

A LOVÁSZ-SZÁM KVANTUMKARRIERJE

Patkós András
ELTE Atomfizikai Tanszék

„Az összefonott fotonok szétoztása ... új utakat nyit a kvantumkommunikáció gyakorlati megvalósításához.” Világviszhangot kiváltó eredményük jelentőségét méltatva ezt a vonatkozást emelte ki a kínai kutatócsoport, amelyik elsőként hozott létre két fotonból álló összefonott állapotú kvantumrendszert egy Föld körül keringő műholdon, majd annak egy-egy fotonját úgy juttatta el egymástól 1203 km távolságra elhelyezkedő két földi állomásra, hogy kvantumösszefonódottságuk bizonyíthatóan fennmaradt [1]. A *Jian-Wei Pan* professzor vezette kutatócsoport eredménye a Földet átfogó kvantumkommunikációs hálózathoz vezető úton megtett első sikeres lépésként értékelendő. Jelen cikk arra törekszik, hogy szemléletesen megvilágítsa, miért tekintik alapvetőnek egy magyar matematikus közel negyven éves gráfelméleti eredményét [2] a kvantumkommunikáció teljesítőképessége behatárolásában és elért pillanatnyi szintjének minősítésében.

Még egy évtizede sincs, hogy a vezető nemzetközi folyóiratokban (*Science*, *Nature*) a főleg fizikusok tollából származó cikkek hulláma jelentkezik, amelyek a hibamentes információközlés sebességét úgynevezett *összefonott kvantumrendszerek* használatával javasolják megjavítani [3–5]. A számos elméleti cikkben fokozatosan javuló hatékonysággal javasolt módszer esélyt ad arra, hogy a részben kvantumeffektus használó algoritmus révén esetleg el is érjék az egyszeri használattal hibamentesen átvihető információ-

mennyiségre vonatkozó felső határt. Ezt a felső korlátot a szakirodalom *Lovász-számként* emlegeti.

E fejlemény még újabb aspektusaként az elmúlt fél évtizedben a Lovász-számot használják azon maximális különbség számszerűsítésére is, amely a mikrovilág jelenségeinek kvantumelméleti és úgynevezett „rejtett paraméteres” leírása között lép fel [6, 7]. A csúcsokból és élekből felépíthető gráfok elvont általánosságú elmélete esztétikus geometriai háttérű megvilágítást ad nagyon is konkrét fizikai rendszerek hétköznapi szemlélletünkkel vitatkozó kvantumtulajdonságainak, amennyiben a gráfok csúcsait valamely kvantumtulajdonságok mérési kimeneteivel azonosítjuk, éleiket pedig ezen események közötti relációkként értelmezzük.

Mielőtt rátérnénk erre, ismerkedjünk meg az ember által máig előállított legnagyobb térbeli kiterjedésű kvantumállapot létrehozásának körülményeivel és tulajdonságaival.

Műhoddal létrehozott, földi állomások közötti összefonott fotonpárkapcsolat

Összefonott fotonpárok keltésének immár köznapi technikája fotonok nemlineáris kristályokkal történő „kettéhasítását” használja. A Miciusz műholdon egy másfél centiméteres vastagságú K-Ti-PO₄ (kálium-titanil-foszfát, KTF) egykristályra fókuszálták a pumpáló lézer 405 nm hullámhosszú fotonjait. A kettőtörő kristályon áthaladva keletkezett két 810 nm-es, a

$$\frac{|H\rangle_1 |V\rangle_2 + |V\rangle_1 |H\rangle_2}{\sqrt{2}} \quad (1)$$

polarizációs állapotban összefonott fotont (H a horizontális, V a vertikális lineáris polarizációt jelző rövidítés) két különálló teleszkópról vezették földi célállomáaikhoz, amelyeket az 1, illetve a 2 indexek különböztetik meg. Az összefontság a két foton polarizációs tulajdonsága közötti korrelációban nyilvánul meg.



