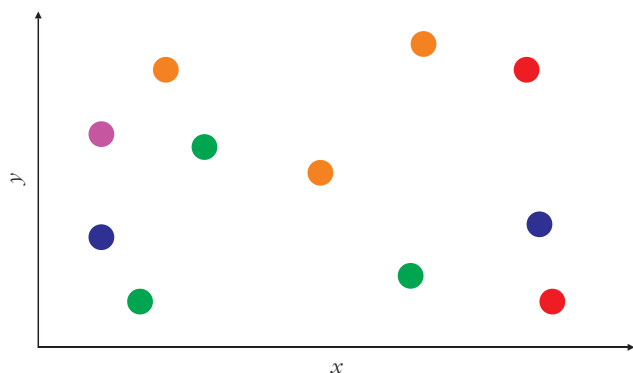


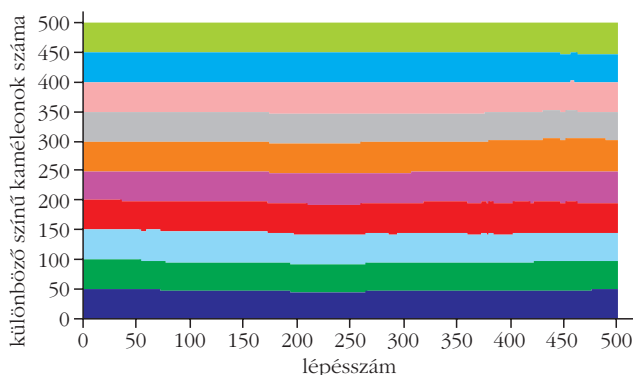
fizikai szemle



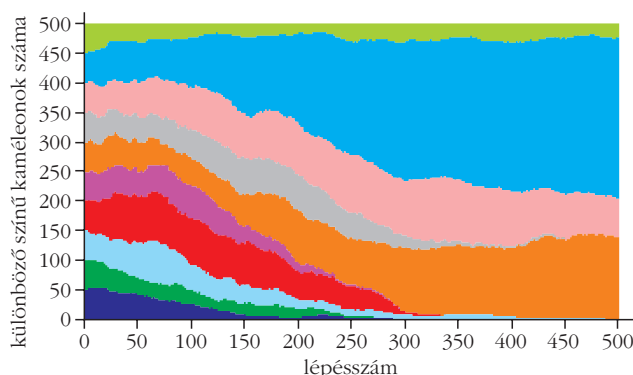
2015/1



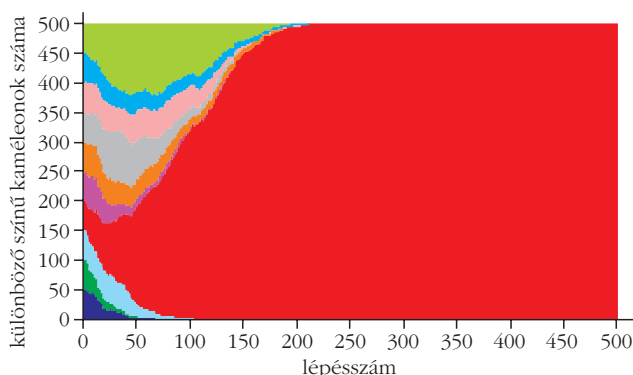
1. ábra. Egy lehetséges, véletlenszerűen választott kiindulási állapot: 2 db kék, 3 db zöld, 3 db piros, 1 db lila és 2 db narancssárga, r sugarú kaméleon a terráriumban.



2. ábra. A különböző színű kaméleonok darabszámváltozása, ha a színekhez közepes immunitási idő van beállítva, és a kaméleonok $2r$ sugarú környezetüket érzékelik ütközéskor.



4. ábra. A különböző színű kaméleonok darabszámváltozása, ha a színekhez alacsony immunitási idő van beállítva, és a kaméleonok $3,5r$ sugarú környezetüket érzékelik ütközéskor.



6. ábra. A különböző színű kaméleonok darabszámváltozása, ha – a piros kivételével – a színek immunitási ideje alacsony, és a kaméleonok $8r$ sugarú környezetüket érzékelik ütközéskor.

A 2015. évi

58. Fizikatanári Ankét és Eszközbemutató

A 2015. évi ankétot március 26-tól 29-ig Hévízen, a Hunguest Hotel Panorámában és az Illyés Gyula Általános Iskolában rendezzük meg.

Témák: 2015 a Fény Éve. Oktatás.

Állandóan frissülő részletek a Társulat www.elft.hu honlapján.

Az ankét 30 órás akkreditált továbbképzés.

A műhelyfoglalkozásokat március 27-én és 28-án délutánra tervezzük.

A műhelyfoglalkozások mellett a sikeres 10 perces kísérletek című programot is meg kívánjuk szervezni.

ELFT Tanári Szakcsoportjainak vezetőiségei

Fizikai Szemle

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

A Matematikai és Természettudományi Értesítőt az Akadémia 1882-ben indította
A Matematikai és Fizikai Lapokat Eötvös Loránd 1891-ben alapította

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat havonta megjelenő folyóirata.

