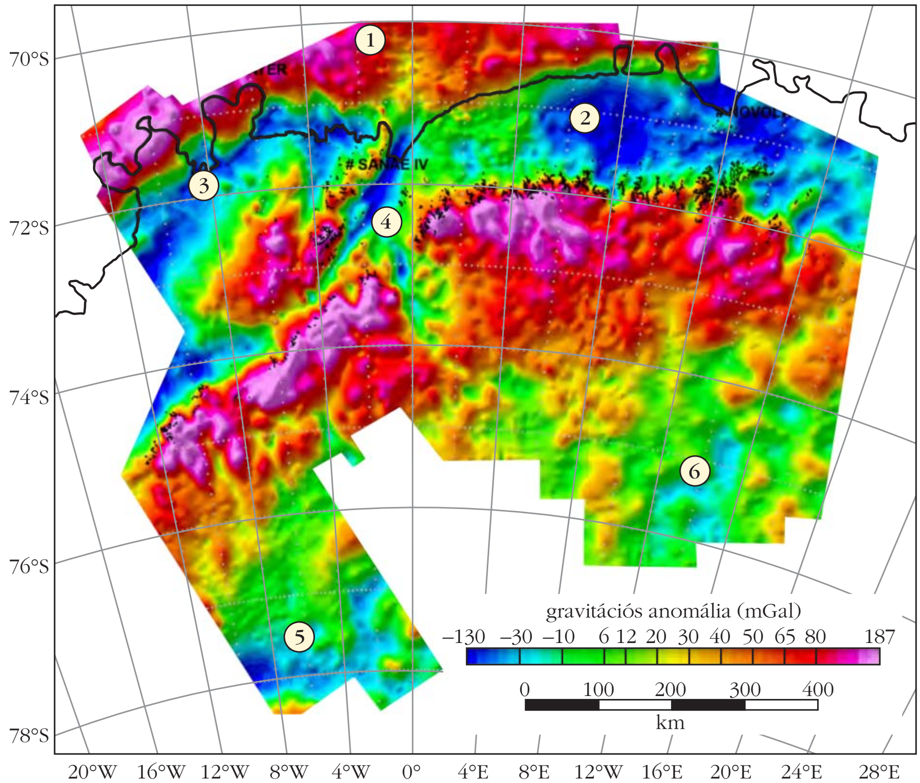
Eötvös Loránd valószínűleg elégedetten nyugtázná, hogy az elmúlt száz évben a Föld gravitációs terének mérésében bekövetkezett folyamatos fejlesztés révén „módunkban van biztosabb alapokra fektetni a földkéreg architektúrájának tanát, némi bepillantást nyerve olyan mélységekbe, melyekhez szemünk egyáltalában nem hatolhat, és fúróink el nem érnek.” [20]



12. ábra. A Jutulstraumen-árok környékének gravitációsanomália-térképe.

Irodalom

20. Eötvös Loránd elnöki beszéde az MTA 1901. évi közülésén. Megjelent: *Eötvös Loránd, a tudós és művelődés politikus írásaiból.* Sajtó alá rendezte Környei Elek, Gondolat Kiadó (1964) 151–160.
21. Br. Eötvös Loránd: Kísérleti kimutatása annak a nehézségi változásnak, amelyet valamennyi mozgó test elszenved. *Mathematikai és Természettudományi Értesítő* (1920) 1–28.
22. R. B. Harlan: Eotvos corrections for airborne gravimetry. *Journal of Geophysical Research 73* (1968) 4675–4679.
23. S. Riedel, W. Jokat, D. Steinhage: Mapping tectonic provinces with airborne gravity and radar data in Dronning Maud Land, East Antarctica. *Geophys. J. Int. 189* (2012) 414–427.
24. S. Riedel: Airborne-based Geophysical Investigation in Dronning Maud Land, Antarctica. PhD-értekezés, Bremen, 2008 (letölthető: http://epic.awi.de/20643)

VAN-E TÁVOLHATÁS A KVANTUMELMÉLETBEN?

Takács Gábor
BME Elméleti Fizikai Tanszék

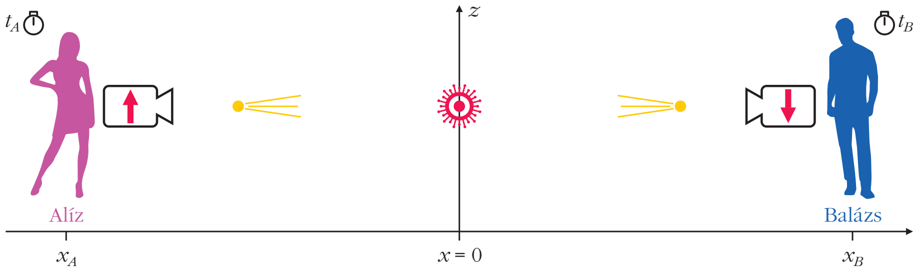
Albert Einstein, Boris Podolsky és *Nathan Rosen* 1935-ös cikkükben azt állították, hogy a kvantumelmélet nem adhatja a valóság teljes leírását. Az általuk megfogalmazott EPR-paradoxon azóta paradigmatikus jelentőségű lett. *John Bell* híres egyenlőtlensége megfogalmazta annak feltételét, hogy milyen esetben nem írhatók le a korrelációk klasszikus lokális rejtett változókkal. Az egyenlőtlenség kísérletileg is igazolt sértését számos helyen az Einstein által „kísérteties távolhatás”-nak nevezett nemlokalitás jeleként találják. Ebben a cikkben körüljárjuk a kérdést, és rávilágítunk, hogy ez az értelmezés helytelen: a kvantumelmélet teljes mértékben összefér a relativisztikus kauzalitás (lokalitás) elvével. A kísérlet eredménye azzal magyarázható, hogy a klasszikus és a kvantumos korrelációk jellege lényegesen különbözik egymástól.

A cikk elkészültét a Nemzeti Kutatási Fejlesztési és Innovációs Alap támogatta a Nemzeti Kiválósági Program keretében, a *Kvantumbitek előállítása, megosztása és kvantuminformációs hálózatok fejlesztése* című, 2017-1.2.1-NKP-2017-00001. számú projekt részeként.

