SZÁZ ÉVESEK NOETHER TÉTELEI

Tóth Gábor Zsolt
MTA Wigner Fizikai Kutatóközpont, RMI Elméleti Osztály

Idén ősszel száz éve, hogy megjelent *Emmy Noether Invariante Variationsprobleme* című, a modern fizika szempontjából alapvető fontosságúnak bizonyult cikke [1] a variációs problémák szimmetriái és megmaradó áramai közötti összefüggésekről. Ezen alkalomból idézzük fel az ebben leírt főbb eredményeket, kitérve létrejöttük körülményeire és későbbi hatásukra is.

Noether cikkében két tétel és néhány további eredmény található, amelyek közül az első tétel a legismertebb, de a százéves évforduló alkalmából a második tételt is érdemes áttekinteni. A tételek teljes általánosságban való precíz megfogalmazására nem törekszünk, mert az terjedelmesebb előkészítést igényelne.

A Noether-tételek létrejöttének előzményei

Amalie Emmy Noether 1882-ben született a bajorországi Erlangenben. Apja, *Max Noether,* matematikus volt, az Erlangeni Egyetemen tanított. Emmy Noether is az Erlangeni Egyetemen tanult matematikát, és egy félévet Göttingenben is eltöltött, ahol *Karl Schwarzschild, Hermann Minkowski, Otto Blumenthal, Felix Klein* és *David Hilbert* előadásait hallgatta. Doktori dolgozatát algebrai invariánsokról – Erlangenben *Paul Gordan* vezetésével, akinek az invariánselmélet volt a fő szakterülete – írta. A doktori fokozatot 1907-ben szerezte meg, ezután 1915-ig az Erlangeni Egyetemen tanított és végzett kutatásokat. 1915-ben Klein és Hilbert hívta meg Göttingenbe abból a célból, hogy segítségükre legyen az általános relativitáselmélet bizonyos következményeinek felderítésében. Hilbert és Klein ekkoriban szoros kapcsolatban állt *Einsteinnel,* aki 1915 nyarán Hilbert meghívására előadás-sorozatot is tartott a göttingeni matematikusoknak az éppen kialakulóban lévő általános relativitáselméletről. Einstein a róla elnevezett gravitációs egyenleteket 1915 vége felé hozta nyilvánosságra, és Hilbert is ugyanekkor vezette le ezen egyenleteket a később kettejükről elnevezett hatásból. Az általános relativitáselmélet felfedezésekor azonnal felvetődött a kérdés, hogy az elmélet keretei között miként kell értelmezni az energia és az impulzus fogalmát, valamint ezek megmaradását. E problémával intenzíven foglalkozott – többek között – Einstein, Hilbert és Klein, Noethert is ennek kapcsán hívták Göttingenbe. Einstein és Hilbert látszólag eltérő energia- és impulzusmegmaradási törvényekre jutott, így az volt az egyik kérdés, hogy ezek milyen viszonyban vannak egymással. Hilbert azt is megállapította, hogy az általános relativitáselméletben az energia- és impulzusmegmaradási törvények más jellegűek, mint a klasszikus mechanikában és a speciális relativitáselméletben, de ezen eltérés pontos matematikai oka még tisztázásra várt.

Amalie Emmy Noether (1882. március 23. – 1935. április 14.), „a legkreatívabb matematikai zseni, amióta a nők számára is megnyíltak az egyetemek kapui”. (Albert Einstein)

Tóth Gábor Zsolt 2002-ben végzett az ELTE fizikus szakán részecskefizika szakirányon, majd 2007-ben PhD fokozatot szerzett. 2007-től 2009-ig posztdoktori ösztöndíjas volt a trieszti SISSA intézetben. Jelenleg az MTA Wigner Fizikai Kutatóközpont tudományos munkatársa. Eddigi főbb kutatási területei: 1+1 dimenziós kvantumtérelméleti modellek; terek dinamikája fekete lyukak környezetében.