Patkós András (1947) akadémikus az ELTE emeritus egyetemi tanára. Elméleti fizikus, aki a kvantumtérelméletek megoldási módszereit fejleszti, az erős és az elektrogyenge anyag fázisátalakulásait, azok kozmológiai szerepét kutatja. Számos tankönyv (társ)-szerzője. Rendszeresen ír tudományos-népszerűsítő cikkeket is.

Ugyan bármelyik teleszkópból kivezetett fotonra véletlenszerűen, azaz $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ valószínűséggel mérhető a H vagy a V polarizáció, ám az egyikre H -t (V -t) mérve, annak feltételes valószínűsége, hogy a másikra is H -t (V -t) mérjenek, nulla lesz. A 30 mW teljesítményű pumpáló lézer révén másodpercenként 5,9 millió összefonott állapotú párt állítottak elő. Ez az eszköz jóval hatékonyabb, mint a történetileg elsőként alkalmazott BBO (beta-báriumborát) egykristály, mivel ez esetben a kristálytani főtengely mentén haladó, egyetlen fotonnyaláb különböző szakaszain haladó, egymásra merőleges polarizáltsággal kettéhasadó fotonpárok egy-egy tagját fonják össze [8]. E fotonáram 1%-án végeztek minősítő méréseket a műhold fedélzetén, amellyel megállapították, hogy a párok állapota 91%-os hűségű (a megvalósult állapot vetülete az ideális állapotra $0,907 \pm 0,007$ volt).

Ilyen fotonpárokat a légkör földközeli rétegein át legfeljebb 100 km-es távolságra lehet eltávolítani egymástól anélkül, hogy a légköri zavarok a két állapot kvantumkoherenciáját megszüntetnék. A Miciusz 500 km-es magasságban kering és fedélzetéről két, Tibetben létesített földi megfigyelő állomásra juttatták el a fotonokat (lásd a cikk kezdőképét!). A Delingha állomás 3153 m, a Lijiang állomás 3233 m magasságban épült meg, földi távolságuk egymástól 1203 km. A kísérlet célja annak ellenőrzése volt, hogy az összefonott állapot fotonkomponenseinek koincidenzában detektált tagjai között fennmarad-e az összefonottság. Más szóval, létezhet-e földrésnyi méretskálájú kiterjedt kvantumállapot?

A nagy sebességgel repülő űreszköztől nézve a két állomás 275 s időintervallumban volt egyidejűleg a láthatár felett. Távolságuk a műholdtól 500 és 2000 km között változott. Nagy teljesítményű célzó lézerekkel 0,41 mrad pontossággal irányozták egy egyenesbe a küldőkkel a fogadó állomások 1,2, illetve 1,8 méteres átmérőjű teleszkópjait. Ez a szögeltérés jóval kisebb az összefonott fotonnyaláb egyes komponenseinek 10 mrad mértékű széttartásánál. A forrás mozgásából származó további két feladatot is sikerrel oldottak meg: kompenzálták az érkezési idő eltolódását és a polarizációs irány elfordulását is. Végül 60 és 80 dB között változó értéken sikerült korlátozniuk a fotonnyaláb csillapodását. Ez azt jelentette, hogy a két távoli állomáson detektált fotonok között 11 Hz-es átlagos frekvenciával észleltek koincidenziát.

Összehasonlításként érdemes megjegyezni, hogy a földi légkörön áthaladva végrehajtott kétfotonos kísérletek során elért 100 km-es távolság esetében 80 dB-es csillapodás mellett sikerült koincidenz fotonpárokat észlelni. Az űrből megvalósított szétküldés során tapasztalt hosszegységre jutó csillapítás – még az üvegszál transzmisszió minimális csillapodási határértékének tartott 0,095-0,13 dB/km értékek elérése esetén is – sokszorta kisebb a földön optimálisan elérhetőnél. Ezért a szerzők a nagy távolságú fotonmegosztással létrehozandó kvantumkommunikációs csatornák majdani megvalósítására a magasabb pályára állított űreszközöket tartják egyedül alkalmasnak.