Takács Gábor elméleti fizikus, az MTA doktora. Kutatási területe a kvantumtérelmélet. 2012-ben a Magyar Tudományos Akadémia Lendület pályázatát elnyerve új statisztikus térelméleti kutatócsoportot alapított a BME Fizikai Intézetében, ahol 2014-ben egyetemi tanárrá nevezték ki. Személyes honlap: http://dtp.physics.bme.hu/Takacs_Gabor, a kutatócsoport honlapja: http://sft.physics.bme.hu

Az EPR-paradoxon

Einstein, Podolsky és Rosen (EPR) gondolatkísérletüket eredetileg két részecske helyére és lendületére fogalmazták meg [1], itt egy másik, elterjedtebb for-



1. ábra. Az EPR-gondolatkísérlet.

máját használjuk, amely *Yakir Aharonov* és *David Bohm* nevéhez fűződik[1] [2].

Tételezzük fel, hogy egy forrás feles spinű részecskékből álló párokat bocsát ki, összesen zéró perdülettel. Egy térbeli *xyz* Descartes-koordinátarendszert felvéve, egy előre megválasztott irányban – mondjuk a *z* koordinátatengely mentén – mindkét részecske spinjének vetülete a $\pm\hbar/2$ értékeket veheti fel, amelyet a következőképpen jelöljünk: $|\uparrow_z\rangle$ és $|\downarrow_z\rangle$. A feles spin általános állapota ezek lineáris kombinációja

$$|\Psi\rangle = \alpha|\uparrow_z\rangle + \beta|\downarrow_z\rangle, \qquad (1)$$

ahol α és β komplex számok. Annak valószínűsége, hogy a spin vetületére egy mérés során a két lehetséges érték valamelyike adódik, Born szabálya alapján

$$\begin{aligned} P(s_z = +\hbar/2) &= |\alpha|^2, \\ P(s_z = -\hbar/2) &= |\beta|^2, \end{aligned} \qquad (2)$$

ahol a valószínűség teljessége miatt $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Amennyiben a két részecske spinjének együttes állapotát kívánjuk leírni, akkor az állapotok alakja

$$\begin{aligned} |\Psi_{12}\rangle = {} & \alpha|\uparrow_z\rangle_1|\uparrow_z\rangle_2 + \beta|\uparrow_z\rangle_1|\downarrow_z\rangle_2 + \\ & + \gamma|\downarrow_z\rangle_1|\uparrow_z\rangle_2 + \delta|\downarrow_z\rangle_1|\downarrow_z\rangle_2, \end{aligned} \qquad (3)$$

ahol 1, 2 a két részecskét indexeli és

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1. \qquad (4)$$

Ha a részecskék zéró teljes perdülettel repülnek szét, akkor a spinek állapota úgynevezett szinglett:

$$|\Psi_{EPR}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow_z\rangle_1|\downarrow_z\rangle_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow_z\rangle_1|\uparrow_z\rangle_2. \qquad (5)$$

Tegyük fel, hogy az 1 részecske spinjét Alíz, a 2 részecske spinjét pedig Balázs méri meg (*1. ábra*). Az (5) EPR-állapot tulajdonsága, hogy Alíz és Balázs is mindkét spinvetületet 1/2 valószínűséggel kapja eredményül, ugyanakkor a két mérés eredménye teljes mértékben korrelált: ha az egyik spinre Alíz valamilyen vetületet mér *z* irányban, akkor Balázs ugyanazon *z* irányban mérve minden esetben annak ellentettjét kapja.

[1] Annyiban eltérünk Aharonov és Bohm gondolatmenetétől, hogy fotonok polarizációs állapotai helyett e cikkben feles spinű részecskéket (például elektronokat) használunk példaként.

EPR szerint, ha Alíz mért elsőként, akkor a mérése után léteznie kell a valóság egy elemének, ami megfelel annak, hogy Balázs mérésének kimenetele immár teljes bizonyossággal ismert. Viszont ez akkor is igaz, ha Alíz és Balázs mérése között nem telik el elég idő, hogy egy legfeljebb fénysebességgel terjedő jel átérhessen:

$$c\,|t_A - t_B| < |\boldsymbol{x}_A - \boldsymbol{x}_B|, \qquad (6)$$

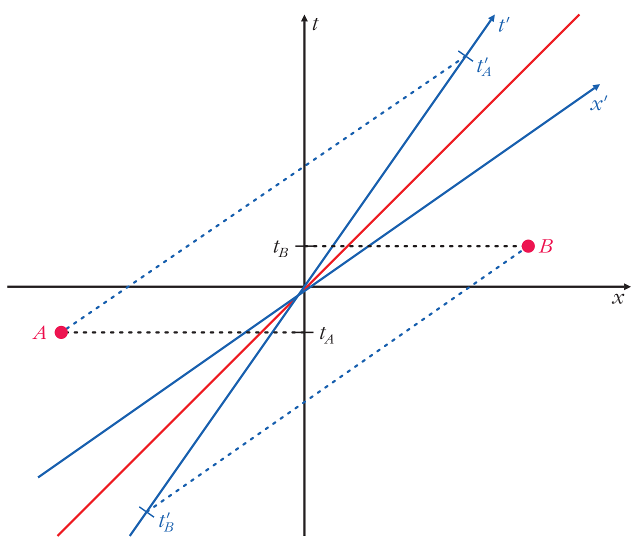
ahol t_A és t_B a két mérés időpontja, $\boldsymbol{x}_A$ és $\boldsymbol{x}_B$ pedig azok helye. Ezt térszerű szeparációnak hívják, amely vonatkoztatási rendszertől függetlenül fennáll, mert a

$$c^2(t_A - t_B)^2 - (\boldsymbol{x}_A - \boldsymbol{x}_B)^2$$

kifejezés Lorentz-invariáns. Ugyanakkor, ha a két mérés térszerűen szeparált, és egy *K* vonatkoztatási rendszerben Alíz mér előbb, azaz $t_A < t_B$, akkor mindig létezik olyan *K′* vonatkoztatási rendszer, amiben Balázs mér előbb, azaz $t'_A > t'_B$ (*2. ábra*). Tehát két térszerűen szeparált esemény időbeli sorrendje nem meghatározott, és így nem állhatnak oksági (kauzális) kapcsolatban. Alíz mérése ennek ellenére látszólag mégis determinálja Balázs mérésének kimenetelét, amire Einstein „kísérteties távolhatásként” hivatkozott.