Támogatók: a Magyar Tudományos Akadémia Fizikai Tudományok Osztálya, az Emberi Erőforrások Minisztériuma, a Magyar Biofizikai Társaság, a Magyar Nukleáris Társaság és a Magyar Fizikushallgatók Egyesülete

Főszerkesztő:

Szatmáry Zoltán

Szerkesztőbizottság:

Bencze Gyula, Czitrovszky Aladár, Faigel Gyula, Gyulai József, Horváth Gábor, Horváth Dezső, Iglói Ferenc, Kiss Ádám, Lendvai János, Németh Judit, Ormos Pál, Papp Katalin, Simon Péter, Sükösd Csaba, Szabados László, Szabó Gábor, Trócsányi Zoltán, Ujvári Sándor

Szerkesztő:

Füstöss László

Műszaki szerkesztő:

Kármán Tamás

A folyóirat e-mail címe:

szerkesztok@fizikaiszemle.hu

A lapba szánt írásokat erre a címre kérjük.

A beküldött tudományos, ismeretterjesztő és fizikatanítási cikkek a Szerkesztőbizottság, illetve az általa felkért, a témában elismert szakértő megalapozott, jövőhagyó véleménye után jelenhetnek meg.

A folyóirat honlapja:

<http://www.fizikaiszemle.hu>



A címlapon:

Környezetéhez alkalmazkodó kaméleon.

TARTALOM

Sódor Ádám: Csillagászati spektroszkópia	2
Blabó Miklós, Herczeg Tamás, Száz Dénes, Czinke László, Horváth Gábor, Barta András, Egri Ádám, Farkas Alexandra, Tarjányi Nikolett, Kriska György: Matt fekete autók poláros fényszennyezése: a matt bevonat sem környezetbarát – 1. rész	7
Márki-Zay János: Akik kiderítették hogyan történik a fémek képlékeny alakváltozása	10
A FIZIKA TANÍTÁSA	
Hárs György, Varga Gábor: A mágneses vektorpotenciál, mint valóságosan létező vektormező	14
Beke Tamás: Színes kaméleonok fázisátalakulása	18
Tichy Géza, Vankó Péter, Vigh Máté: A 2014. évi Eötvös-verseny	23
Kiss Lászlóné: Bródy Imre Országos Fizika Kísérletverseny, 2014	29
Akkreditált tanártovábbképzés	30
KÖNYVESPOLC	31
HÍREK – ESEMÉNYEK	33

Á. Sódor: Spectroscopy for astronomers

M. Blabó, T. Herczeg, D. Száz, L. Czinke, G. Horváth, A. Barta, Á. Egri, A. Farkas, N. Tarjányi, G. Kriska: Optical environmental pollution with polarized light even when cars are painted matt black – Part 1

J. Márki-Zay: The plastic deformation of metals and its mechanisms

TEACHING PHYSICS

G. Hárs, G. Varga: The magnetic vector potential – a factually existent vector field

T. Beke: Phase shifts occurring with coloured chameleons

G. Tichy, P. Vankó, M. Vigh: The Eötvös competition 2014

L. Kiss: The Imre Bródy contest of experiments in physics 2014

Postgraduate courses for teachers

BOOK, EVENTS

Á. Sódor: Spektroskopie für Astronome

M. Blabó, T. Herczeg, D. Száz, L. Czinke, G. Horváth, A. Barta, Á. Egri, A. Farkas, N. Tarjányi, G. Kriska: Optische Umweltverschmutzung mit polarem Licht auch durch matt schwarze Autofarben – Teil 1

J. Márki-Zay: Wie geht die plastische Deformation von Metallen vor sich?

PHYSIKUNTERRICHT

G. Hárs, G. Varga: Das magnetische Vektorpotential – ein tatsächlich existierendes Vektorfeld

T. Beke: Der Phasenwechsel bei farbigen Kaméleons

G. Tichy, P. Vankó, M. Vigh: Der Eötvös Wettbewerb 2014

L. Kiss: Der Imre-Bródy-Wettbewerb in Physikexperimenten 2014

Weiterbildung für Lehrer

BÜCHER, EREIGNISSE

A. Шодор: Спектроскопия для астрономов

M. Блабо, Т. Херцег, Д. Саз, Л. Цинке, Г. Хорват, А. Барта, А. Эгри, А. Фаркас, Н. Тарьяни, Г. Кришка: Оптическое загрязнение поляризованным цветом осуществляется даже матовыми красными автомобилями – часть первая

Я. Марки-Зай: Пластическая деформация металлов и ей механизм

ОБУЧЕНИЕ ФИЗИКЕ

Г. Харш, Г. Варга: Магнитовой векторпотенциал – действительно существующее векторное поле

Т. Бэкэ: Фазовые сдвиги света у красных камелеонов

Г. Тихи, П. Ванко, М. Виг: Конкурс им. Этвеша 2014. года

Л. Кисс: Конкурс физических экспериментов им. Имре Броди 2014. года

Дальнейшее обучение учителей

КНИГИ, ПРОИСХОДЯЩИЕ СОБЫТИЯ

Szerkesztőség: 1092 Budapest, Ráday utca 18. földszint III., Eötvös Loránd Fizikai Társulat. Telefon/fax: (1) 201-8682

A Társulat Internet honlapja <http://www.elft.hu>, e-postacím: elft@elft.hu

Kiadja az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, felelős: Szatmáry Zoltán főszerkesztő.

