ELLENÁLLÁSOKBÓL VAGY KONDENZÁTOROKBÓL ÁLLÓ HÍDKAPCSOLÁS EREDŐJE

Légrádi Imre
Sopron

Az *1.* és *2. ábrán* látható hídkapcsolások A és B pontjai között érvényesülő ellenállásérték R_{AB}, illetve kapacitásérték C_{AB} a szokásos számítások végrehajtásával egyetlen képlet formájában is megkapható. Ezt a nagyon egyszerű megjelenésű végképleteket mutatjuk be az alábbiakban.

(A mellékelt ábrákon is látható görbe nyilak a képletek levezetéséhez használható feszültségösszegzés sorrendjét irányítják.)

Az *1. ábra* ellenállásokból álló hídja esetén a következő összefüggések írhatók fel.

A bal oldali hurokban

$$I_1 R_1 + I_5 R_5 + I_3 R_3 = 0,$$

a jobb oldali hurokban

$$-I_5 R_5 + I_2 R_2 + I_4 R_4 = 0.$$

A C csomópontban

$$I_1 - I_2 - I_5 = 0,$$

a D csomópontban

$$I_5 + I_4 - I_3 = 0,$$

a B csomópontban

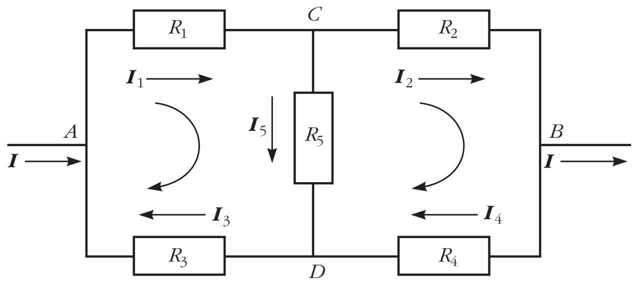
$$I_2 - I - I_4 = 0.$$

Az A pontban befolyó és a B pontban kifolyó áram I erősségét, mint paramétert kezeljük, így a fenti öt, egymástól független egyenlet elegendő az öt ismeretlen áramerősség meghatározásához.

Egy lehetséges lépéssorozat a következő: a C valamint a B csomóponti egyenletek összeadásával kapjuk, hogy

$$I_1 = I + I_4 + I_5,$$

Légrádi Imre a soproni Széchenyi István Gimnázium nyugalmazott fizika-matematika szakos tanára, a város díszpolgára. Tanári munkájának elismeréseként számos kitüntetést, köztük Rátz Tanár Úr Életműdíjat kapott.



1. ábra. Ellenállásokból álló hídkapcsolás.

a D csomóponti egyenletből pedig

$$I_3 = I_4 + I_5.$$

Ezeket felhasználva, az egyenletrendszerből a következő két ágbeli áramerősséghez jutunk:

$$I_4 = -\frac{R_1 R_5 + R_2 \left(R_1 + R_3 + R_5\right)}{R_5 \left(R_1 + R_3\right) + \left(R_2 + R_4\right)\left(R_1 + R_3 + R_5\right)}\, I,$$

$$I_5 = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{R_5 \left(R_1 + R_3\right) + \left(R_2 + R_4\right)\left(R_1 + R_3 + R_5\right)}\, I.$$

Ezek visszahelyettesítésével eljutunk a keresett R_{AB} eredő ellenállást megadó összefüggéshez, amely alakilag még bonyolult. Szerencsére, türelmet igénylő, de egyszerű további alakítással végül is szerény külsejű törtet kapunk az eredő számára hídkapcsolásunk esetén.

$$R_{AB} = \frac{R^{(3)}}{R^{(2)}}, \quad \text{ahol}$$

$$R^{(3)} = R_1 R_2 R_3 + R_1 R_2 R_4 + R_1 R_3 R_4 + R_1 R_3 R_5 + {}$$
$$+ R_1 R_4 R_5 + R_2 R_3 R_4 + R_2 R_3 R_5 + R_2 R_4 R_5 \quad \text{és}$$

$$R^{(2)} = R_1 R_2 + R_1 R_4 + R_1 R_5 + R_2 R_3 + {}$$
$$+ R_2 R_5 + R_3 R_4 + R_3 R_5 + R_4 R_5.$$

A kondenzátorokból álló híd (*2. ábra*) esetén, ha az A és B pontokban a hidat egy megfelelő forrásfeszültségű áramforrásra kapcsoljuk, akkor az öt kondenzátor együttese Q nagyságú elektromos töltést fogad be és egyetlen kondenzátornak tekinthető, amelynek kapacitását C_{AB}-vel jelöljük. A *2. ábra* szerinti C_1, C_2, C_3, C_4 és C_5 kapacitásértékű kondenzátorokban a feltöltődés után Q_1, Q_2, …, Q_5 nagyságú elektromos töltés alakul ki, és feszültségeik

$$\frac{Q_1}{C_1},\ \frac{Q_2}{C_2},\ \ldots,\ \frac{Q_5}{C_5}$$

értékűek lesznek, az ábrán jelzett polaritással. A teljes hídkapcsolás eredő C_{AB} kapacitása és a benne tároló-dó Q töltés

$$U_{AB} = \frac{Q}{C_{AB}}$$

kapocsfeszültséget határoz meg.