Ezt a paradoxont a szerzők azzal próbálták feloldani, hogy a valóság azon eleme, amely Balázs mérésének kimenetelét meghatározza, már Alíz mérése előtt létezett, ez pedig a következő klasszikus analógiával szemléltethető. Képzeljünk el egy két kártyából álló

2. ábra. Két térszerűen szeparált esemény időbeli sorrendje függ a vonatkoztatási rendszertől. Az ábrán a *K* rendszer tengelyeit *t* és *x*, a *K′* rendszer tengelyeit *t′* és *x′* jelöli. Az átlós vörös vonal a fénysebességet jelöli: az ábra egységeiben $c = 1$, azaz a fény világvonala minden koordináta-rendszerben az idő és a hely tengelyek közti szög felezője. Jól látható, hogy Alíz mérése (*A* esemény) a *K* koordináta-rendszerben megelőzi Balázs mérését (*B* esemény), azaz $t_A < t_B$, míg a *K′* rendszerben a helyzet fordított: $t'_A > t'_B$



paklit, amelyben van egy piros ($|\uparrow_z\rangle$) és egy kék kártya ($|\downarrow_z\rangle$), és amelyből Alíz és Balázs véletlenszerűen húz egyet (párkeltés). Ha Alíz kártyáját kéknek találja, akkor Balázsé mindig piros és fordítva, valamint mindkettőjük számára mindkét kimenetel valószínűsége ugyanúgy 1/2. Ez azt jelenti, hogy az eredeti paradoxon egyszerűen magyarázható egy klasszikus korrelációval, miszerint a két kimenetel (piros/kék, avagy spin fel/le) már a részecskék kibocsátásának pillanatában eldőlt, és a korrelációt a részecskék közös eredete magyarázza, azaz hogy olyan állapotban keletkeztek, amelyben a két spin ellentétes (akár a kártyalapok színei) – ezt hívjuk a korreláció közös ok alapú magyarázatának.

EPR konklúziója szerint viszont ebben az esetben a kvantumelmélet nem adja a valóság teljes leírását, hiszen léteznek a valóságnak olyan elemei, amelyeket a kvantumelméleti leírás nem tartalmaz. A valóság ilyen elemeit hívjuk rejtett változóknak: ezek olyan feltételezett mennyiségek, amelyeknek a valóságban határozott értéke van és meghatározzák a mérések kimenetelét. A kvantumelméleti leírás azonban nem tartalmazza a rejtett változókat, és ezért csak valószínűségi jóslatokat tud tenni.

A Bell-egyenlőtlenség

Bár a fenti megoldás elfogadhatóan hangzik, mintegy 30 évvel az EPR-paradoxon megfogalmazása után Bell egy olyan egyenlőtlenséget vezetett le, amelynek a valós világban tapasztalt sérülése (bizonyos feltételekkel, lásd a később tárgyalt „kiskapuk” kérdését) kizárja ezt az értelmezést [3]. A lényeges észrevétel, hogy bár Alíz és Balázs egy adott részecskepár esetén csak egy-egy irányban tudja a spint mérni, a kísérlet ismétlése során ezeket akár véletlenszerűen is lehet változtatni. A mérési eredményekből adódó statisztikában pedig tetten lehet érni a kvantumelmélet klasszikustól eltérő viselkedését.

Ha egy, az eredeti z iránnyal φ szöget bezáró z' tengely irányában mérjük a spint, akkor azok az állapotok, amelyeknek erre határozott vetülete van, a

$$|\uparrow_{z'}\rangle = \cos\frac{\varphi}{2}\,|\uparrow_z\rangle + \sin\frac{\varphi}{2}\,|\downarrow_z\rangle, \qquad |\downarrow_{z'}\rangle = -\sin\frac{\varphi}{2}\,|\uparrow_z\rangle + \cos\frac{\varphi}{2}\,|\downarrow_z\rangle \tag{7}$$

alakot öltik.[2] Ha a spin állapota

$$|\Psi\rangle = \alpha|\uparrow_z\rangle + \beta|\downarrow_z\rangle, \tag{8}$$

akkor (7) alapján

$$|\Psi\rangle = \left(\alpha\cos\frac{\varphi}{2} + \beta\sin\frac{\varphi}{2}\right)|\uparrow_{z'}\rangle + \left(-\alpha\sin\frac{\varphi}{2} + \beta\cos\frac{\varphi}{2}\right)|\downarrow_{z'}\rangle \tag{9}$$

és a z' irányába végzett spinmérések eredményei

$$P(s_{z'} = +\hbar/2) = \left|\alpha\cos\frac{\varphi}{2} + \beta\sin\frac{\varphi}{2}\right|^2, \qquad P(s_{z'} = -\hbar/2) = \left|\alpha\sin\frac{\varphi}{2} - \beta\cos\frac{\varphi}{2}\right|^2. \tag{10}$$

Ez azt jelenti, hogy amennyiben a részecske a z irányba meghatározott vetülettel rendelkezik (mondjuk $|\uparrow_z\rangle$ állapotban van, azaz $\alpha = 1$ és $\beta = 0$), akkor a z' irányú vetület nem meghatározott, ami a Heisenberg-féle határozatlansági reláció spinekre érvényes általánosítását jelenti. Ha például a z és z' irány merőleges egymásra ($\varphi = \pi/2$), akkor a $|\uparrow_z\rangle$ állapotban a spin z' irányú vetülete maximálisan határozatlan: mindkét vetület valószínűsége 1/2.

A szinglett állapot érdekessége, hogy tetszőlegesen választott másik irányra felírva is ugyanazt az alakot ölti:

$$|\Psi_{EPR}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow_{z'}\rangle_1|\downarrow_{z'}\rangle_2 - |\downarrow_{z'}\rangle_1|\uparrow_{z'}\rangle_2\right), \tag{11}$$

ami (9) alapján egyszerű számítással igazolható. Tehát a mérés irányától függetlenül mindig ugyanazokat a valószínűségeket, valamint teljes (anti)korrelációt kapunk akkor is, ha a mérések irányát Alíz és Balázs már a részecskék kibocsátása után választja meg. Ehhez az kell, hogy minden szóba jöhető irányú vetületnél már a párkeltéskor eldőljön, mi lesz a később végzett mérések eredménye. Azonban egy adott párnál Alíz és Balázs csak egy-egy mérést tud elvégezni, így ezt nem tudják részleteiben ellenőrizni. Bell megoldása az, hogy a kísérletet sokszor elvégezve, Alíz és Balázs eredményeinek korrelációjára fogalmazunk meg olyan feltételt, ami mindig teljesül, ha léteznek a mérések kimenetelét előre meghatározó klasszikus rejtett változók. A következőkben Bell tételét *Jun John Sakurai* megfogalmazását követve prezentáljuk [4].