Kéziratokat nem őrzünk meg és nem küldünk vissza. A szerzőknek tiszteletpéldányt küldünk.

Nyomdai előkészítés: Kármán Stúdió, nyomdai munkálatok: OOK-PRESS Kft., felelős vezető: Szathmáry Attila ügyvezető igazgató.

Terjeszti az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, előfizethető a Társulathoz vagy postautalványon a 10200830-32310274-00000000 számú egyzámlán.

Megjelenik havonta, egyes szám ára: 800.- Ft + postaköltség.

HU ISSN 0015–3257 (nyomtatott) és HU ISSN 1588–0540 (online)

Fizikai Szemle
MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

megjelenését támogatják:



Néhány különleges esettől eltekintve egy csillag még a legnagyobb optikai távcsövekben is egyetlen fénypontnak látszik csupán. A csillagokról mindössze két dolgot figyelhetünk meg: égi pozíciójukat és hozzánk érkező fényüket. Az a kevéske csillagfény azonban, amelyet távcsöveinkkel felfogunk, rengeteg információt hordoz a kibocsátó égitestről. A fényesebb csillagok között szabad szemmel is megfigyelhetünk különböző színűeket, a vöröstől a fehérén át egészen a kékig, ami a csillagok színösszetétele közötti különbségeket jelzi. A szemünk három alapszín tud megkülönböztetni, s már egy hasonló elven működő csillagászati műszer is fontos paramétereket szolgáltat az égitestekről. A látszó szín például a csillagok felszíni hőmérsékletével kapcsolatos. De az asztrofizikusok nem elégszenek meg az égitestek fényességének néhány hullámhossztartományban való megméréssel. A hullámhossz szerint felbontott csillagfény tanulmányozása, a spektroszkópia az asztrofizika igen hatékony megfigyelési módszere.

Áttekintésemben a csillagok optikai spektroszkópiájának lehetőségeire koncentrálok. Optikai alatt a látható fény tartományának az infravörös (IR) és ultraibolya (UV) irányú enyhe kiterjesztését tekintjük, nagyjából 300–1000 nm között. Ez az a hullámsáv, amelyben a Föld felszínéről a légkörön keresztül, hagyományos optikai eszközökkel végezhető megfigyelés.

A spektrográf

A távcső által összegyűjtött fényt a spektrográf hullámhossz szerint felbontja és rögzíti a színeképet. A színbontás prizmával vagy optikai ráccsal történhet. A távcső fókuszsíkjaiban összegyűjtött fény egy résen át lép a spektrográfba, amely lényegében ezt a részt képezi le a detektor felületén, hullámhossztól függően változó helyre. A rögzítés ma már szinte kizárólag digitális technikával, CCD-detektorokkal történik.

A működési hullámhossztartomány mellett a spektrográfok legfontosabb jellemzője a spektrális felbontás,

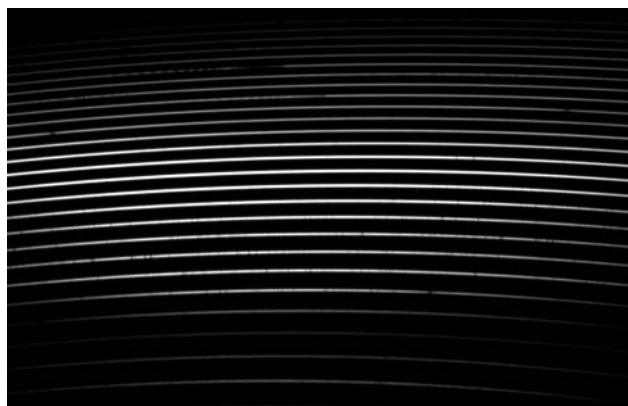
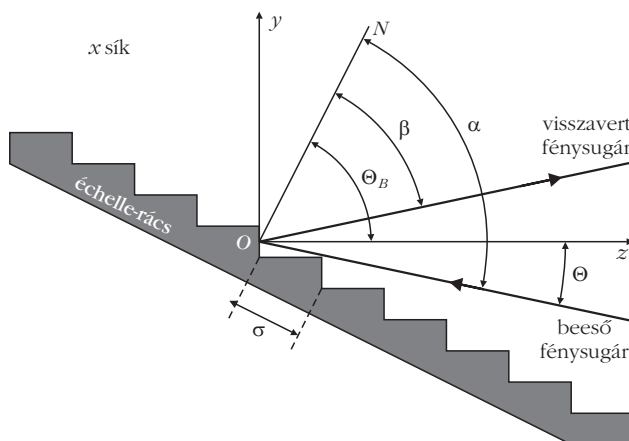
$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda},$$

ahol $\Delta\lambda$ a spektrumban még éppen megkülönböztethető két hullámhossz közötti legkisebb különbség λ hullámhossznál. Bár a nagyobb felbontás általában jobb, de gyakran nem szükséges, illetve felesleges komplikációt jelenthet. A csillagászati spektroszkópiában nagyjából a $10\,000 < R < 50\,000$ tartományt tekintjük közepes felbontásnak, míg e tartomány alatt, illetve fölött kis, illetve nagy felbontásról beszélünk.

