert nagyobb távolságoknál már a g változásaival is számolnunk kell. Ilyenkor, legegyszerűbb esetben az általános tömegvonzás képletéből

13. ábra. Különböző tolóerőkkel elindított rakéták pályái (jobbra), illetve magasság-idő (balra) grafikonjai (m = 1 tonna, r = 4 m, h = 10 m, c_x = 0,505, c_y = 0,8, α = 30°).



tudjuk kiszámolni g-t a távolság függvényeként. A légnyomás számítását pedig nyugodtan benne hagyhatjuk a szimulációnkban, hiszen az exponenciális csökkenés a nagyobb távolságok esetén 0 Pa nyomást fog eredményezni.

Konklúziók

A szimulációk egyre fontosabb szerephez jutnak a tudományban, de az oktatásban is. Ahhoz, hogy közelebbről is megismerkedjünk a szimulációk működési mechanizmusaival, érdemes néhány egyszerű algoritmus alapján megírt szimulációt elkészíttetni tanítványainkkal.

A szimulációk írása egy feladat komplex megoldásának is felfogható – hiszen a tanórákon előforduló feladatok többnyire csak egy speciális feltételek alapján fennálló lehetséges végállapot hiányzó fizikai mennyiségeinek kiszámítását követelik meg –, mert a szimulációkban lehetőségünk van kiterjeszteni az alapfeladatot más kezdőfeltételekre, vagy a környezet befolyásoló hatásainak figyelembevételére, így más végállapotokhoz is eljuthatunk. Érdekes felfedezéseket tehetünk, ha például a ferde hajításnál megkeressük azt a szöget, amellyel a legmesszebb repül el a test (45° helyett csak 30°), meddig repül fel egy léggömb, milyen sebességgel csapódik be a földbe egy magasról lezuhanó test stb.

A szimulációkat játékosan is felhasználhatjuk a tanítási folyamatban (hagyjuk, hogy a tanulók próbálgatással jussanak új összefüggések felismerésére), de a szimuláció akkor jut igazán fontos didaktikai szerephez, ha valamilyen konkrét fizikai problémát szeretnénk vele megoldani vagy éppen tisztázni, de jó szolgálatot tehet valamilyen kísérlet várható kimenetelének előzetes tervezéséhez (például He-ballon felengedése és begyűjtése) is.

Valószínű, hogy akkor a legeredményesebb a szimulációkkal foglalkozni, amikor egy, a számítástechnikát és a fizikát szerető diák maga írja meg ezeket a programokat. Ahhoz viszont, hogy a tanulók önálló munkára is képesek legyenek, először csoportmunkában, közösen kell felépíteni az alapalgoritmusokat, és ezt követően feladatspecifikusan kell továbbfejleszteni a szimulációkat, lehetőleg már önállóan. A programírást szaktárgyi érdeklődésfelkeltésre is lehet használni, hiszen tapasztalat szerint a tanulók többsége jobban kedveli a számítástechnikát, informatikát, mint a fizikát.

A kinematikából kiindulva néhány egyszerű szimuláció a [14] linken érhető el.

Irodalom

12. http://legokor.hu/2018-04-27-matef2_3_repules/
13. http://www.ballisticsapp.com/300-win-mag-ballistics.htm
14. https://1drv.ms/f/s!An0er2QwwGjytDxz7aod3A9Q2jy0

VÉLEMÉNYEK

TANÁRI HITVALLÁSOM[1]

Tóth Eszter
Vác

A legtipikusabb társadalmi jellegzetesség ma az elégedetlenség. A társadalom azt akarja, hogy a dolgok gyorsabban menjenek és nagyobb léptékűek legyenek, ami azt jelenti, nem ülhetünk a babérjainkon. Ez nagyon fontos szerintem.

A kérdés az: mit teszünk ezért. Egy lehetséges válasz, hogy ezt a sorsra bízzuk. A másik megközelítés, amiben én hiszek, hogy ez a tanári küldetésünk.

Mindenki felemelkedése a tükör előtt kezdődik.

Vannak példák országunk iskoláiban a kiválóságra és az áttörésre – kevés, de van. Van ellenkező példánk is, és ami ott hiányzik nekünk: az a jó tanár. Szükségünk van kihívást értő tanárokra, olyan tanárokra, akik majdnem teljes mértékben kihasználják a gyerekekben rejlő lehetőségeket.