Az első tétel

Noether a Hilbert és Klein által felvetett problémákkal kapcsolatban elért eredményeit 1918-ban publikálta a *Göttinger Nachrichten* című[1] folyóiratban az *Invariante Variationsprobleme* (*Invariáns variációs prob-*

[1] A folyóirat teljes címe *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* volt.

lémák) című, német nyelvű cikkében. Közzététele előtt előadásban kellett bemutatni a dolgozatot a Göttingeni Tudományos Társaságban, amelynek Noether – habilitáció híján – nem lehetett tagja. Az előadást Klein tartotta meg. A cikkben megfogalmazott két fő tétel közül az első, amelyet ma Noether-tételnek vagy Noether első tételének nevezünk, a variációs problémák folytonos szimmetriái és megmaradó áramai közötti kapcsolatról szól.

Variációs probléma alatt a következőt értjük: tekintsük az

$$S = \int \mathrm{d}^D x\, L\Big(x^\mu,\, \boldsymbol{\Phi}_i(x^\mu),\, \partial_\nu \boldsymbol{\Phi}_i(x^\mu),\, \partial_{\nu\lambda} \boldsymbol{\Phi}_i(x^\mu),\, \ldots\Big) \quad (1)$$

integrált, amelyben D az x^μ független változók száma, $\mu = 0, 1, \ldots, D-1$; $\boldsymbol{\Phi}_i$, $i = 1, 2, \ldots$ jelöli a függő változókat, és L a Lagrange-sűrűségfüggvény. A mechanikában és a térelméletben x^0 általában az időkoordináta, S-t pedig hatásnak nevezzük. A probléma azon $\boldsymbol{\Phi}_i(x^\mu)$ függvények megtalálása, amelyek esetén S stacionárius. S stacionaritása – mint jól ismert – egyenértékű azzal, hogy a $\boldsymbol{\Phi}_i(x^\mu)$ függvények kielégítik az Euler–Lagrange-egyenleteket.

Noether variációs problémákra való koncentrálását a Hamilton-elv fizikában betöltött fontos szerepe, továbbá az a körülmény indokolta, hogy – mint Hilbert megmutatta – az Einstein-egyenletek is előállnak Euler–Lagrange-egyenletként.

Egy j^μ áramot megmaradó áramnak nevezünk, ha az Euler–Lagrange-egyenletek teljesülése esetén

$$\sum_\mu \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (2)$$

teljesül. j^μ általában az x^μ, $\boldsymbol{\Phi}_i$ és $\boldsymbol{\Phi}_i$ deriváltjainak függvénye. j^0-t töltéssűrűségnek nevezzük; a teljes töltést – amely egy $(D-1)$-dimenziós $\boldsymbol{\Omega}$ térrészben található – az

$$\int_\Omega \mathrm{d}x^1\, \mathrm{d}x^2\, \ldots\, \mathrm{d}x^{D-1}\, j^0$$

integrál adja. A Stokes-tétel szerint a (2) kontinuitási egyenletből következik a töltés megmaradása, ami azt jelenti, hogy egy $\boldsymbol{\Omega}$ térrészben levő töltés megváltozása egy adott időintervallum alatt megegyezik a térrész határán ezen idő alatt átáramló töltéssel. Ha az idő az egyetlen független változó, akkor j^μ-nek természetesen csak egy komponense van, j^0, amely ebben az esetben nem töltéssűrűség, hanem a teljes töltés, és j^μ megmaradása azt jelenti, hogy j^0 időben állandó.

Egy variációs probléma folytonos szimmetriája a független és a függő változók olyan egyparaméteres transzformációcsoportja, amelynek hatása S-t nem változtatja. Azokat a folytonos szimmetriákat nevezzük klasszikus szimmetriáknak, amelyek generátora csak x^μ-től és $\boldsymbol{\Phi}_i$-től függ. Noether mindazonáltal azon szimmetriákat is figyelembe vette, amelyek generátora $\boldsymbol{\Phi}_i$ deriváltjaitól is függ; ezeket később általánosított szimmetriáknak nevezték el.