A prizma csak kis felbontást tesz lehetővé, mivel a felbontás növeléséhez a prizma méretét is növelni kell, ami hamar kezelhetetlenné válik. Ráadásul a prizma egydimenziós spektrumot állít elő, ami nem igazán illik a modern CCD-detektorokhoz, amelyek téglalap alakúak, jellemzően nem túlságosan elnyújtott oldalarányúval. Így a CCD-chip hosszabb oldalának irányában mért pixelszám limitálja a felbontást, illetve a lefedett spektrális tartományt. További probléma, hogy a prizma az optikai tartomány kék végét sokkal jobban szét húzza, mint a vöröset, így a felbontás egyenetlen.

A prizma egy érdekes spektroszkópiai alkalmazási lehetősége az objektívprizma: a távcső bemeneti apertúrája elé helyezett kis nyílásszögű prizmával meglehetősen kis felbontású spektrumokat vehetünk fel, de azokat a látómező összes égitestjéről egyszerre. Ilyen eszköz rendelkezésre áll Magyarországon az MTA CSFK Csillagászati Intézetének Piskés-tetői Observatóriumában a 60 cm-es Schmidt-távcsövön.

1. ábra. Felül az échelle-rács keresztmetszete (forrás: ELTE Gothard Asztrofizikai Observatórium – <http://www.gothard.hu/astronomy/astroteaching/instrumentation/echelle-spectroscopy/echelle-spectroscopy.php>). A lépcsőfokok dőlése felel a fény magas rendekbe való koncentrálásáért. Alul échelle-spektrum a detektoron. Minden fényes sáv egy-egy elhajlási rendnek felel meg. Az intenzitás az échelle-rács tükröző felületének köszönhetően a rendek középre koncentrálódik (forrás: <http://www.astrolight-instruments.com/echelle.php>).



Az optikai rács, különösen annak egy speciális fajtája, az échelle-rács sok szempontból előnyösebb közepes, illetve nagy felbontású színeképek létrehozására. Az échelle-rács tulajdonképpen egy lépcső alakú tükör, nagy vonalsűrűséggel (1. ábra, felül). A lépcső egyes fokairól visszaverődő fénynyalábok interferálnak egymással, és a hullámhossztól függő elhajlás jön létre, hasonlóan más optikai rácsokhoz. Az échelle-rács előnye egy egyszerű optikai ráccsal szemben az, hogy a tükröző felületek megfelelő dőlésszöge miatt a fény jelentős hányada jut a magas rendekbe ($m > \sim 30$), vagyis olyan diffrakciós irányokba, ahol a szomszédos rácsvonalakról visszavert fénysugarak közötti optikai úthossz a hullámhossz sokszorosa. Ez nagy spektrális felbontást tesz lehetővé viszonylag alacsony fényvesztés mellett. Probléma azonban, hogy a magas diffrakciós rendek átfedik egymást. Ezek az átfedő rendek egy keresztdiszperziós elemmel, például prizmával az échelle-rács diszperziójára merőleges irányban széthúzhatók, így a rendek már egymás mellé kerülnek. Ekkor egy téglalap alakú CCD-detektorral az egymás mellett sorakozó rendek egy-egy szakaszát tudjuk egyszerre lefedni, így a kétdimenziós detektor jól kihasználható, az egyes rendekben nagy felbontás érhető el, mégis széles hullámhossztartomány fedhető le a műszerrel (1. ábra, alul).

A spektrográf és a távcső

A távcső által fókuszált fényt el kell juttatnunk a spektrográfba. A hagyományos megoldás a távcső fókuszsíkban elhelyezett rés. Itt a távcső kimenete, a fókuszsík fizikailag egybeesik a spektrográf bemene-tével. Mivel a távcső az objektumok beirányzásakor és égi mozgásuk követése során mozog, általában a fókuszsík is két szabadsági fok szerint mozoghat. Ügyes megoldásokkal a szabadsági fokok száma egyre, vagy bonyolultabb optikával akár nullára is csökkenthető, de a résspektrográf gyakran fizikailag együtt mozog a távcsőtubussal.

A mozgás több nehézséget is okoz: a műszerre ható gravitáció iránya időben változik, ami lehajlászhoz vezet, aminek minimalizálása komoly mechanikai stabilitást követel a spektrográf szerkezeti és optikai elemeitől. A távcső teherbírása véges, így igazán bo-

nyolult, nagy tömegű spektrográf gyakran nem is szerelhető fel rá. A spektrográf klimatizálása nehéz vagy megoldhatatlan, ami pedig szintén fontos a stabilitás szempontjából.