A C_{AB} kapacitásérték meghatározásához mindenek előtt meg kell határoznunk az egyes kondenzátorok Q_1, Q_2, …, Q_5 nagyságú töltéseit, pontosabban azt, hogy ezek mekkora részét képezik a kapcsolásba bevitt teljes Q töltésnek.

A kapcsolás két háromszögében, a bejelölt irányban haladva, összegezzük a feszültségeket, illetve a töltés eloszlását az egyes elágazási pontokban:

$$\frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_5}{C_5} - \frac{Q_3}{C_3} = 0,$$

$$\frac{Q_2}{C_2} - \frac{Q_4}{C_4} - \frac{Q_5}{C_5} = 0,$$

$$Q_1 + Q_3 = Q,$$

$$Q_2 + Q_4 = Q,$$

$$Q_1 = Q_2 + Q_5 .$$

Ezekből Q_1-re és Q_5-re a következő egyenletrendszert írhatjuk fel:

$$\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3}\right) Q_1 + \frac{1}{C_5} Q_5 = \frac{1}{C_3} Q,$$

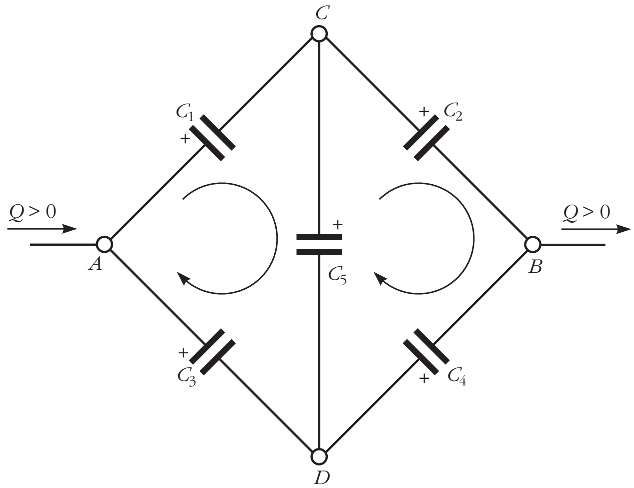
$$\left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_4}\right) Q_1 - \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_4} + \frac{1}{C_5}\right) Q_5 = \frac{1}{C_4} Q.$$

Ennek megoldásai az alábbiak:

$$Q_1 = \frac{\dfrac{1}{C_4 C_5} + \dfrac{1}{C_3}\left(\dfrac{1}{C_2} + \dfrac{1}{C_4} + \dfrac{1}{C_5}\right)}{\dfrac{1}{C_5}\left(\dfrac{1}{C_2} + \dfrac{1}{C_4}\right) + \left(\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_3}\right)\left(\dfrac{1}{C_2} + \dfrac{1}{C_4} + \dfrac{1}{C_5}\right)} Q,$$

illetve

$$Q_5 = \frac{\dfrac{1}{C_2 C_3} - \dfrac{1}{C_1 C_4}}{\dfrac{1}{C_5}\left(\dfrac{1}{C_2} + \dfrac{1}{C_4}\right) + \left(\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_3}\right)\left(\dfrac{1}{C_2} + \dfrac{1}{C_4} + \dfrac{1}{C_5}\right)} Q.$$



2. ábra. Hídkapcsolás kondenzátorokból.

Hídkapcsolásunk A–B pontjai közt jelentkező eredő kapacitását keresve, szükség van az U_{AB} feszültségre, amelyet például a felső ág két kondenzátorának soros kapcsolásából kaphatunk meg:

$$U_{AB} = U_1 + U_2 = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2}.$$

Itt $Q_2 = Q_1 - Q_5$ felhasználásával hozzájutunk U_{AB}-hez, illetve a keresett $C_{AB} = Q/U_{AB}$ kapacitásértékhez. Az ebben szereplő „szörnyű” törtalakzatokat közös nevezőre hozással, megfelelő bővítéssel azután a következő „szelíd” alakra hozhatjuk:

$$C_{AB} = \frac{C^{(3)}}{C^{(2)}}, \quad \text{ahol}$$

$$C^{(3)} = C_1 C_2 C_3 + C_1 C_2 C_4 + C_1 C_2 C_5 + C_1 C_3 C_4 +$$
$$+ C_1 C_4 C_5 + C_2 C_3 C_4 + C_2 C_3 C_5 + C_3 C_4 C_5 \quad \text{és}$$

$$C^{(2)} = C_1 C_3 + C_1 C_4 + C_1 C_5 + C_2 C_3 +$$
$$+ C_2 C_4 + C_2 C_5 + C_3 C_5 + C_4 C_5 .$$

A fenti képletekkel könnyen kiszámítható eredő értékek – természetesen – nem csupán önmagukért valók. A gyakorlatban a kapcsolás egyes ágaiban folyó áramok erősségét, illetve az egyes kondenzátorok feszültségét, töltését kell meghatároznunk. Ezekben az esetekben is előnyös, hogy először ki tudjuk számítani a teljes híd eredő ellenállását, illetve kapacitását, mert ezzel könnyíteni lehet az említett részadatok kiszámítását.