Az első tétel szerint egy variációs probléma minden folytonos szimmetriájához tartozik egy megmaradó áram, és ennek megfordítása is igaz.

Noha speciális eredmények mechanikai rendszerek szimmetriáira és megmaradó mennyiségeire vonatkozóan korábban is ismertek voltak, Noether tétele egységes keretbe foglalta és nagyon messzemenően általánosította is ezeket. A tétel mechanikai és térelméleti modellekre egyaránt érvényes, tetszőlegesen magas deriváltakat enged meg a Lagrange-függvényben, továbbá a klasszikus szimmetriákon túlmenően az általánosított szimmetriákat is figyelembe veszi. Az általánosított szimmetriákra azért is szükség van, mert általában nem minden megmaradó áram felel meg valamilyen klasszikus szimmetriának.

A szimmetriák és a megmaradó mennyiségek a fizikai rendszerek legalapvetőbb jellemzői közé tartoznak, és központi szerepet játszanak az egyes fizikai rendszerek tanulmányozásában-megértésében. Ezek ismeretében fontos kijelentéseket lehet tenni egy fizikai rendszer viselkedéséről anélkül, hogy teljes részletességgel ismernénk annak időbeli fejlődését. A szimmetriákkal kapcsolatos megfontolások gyakran szolgálnak vezérlő elvként új modellek, illetve elméletek megalkotásakor, mint ahogy ez az általános relativitáselmélet esetében is történt. Egy fizikai rendszer szimmetriáinak és megmaradó mennyiségeinek ismerete a mozgásegyenletek megoldásához is jelentős segítséget ad, sőt elegendően sok szimmetria vagy megmaradó mennyiség ismeretében a mozgásegyenletek teljes megoldása is lehetséges. A mozgásegyenletek numerikus megoldása során is fontos a szimmetriák és a megmaradó mennyiségek ismerete, mivel ez gyakran egyszerűbb és hatékonyabb számolást tesz lehetővé, segíti az eredmények értelmezését, továbbá a numerikus eredmények ellenőrzésére is használható. Mindezek alapján mondhatjuk, hogy az első tétel a fizika törvényeire vonatkozó, általános érvényű, speciális modellekre nem korlátozódó, alapvető fontosságú összefüggést fogalmaz meg.

Az Erlangeni Egyetem 1916-ban.

Az első tételt gyakran használjuk arra, hogy egy-egy fizikai rendszer ismert szimmetriáihoz meghatározzuk a megfelelő megmaradó áramokat. A legismertebb szimmetriák a klasszikus fizikában az időeltolások, a térbeli eltolások és a forgatások, amelyekhez az energia, az impulzus és az impulzusmomentum tartozik, mint megmaradó mennyiség. Jól ismert téridő-szimmetria még a Galilei-szimmetria (a Galilei-transzformációk az egymáshoz képest konstans sebességgel mozgó inerciarendszerek közötti transzformációk), illetve a speciális relativitáselméletben ezt helyettesítő Lorentz-szimmetria. Zárt, konzervatív pontrendszer esetén a Galilei-szimmetriából az

$$m \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\, t - m\boldsymbol{r} \tag{3}$$

mennyiségek megmaradása következik, ahol m a pontrendszer teljes tömege, $\boldsymbol{r}$ a tömegközéppont helyvektora és t az időt jelöli. Könnyen látható, hogy a (3) mennyiségek megmaradása egyenértékű a tömegközéppont egyenes vonalú egyenletes mozgásával, az impulzus megmaradásához hasonlóan. Megmaradó mennyiségre további jól ismert, klasszikus mechanikai példa a Kepler-probléma vonatkozásában a Runge–Lenz-vektor, azaz ennek három komponense. Ezek, mint megmaradó mennyiségek a Kepler-probléma bizonyos általánosított szimmetriáihoz tartoznak.