Azimutális mechanikájú (függőleges és vízszintes tengelyek körül forgatható) távcsöveknél a fő- és segéd-tükör után a fényútba helyezett harmadik tükörrel a fény a magassági tengely mentén kivezethető a távcsőből a Nasmyth-fókuszba, ahol a távcső mellé helyezett, a függőleges tengely körül a távcsővel együtt forgó platformra építhető a műszer. Ide nagyobb spektrográf helyezhető, mint magára a tubusra, és a műszerre ható gravitációs erő iránya is állandó, de a platform továbbra is mozog.

Ennél is bonyolultabb, több tükörből álló rendszerrel a távcső mechanikai tengelyei mentén egészen távolra elvezethető a fény, és így már a fókusz-sík teljesen függetleníthető a távcsőtubus mozgásától. Ez a coudé-rendszer, amely nagyméretű, jó stabilitású spektrográf-berendezés építését teszi lehetővé egy izolált helyiségben.

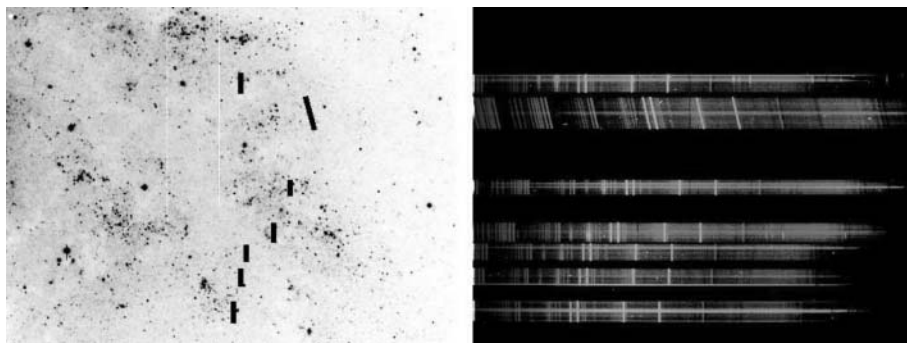
A coudé-rendszert azonban az elmúlt évtizedekben teljesen kiszorította a sokkal egyszerűbb és szó szerint is rugalmasabb üvegszál-optika. Az üvegszál a spektrográf rését helyettesíti, segítségével a távcső fókusz-síkjából 20-50 m hosszú vékony és flexibilis optikai szál vezeti a fényt a spektrográf megfelelő mechanikai és klimatikus stabilitással kialakítható, izolált helyiségébe.

Bár a piszkás-tetői 1 m-es távcsövön is kiépítették a coudé-fókusz használatának lehetőségét, ezt az üzemmódot sosem használták. A Csillagászati Intézet jelenleg beüzemelés alatt álló új, közepes felbontású échelle-spektrográfja is üvegszállal kapcsolódik az 1 m-es távcsőhöz.

A kétdimenziós CCD-detektorok több objektum együttes spektroszkópiáját is lehetővé teszik. Ha megelégszünk objektumonként alacsonyabb spektrális felbontással, vagy nagy felbontás mellett kis hullámhossztartománnyal, akkor sok objektum spektruma rendezhető egymás mellé a detektoron. Ilyen megoldásokat már résspektrográfok esetében is kigondoltak, azonban a rések elhelyezése és a diszperziós irány kiválasztása komoly sakkozást igényel, hogy a spektrumok ne fedjenek át egymással, ami erős megszorítást jelent a megfigyelhető objektumok számára és égi elrendeződésükre (2. ábra).

A szál-optika megjelenése itt igazi áttörést hozott. A fókusz-síkban elhelyezhető üvegszálvégzések bizonyos, kevésbé szigorú megszorítások mellett szinte teljesen elrendezhetők, míg az optikai szálak spektrográfba bevezetett másik végzódései egyszerűen egy vonalba rendezhetők, tökéletesen kihasználva a CCD-chip felületét.

2. ábra. Egy többobjektum-résspektrográf működése. Balra a rések vetületét látjuk az égbolton, jobbra pedig az ezekből származó spektrumokat a detektoron (forrás: Fűrész G. PhD-értekezés, SZTE).



A csillagok színeképének kialakulása

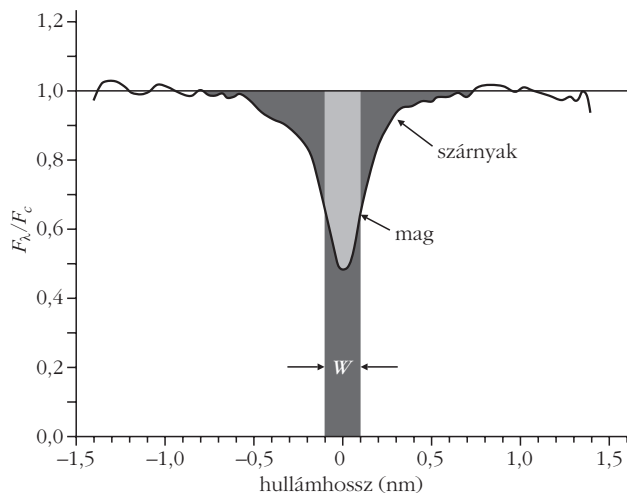
A csillagok kisugárzott fénye az égitest egy szűk külső tartományából, a csillag légköréből származik. Ez egyben a csillaglégkör definíciója is, hiszen a csillag légkörének nincsen olyan nyilvánvaló alsó határa, mint például a földi légkörnek a földfelszín. A csillagok legkülső gázrétegeitől folytonos az átmenet a belső, egyre sűrűbb és egyre forróbb tartományokba. A csillag belsejéből kifelé terjedő energiát hordozó elektromágneses sugárzás fotonjainak szabad úthossza a gáz ritkulásával egyre nő. A légkörben ez a szabad úthossz már kellően nagy ahhoz, hogy a fotonok jelentős része elnyelődés és újra kisugárzódás nélkül kijusson a világűrbe. Másképp kifejezve a csillaglégkör alsó határa ott van, ahol a gáz kívülről befelé haladva optikailag vastaggá válik, ameddig belelátunk a csillagba.