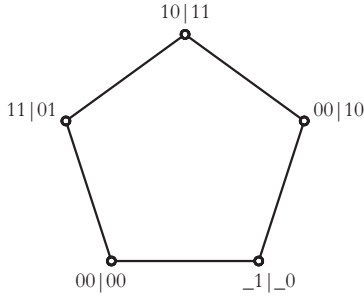
A koincidenz fotonok összefontságának fennmaradásáról, azaz a komponensek közötti kvantumkorreláció fennmaradásáról a két földi állomás együttműködésében végrehajtott *Bell-teszt* révén győződtek meg.

A Bell-teszt

Az (1) képlettel jellemezhető összefonódás a többrészecskes állapot részrendszereinek tulajdonságait megállapító, térszerűen elválasztott tartományokban végzett mérések eredményei között a távolsággal nem csökkenő korrelációt jósol. A kvantumelmélet e sajátosságát *Erwin Schrödinger* és *Albert Einstein* az 1930-as évek közepén ismerték fel. Legrészletesebben Einstein, *Podolsky* és *Rosen* 1935-ös cikke fejtette ki azt a véleményt, hogy a távoli mérések korreláltságát a megkülönböztethetetlen ikerrészecskék keletkezése pillanatában végbement olyan hatás okozza, amely hiányzik a kvantummechanikai leírásból. Ezért a kvantummechanika nem lehet a természeti jelenségek leírásának végleges elméleti kerete. A következők által az 1950-es években kifejlesztett leíráshoz definiált, „rejtett paraméter”-nek nevezett adat valószínűségi eloszlására építve a két mérés együttes kimenetének elemzésekor az összes klasszikusan elképzelhető (tehát a H_1-H_2 , V_1-V_2) kimeneti lehetőséget is figyelembe kell venni, bár a rejtett paraméterre érzéketlen mérőeszközeinkkel csak a kimenetek egy részét tudjuk észlelni.

John Bell 1964-ben a két polarizáció együttes méréseire vonatkozó rejtett paraméteres elemzéssel a kvantumelméletnek ellentmondó egyenlőtlenségeket vezetett le [9]. Ezek mintájára a legegyszerűbb egyenlőtlenséget *Clauser*, *Horne*, *Shimony* és *Holt* javasolták [10], amelyet röviden CHSH-egyenlőtlenségként emlegetnek. Földi körülmények között fokozatosan növekvő, végül a 100 km-es távolságot elérő egyidejű mérésekkel bizonyították a CHSH-egyenlőtlenség sérülését, amivel egyértelműen megcáfolták a keletkezés pillanatában (lokálisan) hatását kifejtő rejtett paraméterekkel létrehozott korrelációkat feltételező klasszikus elméletet. A mérések a kvantummechanikai jóslattal nagy pontosságú számszerű egyezést mutattak. A CHSH-egyenlőtlenség felső korlátját meghaladó, a kvantummechanikai jóslattal egyező mérési eredményt az akár makroszkopikus kiterjedésű rendszerben is fennmaradó kvantum természet kritériumának tekintik. Ez a Bell-teszt, amelynek elméleti háttere az évtizedek során oly mértékben leegyszerűsödött, hogy az ismertetés közérthetőségét remélve, [7] gondolatmenetét követve, az alábbiakban be is mutatom.

Mindkét mérési helyszínen a koincidenz fotonáramon 2-2 polarizációmérési tesztet végeznek. Az A mérőhelyen (Alice) a t_A és t'_A irányokra mérik meg a polarizáció vetületét. Az adott irányba mutató polarizációvektor mérésével az A , illetve az A' megfigyelhető mennyiség $+1$ értékét társítják. Amennyiben a polarizáció a vizsgált irányra merőleges, akkor a mé-