A térelméletben a téridő-szimmetriák mellett a szimmetriák egy másik fontos osztályát alkotják a belső szimmetriák, amelyek a különböző terek, mint például az elektromágneses tér és az anyagterek komponenseit transzformálják egymás között. A belső szimmetriák egyik legfontosabb példája az elektrodinamika globális mértékszimmetriája, amelyből az elektromos áram megmaradása következik, de a különféle részecskefizikai elméletekben még számos további hasonló szimmetria előfordul. Az egyik jól ismert részecske- és magfizikai belső szimmetria az izospin-szimmetria, amelyet *Heisenberg* a proton és a neutron erős (nukleáris) kölcsönhatásai azonosságának magyarázatára vezetett be. Ez a magfizikai elmélet olyan megfogalmazását követelte meg, amelyben a hatásfüggvény invariáns az izospin-szimmetriatranszformációkra. Ebben az esetben tehát nem egy meglevő elmélet ismert tulajdonságának elegáns reprodukálásáról volt szó, hanem egy felismert megmaradási tulajdonság beépítéséről a jelenség elméletébe.

A második tétel

Noether második tétele olyan variációs problémákra vonatkozik, amelyek lokális szimmetriacsoporttal rendelkeznek. A lokális szimmetriacsoportok olyan végtelen dimenziós csoportok, amelyek elemei függvényekkel (ezek a független változók függvényei) paraméterezhetők, ellentétben a globális szimmmetriacsoportokkal, amelyek elemei néhány valós számmal paraméterezhetők. Az ilyen típusú szimmetriacsoportok a mai fizika szempontjából alapvető fontosságúak, mivel az elemi kölcsönhatásokat leíró, jelenleg általánosan elfogadott modellek, azaz az általános relativitáselmélet és a részecskefizika standard modellje (az elektrogyenge és az erős kölcsönhatások elmélete) mind valamilyen lokális szimmetriára épülnek. Az általános relativitáselmélet lokális szimmetriája az általános koordinátatranszformációkkal szembeni invariancia. Az elektrogyenge és az erős kölcsönhatások lokális szimmetriái a Yang–Mills-féle mérték(gauge)szimmetriák, amelyek az elektrodinamika mértékszimmetriájának általánosításai. A különféle további részecskefizikai elméletek legnagyobb részében szintén fontos szerepet játszanak a lokális szimmetriák.

Noha Noether szempontjából elsősorban az általános relativitáselmélet volt fontos, és az ő idejében a Yang–Mills-féle mértékszimmetriák még nem voltak ismertek (*Yang* és *Mills* 1954-ben fedezte fel ezeket), a második tétel nemcsak az általános koordinátatranszformációkra vonatkozik, hanem egy teljesen általános lokálisszimmetria-fogalmat vezet be, amely speciális esetekként magába foglalja az általános koordinátatranszformációkat és a Yang–Mills-féle mértékszimmetriákat is.

A tétel azt mondja ki, hogy ha egy variációs probléma lokális szimmetriával rendelkezik, amelyet n függvénnyel lehet paraméterezni, akkor az Euler–Lagrange-egyenletekben szereplő Euler–Lagrange-deriváltak nem függetlenek egymástól, hanem n (általában deriválásokat is tartalmazó) azonosságot elégítenek ki, és ennek a megfordítása is igaz. Noha ez a tétel nem tűnik annyira érdekesnek, mint az első, fontos következményei vannak. Az Einstein–Hilbert-hatásra alkalmazva az Einstein-tenzor kovariáns divergenciamentessége ($\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$) adódik, amelyből az Einstein-egyenlet felhasználásával az energia-impulzus tenzor kovariáns divergenciamentessége ($\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$) is következik. Az elektrodinamikában pedig a második tétel és a Maxwell-egyenletek felhasználásával az elektromos áram megmaradását lehet levezetni. Ezeket az eredményeket a második tétel használata nélkül is meg lehet kapni, de a második tétel azt is megmutatja, hogy ezek összefüggnek a lokális szimmetriákkal, és hogy hasonló eredmények más lokális szimmetriákkal rendelkező elméletekben is érvényesek.