Azonban a fotonok szabad úthossza erősen függ a hullámhossztól, éspedig meglehetősen bonyolult módon. Az egyes atomok kötött-kötött elektronátmenetei energiájának megfelelő hullámhosszakon a foton elnyelődésének valószínűsége megnő, így ezeken a hullámhosszakon a fotonok szabad úthossza kisebb, azaz a gáz opacitása nagyobb, mint a környező hullámhosszakon. Ha a foton elnyelődik, az atom vagy molekula gerjesztett állapotba kerül. A gerjesztett állapot megszűnésével egy hasonló hullámhosszú foton ismét kibocsátódik, de nem feltétlenül az elnyelt foton haladásának irányában. Ez a mechanizmus színeképvonalakat hoz létre a csillag spektrumában az energiaszintekre, és végső soron az adott kémiai elemre vagy molekulára jellemző hullámhosszakon.

A csillaglégkör hőmérséklete a mélységgel változik, jellemzően belülről kifelé csökken. Bizonyos körülmények között a légkör, illetve az afölötti régiók egyes tartományaiban azonban felléphet hőmérsékleti inverzió, amikor a hőmérsékleti rétegződés megfordul: a külsőbb réteg ilyenkor forróbb. A színeképvonalak hullámhosszán a fotonok már említett rövidebb szabad úthossza miatt kevésbé mélyre látunk a csillag anyagába, mint két színeképvonal közötti hullámhosszakon. Ha ez a külsőbb réteg hűvösebb, mint az alatta lévők, akkor elnyelési (abszorpció) vonalat látunk a spektrumban: a fény intenzitása az adott hullámhosszon alacsonyabb a környezetéhez képest. Ha azonban hőmérsékleti inverzióval állunk szemben, és a spektrumvonal fénye forróbb tartományból származik, mint a környezetéé, akkor kibocsátási (emissziós) vonalat látunk: az intenzitás a környező hullámhosszaknál erősebb. Szintén emissziós vonalat figyelhetünk meg a színeképben, ha a csillagot kiterjedt gázfelhő veszi körül, amelyet a csillag fénye gerjeszt.

A csillaglégkörben jelen lévő minden kémiai elemnek, ionnak, valamint a leghűvösebb csillagokon megtalálható molekuláknak csak rájuk jellemző hullámhosszaknál vannak színeképvonalaik, amelyek az emberi ujjlenyomathoz hasonlóan egyedi nyomokat hagynak a csillag spektrumán.

Néhány fontos spektroszkópiai alapfogalom ismerete szükséges a későbbiek megértéséhez:



3. ábra. Az ekvivalens szélesség (W) meghatározása normált spektrumban (forrás: <http://www.bdnyc.org/tag/eq-width>).

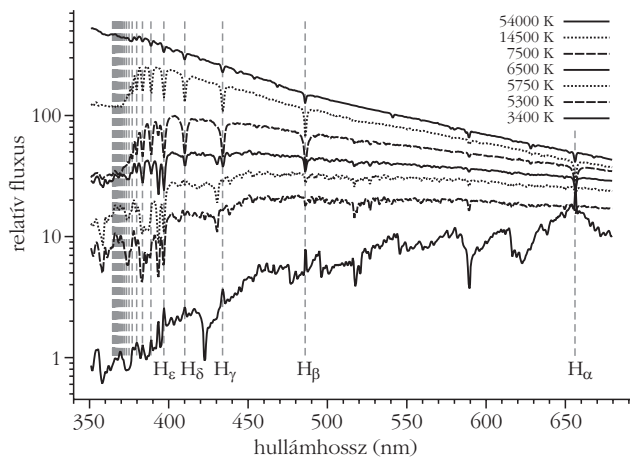
Kontinuumnak nevezzük a színeképvonalak közötti hullámhossztartományokból eredő sugárzást. Ennek alakját a kötött-szabad, illetve szabad-szabad elektron-foton kölcsönhatások, valamint a csillaglégkör hőmérséklete határozzák meg.