2. ábra. A CHSH-egyenlőtlenség levezetéséhez használt kizárási ötszög. A csúcsokat a melléjük írt négy szimbólum azonosítja a Bell-teszt eseményeivel. A harmadik karakter az A által választott tesztet azonosítja: $0 = t_A$, $1 = t'_A$, a negyedik karakter ugyanezt teszi B -re. A bal oldalon az első karakter az A által kapott eredményt, a második pedig a B által kapott eredményt adja meg. A $_$ karakter használatát jelzi, hogy abban az eseményben A nem végez kísérletet.

rés eredményéhez a 0 értéket társítják. A B mérőhelyen (Bob) a t_B és t'_B irányokra képezik a B , illetve a B' megfigyelhető mennyiség mérésorozatát. Az irányokat egymástól függetlenül, véletlenszerűen választják ki. Az eredmények összesítésével elkészíthető az összes együttes méréspár eredménysorozatából készített szorzat várható értéke, azaz $\langle AB \rangle$, $\langle A'B \rangle$, $\langle A'B' \rangle$ stb.

A CHSH-egyenlőtlenség a fenti mérés eredményére vonatkozó úgynevezett *lokális rejtett paraméteres elméleti* várakozásra a következő állítást fogalmazza meg:

$$\langle AB \rangle + \langle A'B \rangle + \langle AB' \rangle - \langle A'B' \rangle \leq 2. \quad (2)$$

Az egyenlőtlenség levezetéséhez tekintsük az együttes mérések következő lehetséges tesztválasztásaitól és a tesztek lehetséges kimeneteiből álló összetett eseményeket:

$$(00 | t_A, t_B), (11 | t_A, t'_B), (10 | t'_A, t'_B), (00 | t'_A, t_B).$$

A zárójelben az első szám az A mérőhelyen végzett, a második a B mérőhelyen végzett teszt eredményét adja. Az egymás melletti események egymást kölcsönösen kizárják, mivel legalább az egyik helyen elvégzett azonos tesztre különböző eredményt adtak. Az első és az utolsó együttes esemény közé (a „kör” bezárva) beírhatjuk a $(-1 | _, t_B)$ eseményt, amely mindkettővel kölcsönös kizárósági viszonyban van, függetlenül attól, hogy Alice egyáltalán mér-e.

Az 5 eseményre képezzük a mérések ismétlésével megismerhető bekövetkezési valószínűségeik összegét és felső korlátot keressünk erre:

$$\max \left[P(00 | t_A, t_B) + P(11 | t_A, t'_B) + P(10 | t'_A, t'_B) + P(00 | t'_A, t_B) + P(-1 | _, t_B) \right].$$

Az 5 eseményt egy gráf csúcsainak választva (2. ábra) és az egymást kizáró szomszédokat élekkel összekötve a C_5 ötszöget kapjuk, amely ezen események úgynevezett *kizárási* (exclusivity) *gráfja*. Azonnal látszik, hogy az egymást kölcsönösen ki-nem-záró csú-

csok száma 2. Ez a C_5 gráf *függetlenségi száma*: $\alpha(C_5) = 2$. Kölcsönösen kizáró események valószínűségeinek összegét az a kiosztás maximalizálja, amikor egyik eseményt biztosnak, az általa kizártak valószínűségeit pedig nullának választjuk. Ezért fennáll, hogy

$$P(00 | t_A, t_B) + P(11 | t_A, t'_B) + P(10 | t'_A, t'_B) + P(00 | t'_A, t_B) + P(-1 | _, t_B) \leq 2.$$

Miután az utolsó esemény valószínűsége akár klasszikusan, akár a kvantumállapotból számolva $1/2$, így

$$P(00 | t_A, t_B) + P(11 | t_A, t'_B) + P(10 | t'_A, t'_B) + P(00 | t'_A, t_B) \leq \frac{3}{2}. \quad (3)$$

A (2) és (3) egyenlőtlenségek összekapcsolásához a következő megfeleltetést tesszük a valószínűségek és bizonyos statisztikai együttes várható értékek között:

$$P(ab | t_A, t_B) = \frac{\langle [1 + (-1)^a A][1 + (-1)^b B] \rangle}{4}. \quad (4)$$

Ezt és az analóg további kifejezéseket (3)-ba helyettesítve, majd végrehajtva a megfelelő átrendezéseket, a (2) CHSH-egyenlőtlenségre jutunk.