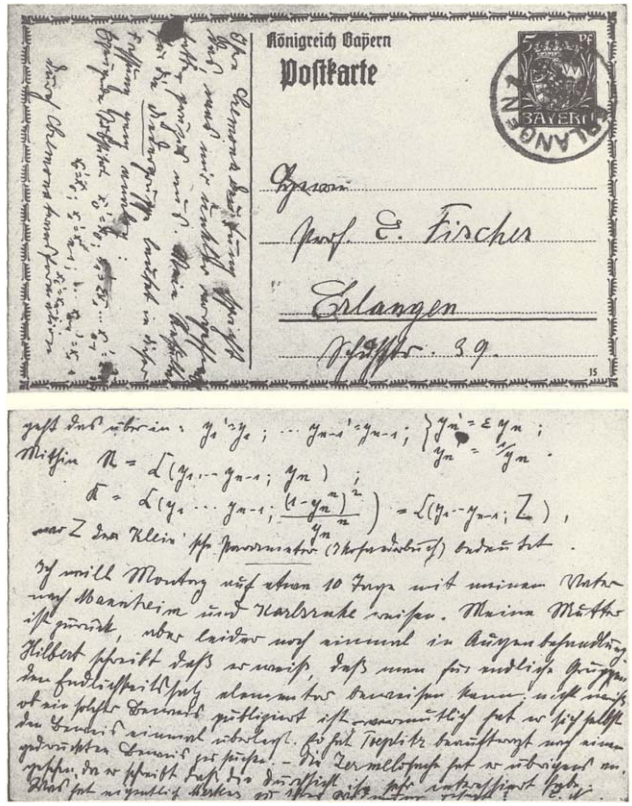
Az energia-impulzus tenzor kovariáns divergenciamentessége általában nem jelenti azt, hogy a $T^{\mu\nu}$, ν = 0, 1, 2, 3 áramok megmaradó áramok lennének, mivel a kovariáns deriválás általában nem egyezik meg a koordináták szerinti egyszerű parciális deriválással. Mindazonáltal abban a speciális esetben, amikor a metrikának valamilyen folytonos szimmetriája (folytonos izometriája) van, például időeltolási vagy forgási szimmetriája, a $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ egyenlőségből az következik, hogy az energia-impulzus tenzorból és az izometriát generáló vektormezőből (a folytonos izometriákat generáló vektormezőket Killing-vektormezőnek szokták nevezni) egy megmaradó áram képezhető, amely a téridőben levő anyagot jellemzi. Fontos hangsúlyozni, hogy a szóban forgó energia-impulzus tenzor az Einstein-egyenlet jobb oldalán álló tenzort jelenti, nem a Minkowski-téridőben megszokott kanonikus energia-impulzus tenzort.

Noether még egy további eredményt is közölt a lokális szimmetriacsoporttal rendelkező variációs problémákról, amely részben szintén a második tétel következménye. Ezt harmadik tételnek is lehetne tekinteni, noha Noether maga nem jelölte külön tételként. Eszerint, ha az első tételt egy olyan szimmetriára alkalmazzuk, amely egy lokális szimmetriacsoporthoz tartozik, akkor a kapott megmaradó áram egy azonosan megmaradó áram és egy, az Euler–Lagrange-egyenletek teljesülése esetén eltűnő áram összege lesz. Az azonosan vagy automatikusan megmaradó áram olyan áramot jelent, amelynek divergenciája nulla, függetlenül attól, hogy teljesülnek-e az Euler–Lagrange-egyenletek. Az Euler–Lagrange-egyenletek teljesülése esetén eltűnő áram fizikai szempontból nem lényeges, így azt lehet mondani, hogy a lokális szimmetriacsoportok által tartalmazott szimmetriákhoz lényegében azonosan megmaradó áramok tartoznak. Továbbá ennek megfordítása is igaz, azaz ha egy szimmetriához tartozó áram azonosan megmaradó, akkor ez a szimmetria egy lokális szimmetriacsoport része.