Ha Alíz az egyik spint z, míg Balázs a másikat z' irányban méri meg, az (5) EPR-állapot a (9) összefüggés alapján a következő alakra hozható:

$$\begin{aligned}|\Psi_{EPR}\rangle = {} & \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\varphi}{2}\,|\uparrow_z\rangle_1|\downarrow_{z'}\rangle_2 + \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\varphi}{2}\,|\downarrow_z\rangle_1|\downarrow_{z'}\rangle_2 + \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\varphi}{2}\,|\uparrow_z\rangle_1|\uparrow_{z'}\rangle_2 - \\ & - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\varphi}{2}\,|\downarrow_z\rangle_1|\uparrow_{z'}\rangle_2,\end{aligned} \tag{12}$$

[2] A fenti formulákat a forgatások spineken vett ábrázolását felhasználva kapjuk. Általános esetben a (7) összefüggésben megjelennek még komplex fázisfaktorok, amelyek attól függnek, hogy a z' tengely vetülete az xy síkra nézve milyen irányú. Az idézett összefüggés annak felel meg, amikor ez a vetület az x tengely irányába mutat. A fizikai valószínűségekre kapott eredmények azonban ettől függetlenek, így ezeket a fázisokat elhagyjuk.

amiből a négy lehetséges kimenetel valószínűségére

$$P\left(s_z = \pm\hbar/2,\ s_{z'} = \mp\hbar/2\right) = \frac{1}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2},$$
$$P\left(s_z = \pm\hbar/2,\ s_{z'} = \pm\hbar/2\right) = \frac{1}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2} \tag{13}$$

adódik.

Tegyük fel, hogy Alíz és Balázs egyaránt három lehetséges irányban – *a, b* és *c* – tud spint mérni, és jelölje +/– azt, ha az adott spint a mért iránnyal párhuzamosnak/ellentétesnek találják. A rejtett változók ezekhez tartozó beállításait az *1. táblázat* foglalja össze. Ha Alíz a spint *a,* míg Balázs *b* irányban méri, akkor annak valószínűsége, hogy mindketten a saját irányukra pozitív vetületet mérnek, a

$$P(a+,\, b+) = p_3 + p_4 \tag{14}$$

értéket veszi fel. Hasonlóképpen adódik, hogy

$$P(a+,\, c+) = p_2 + p_4,$$
$$P(c+,\, b+) = p_3 + p_7. \tag{15}$$

Mivel a valószínűségek nemnegatívak, ezért mindenképpen teljesül a Bell-egyenlőtlenség:

$$P(a+,\, b+) \le P(a+,\, c+) + P(c+,\, b+). \tag{16}$$

A kvantumelméleti valószínűségek (13) alapján

$$P(a+,\, b+) = \frac{1}{2}\sin^2\frac{\varphi_{ab}}{2},$$
$$P(a+,\, c+) = \frac{1}{2}\sin^2\frac{\varphi_{ac}}{2}, \tag{17}$$
$$P(c+,\, b+) = \frac{1}{2}\sin^2\frac{\varphi_{bc}}{2},$$

ahol φ_{ij} az *i* és *j* irány közti szöget jelöli. Válasszuk meg ezeket úgy, hogy $\varphi_{ab} = 2\pi/3$, míg $\varphi_{ac} = \varphi_{bc} = \pi/3$ legyen (*3. ábra*), ekkor a (16) egyenlőtlenség az

$$\frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{3} = \frac{3}{8} \le \frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{6} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$$

alakot ölti, ami nyilvánvalóan nem teljesül!

A fenti gondolatkísérletet (feles spinű részecskék helyett fotonokkal[3]) *Stuart Freedman* és *John Clauser* laboratóriumi körülmények között is megvalósították [5]: eredményeik szerint a valóságban mért valószínűségek is sértik a (16) Bell-egyenlőtlenséget. Ez a kvantumelmélet érvényességétől függetlenül igazolja, hogy a kísérletben látott korrelációkat nem lehet a spinek vetületét a mérés előtt meghatározó rejtett klasszikus valószínűségi változókkal magyarázni.

1. táblázat

Az EPR-kísérlet hipotetikus rejtett változós reprezentációja három irány esetén

Alíz			Balázs			valószínűség
a	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	
+	+	+	–	–	–	p_1
+	+	–	–	–	+	p_2
+	–	+	–	+	–	p_3
+	–	–	–	+	+	p_4
–	+	+	+	–	–	p_5
–	+	–	+	–	+	p_6
–	–	+	+	+	–	p_7
–	–	–	+	+	+	p_8

A p_1, …, p_8 azok a valószínűségek, amelyekkel a rejtett változók adott kísérleti kimenetelekre vezető konfigurációi a valóságban előfordulnak.

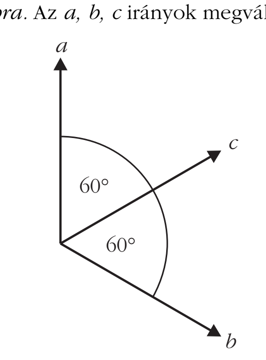
Az EPR-kísérlet fentebb ismertetett változatában több kiskapu (angolul „loophole”) van, ami megengedi olyan rejtett változókat, amelyek a mért korrelációkat reprodukálják, amennyiben ezek nem kizárólag a spinek vetületét határozzák meg. Például lehetséges, hogy a rejtett változó az Alíz és Balázs által választott mérési beállításoktól függően „dönti el” a spinek vetületét. Bell ezért azt javasolta, hogy a mérések irányait akkor döntsék el, amikor a részecskék már „úton vannak”, amit *Alain Aspect* és munkatársai meg is valósítottak [6]. A két legfontosabb fennmaradó kiskapu:

1. Kommunikációs kiskapu: ha a mérési beállítások kiválasztása, illetve maguk a mérési események egymástól nem térszerűen szeparáltak, akkor a mért statisztikát befolyásoló jel terjedhet közöttük.