A kvantumelmélet szabályait használva kiszámíthatjuk az egyes események valószínűségeinek kvantummechanikai értékeit. Szokásos választás, hogy Alice első tesztje (t_A) a z tengely irányú és az arra merőleges polarizációs állapotot, a második (t'_A) az ezzel $\pi/4$ szöget bezáró tengelyre vonatkozó polarizáció vetületét méri meg. Bob esetében az első teszt a z tengelyhez mérten Θ polárszöggel jellemzett irányra vett vetületet méri, a második pedig az ehhez képest további 2Θ szöggel elfordított irányra vonatkozót. A választott analizátorirányokhoz tartozó polarizációs sajátvektorok a következők:

$$\begin{aligned} \epsilon(0 | t_A) &= (0, 1), & \epsilon(1 | t_A) &= (1, 0), \\ \epsilon(0 | t'_A) &= \frac{(-1, 1)}{\sqrt{2}}, & \epsilon(1 | t'_A) &= \frac{(1, 1)}{\sqrt{2}}, \\ \epsilon(0 | t_B) &= (-s, c), & \epsilon(1 | t_B) &= (c, s), \\ \epsilon(0 | t'_B) &= (s, c), & \epsilon(1 | t'_B) &= (-c, s), \end{aligned}$$

ahol $c = \cos\Theta$, $s = \sin\Theta$. Az egyes méréspárokban az (1) állapotnak ezek direkt szorzatára vett vetületét kell számolni. Az egyszerű számítás a következő eredményeket adja az érdekes események előfordulási valószínűségére az (1) képlettel megadott állapotban:

$$\begin{aligned} P(11 | t_A, t'_B) &= P(00 | t_A, t_B) = \frac{\cos^2\Theta}{2}, \\ P(10 | t'_A, t'_B) &= P(00 | t'_A, t_B) = \frac{(\cos\Theta + \sin\Theta)^2}{4}. \end{aligned}$$

Az összeget a $\Theta = \pi/8$ választás maximalizálja, amikor mind a négy valószínűség értéke egyformán $\cos^2(\pi/8)/2$, amivel (3) bal oldalára

$$1 + \sqrt{\frac{1}{2}} > \frac{3}{2}$$

adódik. Ezt lefordítva a (2) CHSH-egyenlőtlenség bal oldalára a

$$\sqrt{8} \approx 2,83$$

értéket kapjuk, ami nyilván sérti a CHSH-egyenlőtlenséget. A 3. ábrán [11] kísérleti mérésének eredményét mutatjuk be 2007-ből, földi laboratóriumban, az antiszimmetrikus

$$\frac{|H\rangle_1 |V\rangle_2 - |V\rangle_1 |H\rangle_2}{\sqrt{2}}$$

állapottal elvégzett Bell-tesztre.

A kínai kísérletben ugyanezt a két-két tesztet végezték el. Az egyes tesztirányokra 64, illetve 63 koincidens eseményt regisztráltak a várt polarizációpárban, a mérési pontosságot 5, illetve 4 anomális polarizációpár detektálása alapján becsülték meg. Ezen adatokra alapozott elemzéssel a CHSH-egyenlőtlenség bal oldalának értékére $2,37 \pm 0,09$ -et kaptak, ami 4 standard eltéréssel sérti a CHSH-egyenlőtlenséget.