Fluxus szerint kalibrált és normált spektrum: a műszer által produkált nyers, instrumentális színeképet fluxus szerint kalibrálni, vagy normálni kell további elemzés előtt. Az instrumentális spektrum tartalmazza a távcső, a spektrográf és a benne lévő CCD-chip együttes hullámhossz-érzékenységi görbéjéből eredő intenzitásorzításokat. A fluxuskalibrációhoz színeképfelvételeket kell készíteni a műszerrel standard csillagokról. Ekkor lényegében a műszer hullámhossz-érzékenységét állapítjuk meg, és erre korrigáljuk a mért spektrumot. A fluxuskalibrált spektrum egymástól távoli hullámhosszain mért intenzitásviszonyok fizikailag helyes fluxusarányokat fejeznek ki. Ennél valamivel egyszerűbb a spektrum normálása. A normált spektrumot úgy kapjuk meg, hogy az instrumentális spektrumot elosztjuk a kontinuumszinttel, vagyis a kontinuumot egységnyire normáljuk. A fluxus szerint kalibrált és normált spektrumok más-más vizsgálatok elvégzésére alkalmasak.

Ekvivalens szélesség: a spektrumvonalak erősségét a vonalprofil pontos alakjától függetlenül egyetlen értékkel jellemezhetjük. Ez az ekvivalens szélesség, amely azt jelzi, hogy a vizsgált színeképvonal mennyi intenzitást „takar ki” a kontinumból. Egy színeképvonal ekvivalens szélessége egy olyan téglalap szélessége hullámhosszban kifejezve, amelynek területe megegyezik a spektrumvonal kontinuum alatti területével (3. ábra). Definíciónk értelmében az emissziós vonalak ekvivalens szélessége negatív.

A csillagszíneképet meghatározó paraméterek

Az egyes spektrumvonalak jelenlétét, eltolódását, erősségét, a vonalprofil szélességét és pontos alakját nem csak az elemgyakoriságok határozzák meg. A csillaglégkörben uralkodó hőmérséklet és nyomás, az ott



4. ábra. A hőmérséklet hatása a fluxuskalibrált színekpre. A Balmer-sorozat hullámhosszait függőleges szaggatott vonalak jelölik, amelyek a Balmer-ugrás elméleti hullámhosszához konvergálnak 364,6 nm-nél.

végbemenő mozgások (például mikro- és makroturbulencia, csillagpulzáció), a csillag forgása, látóirányú mozgása, a felszíni inhomogenitások (hőmérsékleti, illetve kémiai összetételbeli foltok) és a mágneses tér mind befolyásolják a megfigyelt spektrumot. Ráadásul a csillag környezete (kísérő csillag jelenléte, por- és gázkorong, anyagkidobódás) is alakítja a színeképet.

Mindezek egyfelől bonyolítják a megfigyelt spektrum értelmezését, ugyanakkor rengeteg dolgot tudhatunk meg az egyes csillagokról a színeképük részletes analizéséből. A spektrumot befolyásoló legfontosabb hatásokat a következőkben részletesebben is megvizsgáljuk. A legtöbb paraméter kis vagy közepes felbontású spektrumban is tanulmányozható, a színkép vonalak alakjának (vonalprofil) részletes vizsgálatahoz azonban nem árt a nagy spektrális felbontás.

Kémiai összetétel

Egy csillagspektrum megjelenését alapvetően nem a kémiai összetétel, hanem a hőmérséklet határozza meg. Mégis a spektroszkópiáról a legtöbb embernek először a kémiai összetétel vizsgálata jut eszébe.

E látszólagos ellentmondás oka az, hogy a csillagok kémiai összetétele nagyon hasonló. A csillagok légköre nagyjából háromnegyed részben hidrogénből, egynegyed részben héliumból áll. A csillagászok által csak „fémek” gyűjtőnéven emlegetett összes többi elem gyakorisága (bár csillagról csillagra több nagyságrenddel is eltérhet) legfeljebb csak 2%-ot tesz ki. Ugyanakkor az elemek ionizáltsági foka hőmérséklet-függő, és ez meghatározza az elnyelési vonalak megjelenését a spektrumban.

Ha azonban már jó közelítéssel meghatároztuk a spektrumból a vizsgált csillag légköri hőmérsékletét és nyomását, akkor az elnyelési vonalak erősségéből a kémiai összetételre is következtetni tudunk.

Hőmérséklet

A csillagok felszíni hőmérséklete, az egyik legalapvetőbb csillagparaméter, nagyon széles skálán mozoghat. A legkisebb tömegű, egyben leghűvösebb

felszínű, magjukban még stabil hidrogénfúziót fenntartani képes csillagok hőmérséklete nagyjából 2000 K. A legforróbb csillagok a csillagfejlődés végállapotát jelentő elfajult neutroncsillagok és fehér törpék, felszíni hőmérsékletük felső határa 200 000 K.

Bár a csillaglégkörök spektruma csak nagyon durván közelíthető feketetest-sugárzással, a csillagok sugárzási maximuma a Wien-féle eltolódási törvénnyel összhangban a hosszabbtól a rövidebb hullámhosszak felé tolódik el a hőmérséklet emelkedésével (4. ábra).