2. Detektálási kiskapu: a detektálás hatásfoka soha nem tökéletes, ezért lehet, hogy a detektált párok az összes kibocsátott párra nézve egy torzított, nem reprezentatív mintát képviselnek.

A fenti két kiskapu bezárása hosszas kísérleti erőfeszítések után sikerült [7], és az EPR-kísérletek fokozatos finomodásával a rejtett változós alternatívák egyre kevésbé plauzibilisek. Egy fennmaradt lehetőség, hogy az egész kísérleti folyamat közös kauzális múltjában vannak olyan változók, amelyek a kísérlet teljes

3. ábra. Az *a, b, c* irányok megválasztása.



[3] Fotonok esetén a spin megfelelője a foton lineáris polarizációja, és a valószínűségekre vonatkozó (16) formulák megfelelőiben $\varphi/2$ helyett φ áll (*Malus* törvénye).

lefolyását a mérési beállítások kiválasztásával és a mérések kimeneteleivel egyetemben meghatározzák. Egy nemrég végrehajtott kísérletben a mérési beállításokat távoli kvazárok fényével vezérelték [8], amivel ki lehetett zárni, hogy az elmúlt 7,8 milliárd éven belül lehetne a mérésválasztásokat és -kimeneteleket együtt befolyásoló rejtett változó. Ez azonban nem jelenti azt, hogy az ilyen rejtett változók egyszer s mindenkorra kizárhatók. Egy példa erre az úgynevezett szuperdeterminizmus [9], ami szerint a megfigyelhető Világegyetem története, benne az összes kísérlet kimenetelével egyben determinált. A rejtett változók ekkor lehetnek egy olyan téridőtartományban lokalizáltak, ami az összes esemény kauzális múltjában benne van: a kozmológiai Ősrobbanás például erre tökéletesen megfelel. A szuperdeterminizmus azonban nem cáfolható, s így nem tekinthető tudományos elméletnek, sőt feltételezésével a tudományos megismerés alapjait kérdőjeleznénk meg[4] [10].

Van-e kvantumtávolhatás?

Az EPR-kísérlet minden eddigi konkrét megvalósításában a mért statisztikák nemcsak megsértik a (16) Bell-egyenlőtlenséget, de a kísérleti hibáktól eltekintve mindig tökéletesen egyeznek a kvantumelmélet jóslataival. A kísérleti fizika rohamos fejlődése révén ma már közvetlenül tudunk kvantumállapotokat manipulálni és dinamikájukat kísérletileg megbízhatóan követni, akár nagy részecskeszámú, makroszkopikusnak tekinthető rendszerekben is, és ilyenekben már EPR–Bell-típusú korrelációkat is sikerült megfigyelni [11]. Komolyan felmerül tehát, hogy a problémát a kvantumelmélet keretei között tárgyaljuk, hiszen annak nemteljességére vagy érvényességének korlátozottságára semmilyen tapasztalat nem utal.

Ennek elemzéséhez érdemes átfogalmazni a kvantumelméleti valószínűségeket. A két spin állapotterét négy állapot feszíti ki (négydimenziós Hilbert-tér): a $|\uparrow_z\rangle_1|\uparrow_z\rangle_2$, $|\uparrow_z\rangle_1|\downarrow_z\rangle_2$, $|\downarrow_z\rangle_1|\uparrow_z\rangle_2$ és $|\downarrow_z\rangle_1|\downarrow_z\rangle_2$ állapotok alkotta bázison az (5) állapotnak a

$$|\Psi_{EPR}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{18}$$

vektor felel meg. E formalizmusban azon eseménynek, hogy valamelyik részecske spinjét valamilyen irányban $\pm 1/2$ vetületűnek mérjük, az ezzel a tulajdonsággal rendelkező állapotvektorok alterére vetítő projektor felel meg, amelyek alakja

$$P_1(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\varphi}{2} & 0 & \frac{1}{2}\sin\varphi & 0 \\ 0 & \cos^2\frac{\varphi}{2} & 0 & \frac{1}{2}\sin\varphi \\ \frac{1}{2}\sin\varphi & 0 & \sin^2\frac{\varphi}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sin\varphi & 0 & \sin^2\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix},$$
$$P_2(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\varphi}{2} & \frac{1}{2}\sin\varphi & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\sin\varphi & \sin^2\frac{\varphi}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos^2\frac{\varphi}{2} & \frac{1}{2}\sin\varphi \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\sin\varphi & \sin^2\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

ahol az 1, 2 a két részecskét indexeli, φ pedig a mérés irányának z tengellyel bezárt szöge (az adott iránnyal ellentétes spinvetületnek a $P_{1,2}(\pi-\varphi)$ projektorok felelnek meg). Annak valószínűsége például, hogy Alíz z, Balázs pedig egy ezzel φ szöget bezáró z' irányba állónak mérje a megfelelő spint, a következőképpen számolható:

$$\langle\Psi_{EPR}|P_2(\varphi)\,P_1(0)|\Psi_{EPR}\rangle =$$
$$= \frac{1}{2}(0,1,-1,0)\,P_2(\varphi)\,P_1(0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2}, \tag{20}$$

ami megfelel a (13) alatti eredménynek; hasonló számolással az összes valószínűség reprodukálható.

A távolhatáshoz vezető szokásos érvelés úgy hangzik, hogy miután Alíz megmérte az egyik spint, a másik spin állapota a Balázs számára most már egyértelműen meghatározott kimenetnek megfelelően redukálódott. Ezt az úgynevezett „hullámfüggvény redukciót” (20)-ban matematikailag a $P_1(0)$ projektor alkalmazása reprezentálja. Az így feltételezett redukció a térbeli pozíciótól függetlenül „egyidejűleg”[5] megtörténik, így amikor Alíz eredményt kapott, ezzel Balázs mérésének kimenetele is eldőlt. Azonban amennyiben a két mérés térszerűen szeparált, van olyan vonatkoztatási rendszer, amelyben Balázs mérése zajlik előbb, és a $P_2(\varphi)$ projektor alkalmazása vezet az állapotredukcióhoz. Látszólag

[4] Itt közbevethető a kérdés, hogy milyen alapon bízhatunk a tudományos megismerés módszertani alapjaiban? A válasz erre a tudomány és technika fejlődésének most már évszázadokra visszanyúló történetében rejlik. Ismereteink bővülésével nemcsak magyarázni tudjuk a jelenségeket, hanem megbízhatóan fel is tudjuk használni számos és változatos technológiai alkalmazásban.