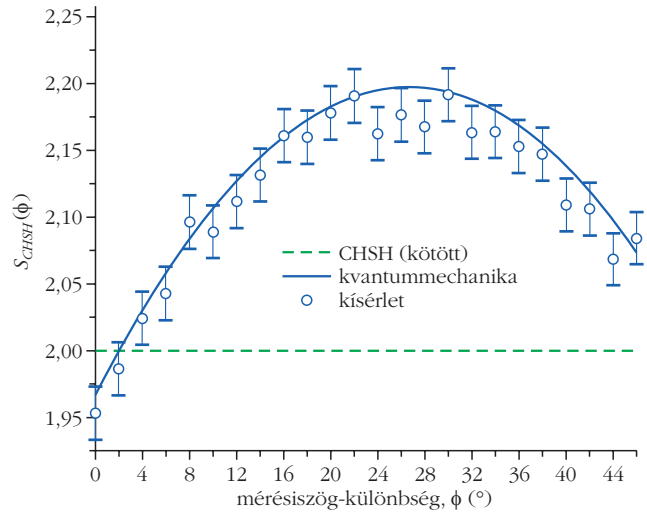
Még egy kérdés marad. Vajon a korrelációkra a választott összefonott állapotban számított és kísérletileg verifikált kvantummechanikai eredménynél létezik-e a klasszikus korláttól még erősebb eltérést mutató korreláció? A válasz megközelítésére Lovász László gráfelméleti koncepciója [12] adott lehetőséget. Ez olyan n -elemű eseménysokaságra épülő gráfra vonatkozik, amelynek éllel összekapcsolt, egymást kölcsönösen kizáró eseményei a G kizárási görbével jeleníthetők meg. Feltelevük, hogy egy valós Hilbert-téren létezik G duális ortogonális reprezentációja, ahol a gráfcúcsoknak az \mathbf{u}_i , $i = 1, \dots, n$ vektorok felelnek meg. Az éllel összekötött, azaz egymást kölcsönösen kizáró eseményeket ortogonális vektorok jelenítik meg. A Hilbert-tér egy tetszőleges \mathbf{x} elemére képezhető a

$$\sum_i |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_i|^2$$

mennyiség, amely a vizsgált eseményhalmaz valószínűségeinek összegét adja meg. Ennek kiszámítása egy tetszőleges görbére úgynevezett NP-nehéz feladat, azaz pontos meghatározására általában nincs algoritmus. Ám az összes lehetséges \mathbf{x} -re felvett maximumára adható egy lépésszámban polinomiálisan kiszámolható felső korlát

$$P_1 + P_2 + \dots + P_n = \sum_i |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_i|^2 \leq \theta(G),$$

A felső korlátként megjelenő $\theta(G)$ a Lovász-szám. Első cikkében [2] Lovász éppen az ötszögre adta meg értékét: $\theta(C_5) = 5^{1/2}$.



3. ábra. Antiszimmetrikusan összefonott polarizációs állapotokra végzett Bell-teszt eredménye. A (2) bal oldalának maximuma a kvantumelmélet szerint a két mérőhelyen választott mérési irány közötti ≈ 26 fokos szögműködésre jelenkezik, maximális értéke pedig $\approx 2,21$ [11].

Könnyű felismerni a kvantummechanikai valószínűségek képzési szabályát a fenti kifejezés egy-egy tagjában (világos, hogy nem az összes \mathbf{u}_i vektor kölcsönösen merőleges!). Bár az eredeti közlemény valós együtthatókkal képezett vektorok által alkotott térrel dolgozott, de a tétel általánosítható a fizikai állapotternek megfelelő komplex Hilbert-térre is. Az ötszög Lovász-számát használva a CHSH-kombinációra az előző kvantummechanikai eredményünkkel konzisztens

$$\langle AB \rangle + \langle A' B \rangle + \langle AB' \rangle - \langle A' B' \rangle \leq 4 \cdot 5^{1/2} - 6 \approx 2,944.$$

felső korlát adódik. Kérdés marad, hogy van-e olyan tesztválasztás és hozzátartozó optimális összefonott állapot, amely szaturálja a Lovász-számmal társuló korrelációs felső korlátot, vagy esetleg a korlát tovább élesíthető.