Hadd mondjam meg nektek, a tanári munka nem állhat meg egy szinten. Nincs „kicsit jó tanár”. Van természetadta tehetségű tanár és van magát lépcsőzetesen felépítő tanár. De a te tanárságod minősége egyedül tőled függ, és az egy alapos önvizsgálattal kezdődik – a tükör előtt. Onnan a felemelkedés olyan, mint egy ugrás egyenesen a határtalan égbe.

A tanár leginkább a gyerekek által érintett. Arra való, hogy elvezesse a fiatalt olyan területekre és eredményekre, amelyeket nem érhetnének el nélküle. A tanár a csoport szerves részeként kell, hogy működjön, nem saját kénye-kedvére, hanem a gyerekekkel, akiket meglátnia kell és nem keresztül nézni rajtuk. Gyerekekkel, akiket meg kell értenie, akiktől tanulnia kell, és elsősorban be kell vonnia őket a tanulásba. És amikor ők már a tieid, te kell, hogy legyél ihletük forrása, te kell, hogy legyél a nevelőjük, neked kell megrónod őket, ha szükséges – és neked szeretned kell őket!

Tanárnak lenni arról is szól, hogy ragaszkodj az igazsághoz. A tanároknak még a legzivatarosabb időkben is iránytűként kell szolgálniuk. Az teszteli őket. Igen, a tanárt meggyőzhetik és befolyásolhatják az emberek, ha szükséges, de a tanárnak ragaszkodnia kell az igazságához, olyan kell, hogy legyen, mint egy iránytű, és nem, mint a láng a szélben.

Oly korban élünk, ami bevezette az „alternatív igazság” fogalmát. Én nem hiszek ebben. Van igazság és van igazságtalanság. Van jó és van rossz. Nekem egyetlen igazság létezik: a gyerekeket segíteni a tudáson és a tiszta érzelmeken alapuló, ezért biztonságot nyújtó, belső szabadsághoz. Ezt semmi nem írja felül.

Azt hiszem, hogy a valódi erkölcs diskurzusait jelenleg félredobják, inkább adnak helyet az azonnali, vonzó fecsegésnek, a chat-stílusnak. De értékeinket – az empátiát, a barátságot, a személyes példamutatást – nem szabad félretenni. Nem hagyhatjuk, hogy egyetlen tesztünk legyen csak: a fegyelmi vizsgálat. Többet kell igényelnünk magunktól. Önvizsgálatunk erkölcsi vizsgálat. És ha nem védjük meg értékeinket, gyorsan elérünk a csúszós lejtőre.

Ezt az írást a Taní-tani Online-ból, a szerző engedélyével vettük át. (http://www.tani-tani.info/tanari_hitvallasom)

[1] Ez az írás arról szól, és nem másról, hogy „tanárok állnak a vártán” (*Marx György*). Rajtuk múlik következő generációink sorsa. Röviden: hitet akartam adni a kollégáimnak. Bármilyen szakosoknak. Nekem erre a célra „véletlenül” éppen a fizika tanítása a jó, azt tudom hitelesen használni. – A „hitvallásom” kezdettől fogva az, ami itt olvasható. De most az eredeti szöveget nem én írtam. Az eredeti nem is a tanárságról szólt. Valaki más írta a vezetésről 2018 márciusában, amit angolból lefordítva írtam át a tanárságomra. „Valaki más” ma már nyugdíjas pilóta. A neten „találkoztam vele” először egy rövid videóban: https://www.youtube.com/watch?v=hCW2noF1QTE. Lenyűgözött magas szintű repülési tudásának és a múltat tisztelő, tiszta lelkének együttélése. Utánanéztem a neten. Így találtam rá az általa írt cikkre. Számomra csoda volt, hogy az általános emberi értékek a Föld távoli pontjain mennyire hasonlók azoknak, akik foglalkozásukat hivatásuknak érzik.

Tóth Eszter – Rátz Tanár Úr életműdíj, 2014 – nyugdíjas fizikatanár, de még tanít iskolában. Írt fizikatankönyveket, amelyek megjelentek kínai, japán, angol, spanyol nyelven is, volt a fizikatanárok nemzetközi egyesületének titkára, félszáz országban tartott előadást fizikatanításról. De vallja: nem ezek a dolgok hitelesítik, hanem tanítványai sikerei az OKTV, TUDOK, a KöMaL versenyeken, és elsősorban felelős, szabad Emberré válásukban.