[5] Az egyidejűség eleve problémás, mert a relativitáselmélet szerint ilyen nem létezik vonatkoztatási rendszertől független módon.

tehát – Einstein szavaival élve – itt egy „kísérteties távolhatással” van dolgunk.

Az érvelésben az a hiba, hogy e „hullámfüggvény-redukció” megtörténtét semmilyen fizikai észlelés nem támasztja alá, és a kísérlet értelmezéséhez teljes mértékben szükségtelen. Vegyük észre, hogy a két méréshez tartozó projektor felcserél egymással

$$P_2(\varphi)\, P_1(0) \;=\; P_1(0)\, P_2(\varphi), \tag{21}$$

azaz a két mérés időbeli sorrendje teljesen lényegtelen! Amennyiben a kvantumelmélet a valóság (legalábbis a kísérlet tekintetében releváns részének) teljes leírását adja, akkor ez azt jelenti, hogy a „hullámfüggvény-redukcióhoz” a valóságban semmi sem tartozik. A jól hangzó történet, amit a távolhatás indoklásához előadtunk, semmilyen fizikai realitásnak sem felel meg.

Sőt, a helyzet ennél még jobban behatárolt: a fundamentális kölcsönhatásokat mai tudásunk szerint leíró Standard Modell[6] egy relativisztikus kvantumtérelmélet, és ezért központi elve éppen az úgynevezett lokalitás: a térszerűen szeparált tartományokhoz tartozó megfigyelhető mennyiségek operátorai felcserélnek egymással. Ezért bármilyen korrelációk is állnak fenn közöttük, ezek nem vezetnek semmilyen távolhatáshoz, vagyis fénynél gyorsabban jelet továbbítani lehetetlen.

A kvantumos korrelációk jellege

Az EPR–Bell-kísérlet középpontjában egyedi megfigyelések eredményei közötti korrelációk állnak, ezért érdemes megvizsgálni a kvantumelméleti korrelációk tulajdonságait, mégpedig a klasszikus esettel összevetve.

Egy feles spin egy kétállapotú rendszer (q-bit), az EPR-pár pedig a spineket tekintve egy két q-bitből álló rendszer. Gondoljuk végig először spinek, azaz q-bitek helyett klasszikus bitekkel az EPR–Bell-kísérletet (ezek *Az EPR-paradoxon* fejezet piros/kék kártyái). Ha egy forrásból összesen N különböző „üzenet” érkezhet, és ezek valószínűségei $p_1, \ldots, p_N$, akkor a forrás információtartalmát a Shannon-féle entrópia adja meg [12]

$$S \;=\; -\sum_{i=1}^{N} p_i \ln p_i. \tag{22}$$

Egy teljességgel határozatlan állapotú n bites rendszer esetén a lehetséges állapotok („üzenetek”) száma $N = 2^n$ és valószínűségük $p_i = 1/N$, azaz a rendszer információtartalma

$$S = N \ln 2. \tag{23}$$

Ahogy ez várható is, ez arányos a bitek számával: egy bit pontosan ln2 mennyiségű információnak felel meg.[7]

Alíz és Balázs egyaránt egy-egy bitet kapnak: ezek információtartalma $S_A = S_B = \ln 2$. Ugyanakkor a teljes rendszernek is két azonos valószínűségű állapota van (aszerint, hogy Alíznak és Balázsnak melyik kártya jutott), tehát ennek információtartalma is $S_{AB} = \ln 2$, ami kisebb, mint $S_A + S_B$. Tehát a két részrendszerben tárolt információ egy része redundáns, a különbözetet kölcsönös információtartalomnak hívják:

$$I_{AB} = S_A + S_B - S_{AB} = \ln 2. \tag{24}$$

Ez pontosan egy bitnyi információ, ami világos, hiszen az egyik bit állapota teljesen meghatározza a másikét. Klasszikus esetben az a tétel is igaz, hogy a kölcsönös információ nem lehet nagyobb, mint a részrendszerek entrópiája közül a kisebb:

$$I_{AB} \;\le\; \min\left(S_A,\, S_B\right), \tag{25}$$

ami szemléletesen is érthető, hiszen semelyik részrendszer nem tud a másikról a saját kapacitásánál nagyobb információt tárolni.

A kvantumelméletben a Shannon-féle entrópia megfelelőjét *Neumann János* vezette be [13], és az úgynevezett sűrűségmátrix segítségével lehet megfogalmazni. Egy tiszta állapot sűrűségmátrixa az adott állapotvektorra vetítő projektor, így például a (18) állapotra

$$\rho_{EPR} \;=\; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Ebből a kvantumelméleti valószínűségek nyomképzéssel származtathatók, például a (20) alatti eredmény átírása

$$\langle \Psi_{EPR} | P_2(\varphi)\, P_1(0) | \Psi_{EPR} \rangle \;=\; \mathrm{Tr}\, \rho_{EPR}\, P_2(\varphi)\, P_1(0). \tag{27}$$

A két részrendszer ugyanakkor úgynevezett kevert állapotban van. Az 1-es részecskespin azonos valószínűséggel lehet mindkét állapotában, azaz

$$\rho_1 \;=\; \frac{1}{2} P_\uparrow + \frac{1}{2} P_\downarrow \;=\; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{28}$$

[6] A Standard Modell jóslatait az összes eddig elvégzett kísérlet fényesen igazolta. Ugyan a kozmológiában feltételezett sötét anyag és sötét energia túlmutat keretein, ezek léte nem vonja maga utána a lokalitás elvének sértését, sőt a javasolt modellek éppenhogy feltételezik azt. Ezen túlmenően a speciális relativitáselméletnek, valamint a relativisztikus kvantumtérelmélet alapvető elveinek léteznek konkrét modelltől független kísérleti ellenőrzései is, amelyek igen nagy pontossággal kizárják ezek sérülését.

[7] Ahhoz, hogy az információ egysége a szokásos bit legyen, a természetes alapú logaritmust elegendő kettes alapúra cserélni, ami annak felel meg, hogy S-t elosztjuk ln2-vel.

a $|\uparrow_z\rangle_1$, $|\downarrow_z\rangle_1$ bázison. Itt

$$P_\uparrow = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ és } P_\downarrow = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a két spinvetületnek megfelelő altérre vett projektorok az 1-es spin állapotterében. A 2-es részecske spinjének sűrűségmátrixa hasonlóan írható fel a $|\uparrow_z\rangle_2$, $|\downarrow_z\rangle_2$ bázison.