Hibátlan kommunikáció gyorsítása összefonott állapotok megosztásával

Zajos (telefon)kommunikációs rendszerek átviteli minőségének jellemzésére vezette be Shannon az *egyszeri hibamentes adattovábbítási kapacitás* fogalmát [13]. Legyen N a továbbítandó egybités független adatok összességének halmaza. A kommunikációs csatorna kimenetén egy átküldésre kiválasztott adat a zaj következtében valamekkora valószínűséggel más adatként jelenhet meg. Azok az adatok, amelyek a kimenetnél összekeveredhetnek, egy *klikket* alkotnak. A bemenő adatokat egy gráf csúcaival azonosítva, az egymással a kimeneten összetéveszthetőket éllel kötik össze. Az így keletkező görbét *összekeverhetőségi (confusability) görbének* nevezik. A nem összekeverhető adatsoportok számát a $G(N)$ görbe *függetlenségi foka* adja meg, azaz azon csúcsok maximális száma, amelyeket nem köt össze él. Ez határozza meg azon információ mennyiségét, amelyet a csatorna



4. ábra. Kvantumkódsorozattal biztosított videokonferencia Bécs és Peking között.

egyszeri használatával a feladótól a címzetthez hibamentesen el lehet juttatni. A Shannon-féle zérushiba-kapacitás, azaz a csatorna egyszeri használatával hibátlanul átvihető bitek száma $\log_2 \alpha(G)$. Sokszori ismétlés határesetében a zérushiba-kapacitást a

$$C_0(N) = \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \alpha(G^n)$$

adja meg, ahol G^n az összekeverhetőségi görbe n -szeres direkt-„szorzatát” jelöli. 1979-ben Lovász László valójában erre a mennyiségre konstruált felső korlátot [2]. Témánk szempontjából figyelemreméltó, hogy könnyű elkészíteni az előző fejezetbeli *kizárási* és a jelen *összekeverhetőségi* görbe és jellemzői közötti „szótárt”.

Befejezésül egy összefonott állapotot hasznosító elvi eljárást írunk le [4] nyomán, amely a gráf ortogonális geometriai reprezentációja révén teszi lehetővé a kommunikációs csatorna egyszeri alkalmazását jellemző zérushiba-kapacitás $\log_2 \alpha(G)$ -nél nagyobb értékre történő növelését.

A teljes gráfban az egyes adatokat (csúcsokat) ketős indexszel címezhetjük meg: a q klikkhez tartozó elemi adatokat a j belső indexszel lehet megkülönböztetni. Azon bemenetek halmazát, amelyekből az y kimenet létrejöhet

$$S_y = \{(q, j): P(y | (q, j)) > 0\}$$

jelöli. A (q, j) csúcshoz egy Hilbert-térbeli vektort társítunk: $|\Psi(q, j)\rangle$. Ortogonalitási feltételt rovunk ki a kimeneten összetéveszthető bármely két (q, j) , (q', j') csúcsot reprezentáló vektorra: $\langle \Psi(q', j') | \Psi(q, j) \rangle = 0$, ha mindkettő benne van S_y -ban. Hangsúlyozni kell, hogy egy ilyen tulajdonságú Hilbert-tér konstrukciójának lehetősége valamely G -re önálló bizonyítást igényel!

Minden d -elemű q klikkre elkészítjük a

$$\Psi(q) = \frac{\sum_j |\Psi(q, j)\rangle_A |\Psi(q, j)\rangle_B}{\sqrt{d}}$$

maximálisan összefonott állapotot. Alice elhatározza, hogy üzenetként a q klikk valamelyik véletlenszerűen kiválasztott elemét küldi át. Ekkor első lépésben $\Psi(q)$ -t osztja meg a fogadó Bobbal. Ezután $\Psi(q)$ -n elvégez egy

mérést, amelynek eredménye a (q, l) elem. A méréssel az állapot Bobnál $|\Psi(q, l)\rangle_B$ -re redukálódik.