Ezzel a harmadik fő eredménnyel Noether megoldást adott az egyik, Hilbert által felvetett problémára is, amelyet az első fejezet végén is említettünk. Hilbert saját vizsgálatai során arra a megállapításra jutott, hogy az általános relativitáselméletben az energiaáram azonosan megmaradó áram, és levezetés nélkül megfogalmazta azt a vélekedést, hogy ez az általános koordinátatranszformációkkal szembeni invarianciával van összefüggésben, így az általános relativitáselméletnek egy jellegzetes tulajdonsága. Noether eredménye bizonyította Hilbert ezen sejtését, sőt messzemenően általánosította is.

A Noether-tételek fogadtatása

Klein, Hilbert és Einstein nagyra értékelte és hasznosnak találta Noether eredményeit. Klein több, az általános relativitáselméletre vonatkozó dolgozatában is alkalmazta őket; például az Einstein és Hilbert által levezetett energia- és impulzusmegmaradási tételek közötti kapcsolatot ezek felhasználásával tisztázta. Noether göttingeni habilitációjára és tanári (Privatdozent) kinevezésére is nagyrészt az *Invariante Variationsprobleme* alapján került sor 1919-ben; ezelőtt Noether csak asszisztensi pozíciókban dolgozhatott. Ezzel kapcsolatban meg kell jegyezni, hogy a weimari köztársaság 1919-ben kezdődő korszaka előtt a Német Birodalomban nők nem kaphattak tanári állást az egyetemeken, ezért Noethernek nem volt lehetősége a habilitációra 1919 előtt. Hilbert ugyan korábban is megpróbálta elérni, hogy Noether kivételesen habilitálhasson, de az egyetem ezt elutasította.



Emmy Noether néha levelezőlapon számolt be absztrakt algebrai kutatásairól kollégájának, Ernst Fischernek – e lapot 1915. április 10-én adta postára.

1921-ben *Erich Bessel-Hagen* kis mértékben általánosította az első tétel eredeti változatát, bár ez az általánosítás is tulajdonképpen még Noethertől származott, akivel Bessel-Hagen beszélgetéseket folytatott a szimmetriák és megmaradó áramok témájáról. Ezután az *Invariante Variationsprobleme* kedvező fogadtatása ellenére Noether tételei még mintegy harminc évig viszonylag ismeretlenek maradtak. Az első tétel egy amerikai fizikus, *Edward Lee Hill* 1951-ben írt cikke után kezdett szélesebb körben ismertté válni, de e cikkben a második tételről nem esik szó, és az első tétel csak egy egyszerűsített változatban szerepel, amelyben a Lagrange-függvény nem tartalmaz elsőnél magasabb rendű deriváltakat és a Noether által bevezetett általánosított szimmetriák sincsenek figyelembe véve. A későbbiekben azután teljes általánosságban újra felfedezték és többek hozzájárulásával modernebb formában újrafogalmazták az első tételt. Ezt többek között az is ösztönözte, hogy a 70-es évektől kezdve a teljesen integrálható rendszerek elmélete intenzíven tanulmányozott témává vált, és e területen az általánosított szimmetriák alapvető fontosságúak. A huszadik század végére a Noether-tétel teljesen közismertté vált, noha sok fizika tankönyv ma sem a legáltalánosabb formában tárgyalja.

Kétségtelen, hogy Noether tételei nagymértékben járultak hozzá az energia természetének tisztázásához az általános relativitáselméletben, de e témában a későbbiekben is sok új eredmény született. Az energia pozitivitásáról szóló egyik legismertebb eredményt, az Arnowitt–Deser–Misner-féle teljes energia pozitivitását