Neumann entrópiadefiníciója

$$S[\rho] = -\mathrm{Tr}\,\rho \ln\rho = -\sum_{i:\,\lambda_i \neq 0} \lambda_i \ln\lambda_i, \qquad (29)$$

ahol λ_i a ρ sűrűségoperátor sajátértékeit jelöli;[8] ebből

$$S[\rho_{EPR}] = 0 \text{ és } S[\rho_1] = S[\rho_2] = \ln 2 \qquad (30)$$

adódik. Az EPR-állapot teljes entrópiája zérus, hiszen a rendszer tiszta állapotban van, azaz hullámfüggvénye egyértelműen meghatározott. Az egyes spineknek pedig két független kvantumállapota van (azaz q-bitek), és az adott szituációban ezek egyforma valószínűséggel fordulhatnak elő. Meglepő módon az EPR-állapotban a kölcsönös információ

$$I_{AB} = S[\rho_1] + S[\rho_2] - S[\rho_{EPR}] = 2\ln 2 \qquad (31)$$

kétszer akkora, mint a klasszikus (24) eredmény, és kétszerese a klasszikusan elérhető (25) maximumnak is!

Hogyan lehetséges ez? A dolog nyitja abban rejlik, hogy egy kvantumállapot nem csak a konkrét kísérletekben mért egyedi kimenetelek valószínűségeit „tárolja”. Újra ránézve az (5) EPR szinglett állapotra:

$$|\Psi_{EPR}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow_z\rangle_1|\downarrow_z\rangle_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow_z\rangle_1|\uparrow_z\rangle_2, \qquad (32)$$

szembeötlik, hogy a z tengely irányába végzett mérések két lehetséges kimenetelének valószínűségén túl a két tag relatív fázisát is tartalmazza, ami ez esetben -1. Ezért tartja meg alakját tetszőleges z' tengelyre nézve is (lásd (11)), és ezért kódol több információt, mint ami két klasszikus bitben lehetséges.

Vegyük észre továbbá, hogy a Bell-egyenlőtlenség sérülésében semmilyen közvetlen szerepet nem játszik a két részrendszer kauzálisan szeparált volta. A spinek szinglett állapota a párkeltéskor létrejön, így az egyenlőtlenséget sértő kvantumos korrelációk már ekkor fennállnak. Ezután a rendszer a mérésig időben nem fejlődik tovább, leszámítva a részecskék távolodását a kibocsátás helyétől, ami nem befolyásolja a spinek szinglett állapotát. Alíz és Balázs mérése történhet ugyan térszerűen szeparáltan, vagyis a közvetlen kauzális kapcsolat kizárásával, viszont az eredmények tapasztalt korrelációja *Az EPR-paradoxon* fejezet végi piros/kék kártyás klasszikus esethez hasonlóan egy közös okra vezethető vissza:

1. a kártyák esetében arra, hogy az eredeti pakli pontosan egy piros és egy kék kártyát tartalmazott;
2. az EPR–Bell-szituációban ahhoz, hogy a két kibocsátott részecske szinglett állapotban keletkezett.

Tehát az EPR–Bell-kísérletben nem valamiféle „kísérteties távolhatásról” van szó, hanem arról, hogy a kvantumrendszerek erősebb korrelációt tudnak hordozni, mint klasszikus megfelelőik. Ezen extra korrelációk jelenléte megfelelően tervezett, ismételten végrehajtott kísérletek esetén (mint amilyen az EPR–Bell-kísérlet) az eredmények statisztikájából kimutatható.

Zárszó

„There’s Nature and she’s going to come out the way She is. So therefore when we go to investigate we shouldn’t pre decide what it is we’re looking for only to find out more about it.”[9]

A fenti idézetben *Richard Feynman* arra int, hogy nem várhatjuk el a természettől, miként viselkedjen. Hétköznapi életünkben nagyjából milliméterestől a kilométeres skáláig terjedő méretű objektumokkal találkozunk, így a mikroszkopikus világ leírásához elengedhetetlen kvantumelmélet, és a téridő nagy léptékű viselkedését leíró általános relativitáselmélet egyaránt meghökkentő lehet számunkra. A kvantumelmélet úttörői az új fizikát először csak a mikrovilágra tekintették érvényesnek, és az eredményeket egy előzetesen felvett klasszikus fizikai háttéren értelmezték. Az EPR-paradoxon jól illusztrálja, hogy amennyiben a kvantumvilágra a klasszikus fizikából származó kimondott vagy rejtett előfeltevéseinkkel („előítéletekkel”) tekintünk, akkor a kép nem áll össze: ellentmondani látszik a „józan észnek”.

A kvantumelmélet a jelenségek széles körét leírja, arra pedig semmilyen tapasztalati tény nem mutat, hogy alapfeltevései bármilyen módon sérülnének. Az elmúlt évszázad technológiai újításainak jelentős része a kvantumelméleten alapszik, a jelenkori kvantumtechnológiai forradalom már megvalósult vívmányai közül a kvantumtitkosítás és -kommunikáció pedig éppen az EPR-paradoxon alapját képező kvantumos korrelációkat hasznosítja.

A kvantumelmélet megalkotása óta eltelt időben felhalmozódott tapasztalat azt mutatja, hogy az előremutató kérdésfeltevés nem a kvantumjelenségek klasszikus fizikai fogalmi keretben történő értelmezésének erőltetése, hanem hogy miként létezhetnek (legalábbis jó közelítéssel) klasszikus módon viselkedő objektumok a kvantumvilágban. Hely hiányában itt csak utalhatunk rá, hogy a kvantum-klasszikus átmenet leírható a dekoherencia néven ismert, kísérletileg is jól alátámasztott kvantumelméleti mechanizmussal [14].

[8] A λ_i sajátértékek 0 és 1 közötti valós számok, összegük 1 ($\mathrm{Tr}\rho = 1$), és ρ *i*-edik sajátállapota betöltési valószínűségeként értelmezhetők.

[9] „A természet a saját törvényeit követi. Tehát amikor vizsgáljuk, nem dönthetjük el előre, mit keresünk, csak azt hogy minél többet tudjunk meg róla.” (R. P. Feynman: Doubt and Uncertainty. In: *The Pleasure of Finding Things Out*. Perseus Books, Cambridge, Massachusetts, 1999.)