Második lépésben Alice zajos (telefon)csatornán küldi át a (q, l) adatot. Bob kimenetként y -t kap, amelyhez ismert az S_y halmaz. A duális Hilbert-téren Bob – a nála lévő állapot segítségével – egyértelműen meg tudja határozni a (q, l) elemet, mivel az összefonott állapot redukciójából kialakult vektor merőleges S_y többi elemére.

Az összefonott állapotot hasznosító kommunikációs elvi eljárás (protokol) ezen példájával remélhetőleg világossá lett ismertetésünk első mondatának értelme. Ha sikerül tetszőleges földi távolságra szétosztani összefonott állapotpárokat, az így kialakítandó kvantumhálózat segítségével a klasszikus csatornán történő hibátlan információátvitel sebességét is fokozni lehet. A zérushiba-kapacitás ily módon történő megnövelése lehetséges mértékének kérdésére bizonyos fokú választ jelentett annak bizonyítása, hogy a Lovász-szám az összefonódással kombinált adattovábbítás egyszeri zérushiba-kapacitására, $C_0^E(G)$ -re is felső korlátot ad [5, 14].

A Quantum Science Satellite (QSS) kínai űrprogram kutatócsoportja szeptember 7-én a *Nature*-ben megjelentetett két újabb cikket. Az első arról számol be, hogy földi állomásról sikeresen teleportáltak egy polarizációs foton-állapotot a Miciusz műholdra [15], a második szerint pedig a műholdról sikeresen osztottak szét egy kvantum titkosító kulcsot a két tibeti obszervatórium között [16]. Végül a tudományos hírek sajtójában jelent meg [17], hogy szeptember 29-én Jian-Wei Pan egykori PhD témavezetője, *Anton Zeilinger*, aki jelenleg az Osztrák Tudományos Akadémia elnöke a Miciusz műholdról szétosztott kvantumkódsorozattal biztosított videokonferencián (4. ábra) lépett kapcsolatba a Kínai Tudományos Akadémia elnökével. Bécs és Peking földi távolsága mintegy 7400 km!

Irodalom

1. Juan Yin és 33 munkatársa, *Science* 356 (2017) 1140.
2. L. Lovász, *IEEE Trans. Inf. Theory* 2 (1979) 1.
3. T. S. Cubitt, D. Leung, W. Matthews, A. Winter, *Phys. Rev. Lett.* 104 (2010) 230503.
4. D. Leung, L. Manciuska, W. Matthews, M. Ozols, A. Roy, *Comm. Math. Phys.* 311 (2012) 97.
5. R. Duan, S. Severini, A. Winter, *IEEE Trans. Inf. Theory* 59/2 (2013) 1164.
6. A. Cabello, S. Severini, A. Winter, *Phys. Rev. Lett.* 112 (2014) 040401.
7. M. Sadiq, P. Badziag, M. Bourennane, A. Cabello, *Phys. Rev. A* 87 (2013) 012128.
8. C. E. Kukliewicz, M. Fiorentino, G. Messin, F. N. C. Wong, J-H. Shapiro, *Phys. Rev. A* 69 (2004) 013807.
9. J. S. Bell, *Physics* (Long Island City, N.Y.) 1 (1964) 195.
10. J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, R. A. Holt, *Phys. Rev. Lett.* 23 (1969) 880.
11. S. Gröblacher, T. Paterek, R. Kaltenbaek, Č. Brukner, M. Żukowski, M. Aspelmeyer, A. Zeilinger, *Nature* 446 (2007) 871.
12. L. Lovász: *Geometric representations of graphs* – monográfia előkészületben.
13. C. E. Shannon, *IRE Trans. Inform. Theory*, IT-2/3 (1958) 8.
14. S. Beigi, *Phys. Rev. A* 82 (2010) 010303(R).
15. J. G. Ren és mksai, *Nature* 549 (2017 szeptember 7.) 70-73.
16. S.-K. Liao és mksai, *Nature* 549 (2017 szeptember 7.) 43-47.
17. <http://physicsworld.com/cws/article/news/2017/sep/29/beijing-and-vienna-have-a-quantum-conversation>