A speciális relativitás elmélete kísérletileg ugyancsak alaposan és nagy pontossággal igazolt, valamint létfontosságú technológiák (például GPS) működése múlik rajta. A speciális relativitáselméletet és a kvantumelméletet egyesítő kvantumtérelmélet pedig átfogó módon leírja az elemi részecskék és a fundamentális kölcsönhatások működését; ezen elméleti keret legfontosabb alapelve pedig éppen a lokalitás.

A fentiek fényében az EPR-paradoxon kapcsán nemlokalitásról vagy távolhatásról beszélni félrevezető és megalapozatlan, és – mint láttuk – az ezt taglaló érvelés valójában csupán egy naiv „történet", ami nem köthető semmilyen módon a tapasztalati valósághoz. A kísérletben mérhető korrelációk a párkeltés pillanatára vezethetők vissza, azaz közös ok alapján magyarázhatók. Ennek kapcsán érdemes felidézni az ismert figyelmeztetést, miszerint két esemény vagy mennyiség korrelációjából nem következik köztük semmiféle közvetlen ok-okozati kapcsolat.

A Bell-egyenlőtlenség sérülése pedig a kvantumos korrelációk klasszikustól eltérő jellegét tükrözi: egy kvantumrendszer komponensei között jóval erősebb korreláció lehetséges, mint a klasszikus esetben, ami tetten érhető többek között a klasszikus és a kvantumos kölcsönös információ eltérő viselkedésében.

Irodalom

1. A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen: Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete? *Phys. Rev. 47* (1935) 777–780.
2. D. Bohm, Y. Aharonov: Discussion of Experimental Proof for the Paradox of Einstein, Podolsky and Rosen. *Phys. Rev. 108* (1957) 1070–1076.
3. J. Bell: On the Einstein–Podolsky–Rosen paradox. *Physics 1* (1964) 195–200.
4. J. J. Sakurai: *Modern Quantum Mechanics.* Addison–Wesley, USA (1994) 223–232.
5. S. J. Freedman, J. F. Clauser: Experimental Test of Local Hidden-Variable Theories. *Phys. Rev. Lett. 28* (1972) 938–941.
6. A. Aspect, P. Grangier, G. Roger: Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's Theorem. *Phys. Rev. Lett. 47* (1983) 460–463.
7. W. Rosenfeld, D. Burchardt, R. Garthoff, K. Redeker, N. Ortegel, M. Rau, H. Weinfurter: Event-Ready Bell Test Using Entangled Atoms Simultaneously Closing Detection and Locality Loopholes. *Phys. Rev. Lett. 119* (2017) 010402.
8. D. Rauch, J. Handsteiner, A. Hochrainer, J. Gallicchio, A. S. Friedman, C. Leung, B. Liu, L. Bulla, S. Ecker, F. Steinlechner, R. Ursin, B. Hu, D. Leon, C. Benn, A. Ghedina, M. Cecconi, A. H. Guth, D. I. Kaiser, T. Scheidl, A. Zeilinger: Cosmic Bell Test using Random Measurement Settings from High-Redshift Quasars. *Phys. Rev. Lett. 121* (2018) 080403.
9. J. S. Bell: Free variables and local causality. *Epistemological Letters,* Feb. 1977. Újra kiadva, mint J. S. Bell: *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics.* Cambridge University Press (1987) 12. fejezet.
10. A. Zeilinger: *Dance of the Photons.* Farrar, Straus and Giroux, New York (2010) 546–547.
11. R. Schmied, J.-D. Bancal, B. Allard, M. Fadel, V. Scarani, P. Treutlein, N. Sangouard: Bell correlations in a Bose–Einstein condensate. *Science 352* (2016) 441–444.
12. C. E. Shannon: A Mathematical Theory of Communication. *Bell Syst. Tech. J. 27* (1948) 379–423.
13. Neumann J.: *A kvantummechanika matematikai alapjai.* Akadémiai Kiadó, Budapest (1980) V.2. fejezet.
14. W. H. Zurek: Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical. *Rev. Mod. Phys. 75* (2003) 715–775.

A HETEROGENITÁSOK HATÁSAI VILLAMOS HÁLÓZATI MODELLEKEN

Ódor Géza, Hartmann Bálint
MTA Energiatudományi Kutatóközpont

Előzmények

A villamos hálózatok nagy, komplex és heterogén rendszerek, amelyek energiatermelő és -fogyasztó csomópontokból épülnek fel. A villamos áramot váltóáramú vezetékrendszerrel osztják szét. Váratlan változások deszinkronizációs eseményeket okozhatnak, amelyek lavinaszerűen terjednek szét és különböző méretű áramkimaradásokat okoznak. Legrosszabb esetben a teljes rendszer hosszú idejű deszinkronizációja is bekövetkezhet. Ilyenek elkerülése végett a villamos hálózatokat úgy kell tervezni, hogy ellenállók legyenek a helyi instabilitásoknak és hibáknak. Tanulmányok igazolták, hogy az elméleti modellek, amelyek jól reprodukálják a villamos hálózatok topológiai és elektromos kölcsönhatásait, jó

Ódor Géza 1984-ben villamosmérnöki diplomát szerzett a BME-n. Azóta a KFKI területén levő, különböző nevűre átkeresztelt MTA kutatóintézetek kutatója. Fizikusi MSc-t 1993-ban Chicagóban, PhD-t 1996-ban az ELTE-n kapott. 2004 óta az MTA doktora. Kétszer egy évig CERN kutatói ösztöndíjas volt. Jelenleg az MTA–EK MFA tudományos tanácsadója, több nemzetközi projekt tagja. Fő kutatási területe a nemegyensúlyi rendszerek statisztikus fizikája a rendezetlen és univerzális viselkedések vizsgálata.

Hartmann Bálint villamosmérnöki diplomáját és PhD-fokozatát a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen szerezte 2008-ban és 2013-ban. A Villamos Energetika Tanszék docense. Az MTA Energiatudományi Kutatóközpontjának tudományos munkatársa. Kutatási területei az energiatárolás villamosenergia-rendszerben betöltött szerepe, az elosztó hálózatok számítógépes modellezése és szimulációja, illetve az időjárásfüggő megújuló energiaforrások rendszerintegrációja.