Kiemelt jelentősége van a leggyakoribb elem, a hidrogén vonalainak, azok közül is a Balmer-sorozatnak, mivel ezek esnek az optikai tartományba. A Balmer-sorozat hullámhosszai a $H\ n \geq 3$ és $n = 2$ elektronhéjai közötti átmenetnek felelnek meg. Az $n = 3 \leftrightarrow 2$ átmenethez 656,3 nm hullámhossz tartozik, ezt $H\alpha$ -val jelöljük, az egyre magasabb energiaszintű átmenetek jelölése pedig sorban $H\beta$, $H\gamma$, $H\delta$ stb. Az $n = \infty \leftrightarrow 2$ átmenethez tartozó hullámhossz 364,6 nm, a 2. elektronhéj ionizációját jelenti. Ilyen vagy ennél nagyobb energiájú fotonok teljesen leszakítják a hidrogénatom második elektronhéján tartózkodó elektronokat, ezek a hullámhosszak kötött-szabad elektronátmenetnek felelnek meg. Az ionizációs küszöb ugrást okoz a kontinuumszintben, ez a Balmer-ugrás.

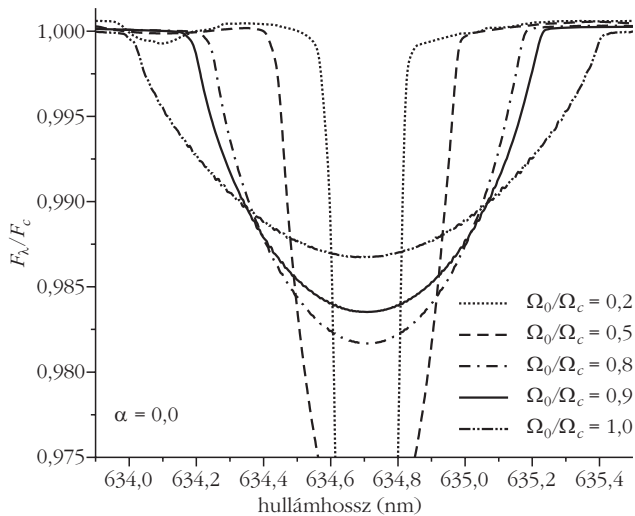
A 4. ábra példáin megfigyelhető, hogy a legforróbb csillagok légkörében a hidrogén és a fémek nagyrészt ionizált állapotban vannak, ezért nem produkálnak erős elnyelési vonalakat. Jellemző az ionizált hélium vonalainak jelenléte, Balmer-ugrás nincs, vagy nagyon kicsi: az UV-fluxus jelentős. A forrótól a hűvösebb csillagok felé haladva a Balmer-vonalak előbb erősödnek, majd ismét gyengülnek, ezzel együtt a Balmer-ugrás jelentőssé válik, majd az is gyengül. Ennek az az oka, hogy a H második elektronhéjának populáltsága 9500 K körül éri el a maximumát.

A hőmérséklet csökkenésével a He semlegessé válik majd vonalai eltűnnek, a fémek először magasabb ionizáltsági fokon jelennek meg, majd az ionizáltság csökken, és semleges fémvonalak is láthatóak lesznek. A leghűvösebb csillagok légkörében már molekulák (például TiO) is létrejöhetnek, a hőmozgás nem bontja szét ezeket, így a molekulák vibrációs és rotációs energiaszintjeire jellemző elnyelési sávok is feltűnnek.

Nyomás

A légkörben uralkodó nyomás a csillag felszíni gravitációs gyorsulásával és ezen keresztül a csillag tömegével és sugarával függ össze. Nagyobb nyomás nagyobb sűrűséget jelent, nagyobb sűrűség mellett pedig gyakoribb az atomok egymás közötti szoros megközelítése, aminek a hatására az elektronpályák energiaszintjei kissé eltolódnak egymáshoz képest. Emiatt az elektronok energiaszint-átmenetei „elmosódnak”, ami a kibocsátott, illetve elnyelt fotonok hullámhosszának hasonló elmosódását, végeredményben a spektrumvonalak kiszélesedését okozza.

Az azonos tömegű, ám eltérő fejlődési állapotú, eltérő előéletű csillagok felszíni hőmérséklete és su-



5. ábra. A csillag forgásának hatása a vonalprofilra. A rotációs sebesség (Ω_0) a kritikus, azaz a szétszakadás nélkül még lehetséges legnagyobb rotációs sebességhez (Ω_c) viszonyítva (forrás: Zorec et al. 2011, Astronomy and Astrophysics, 526, 87).

gára nagyon tág skálán változhat. Nagyobb sugárhoz alacsonyabb felszíni nyomás és alacsonyabb gravitációs gyorsulás tartozik, ami élesebb vonalakat jelent a csillag színképében.

Mikro- és makroturbulencia

A mikro- és makroturbulencia a csillagléggör atomjainak nem termikus, de izotróp sebességeloszlású, azaz turbulens mozgását jelenti. Ilyen mozgásokat okoz a légkörben például a konvekció. A turbulens cellák méretétől függően beszélünk mikro- és makroturbulenciáról, habár az átmenet a kettő között értelemszerűen folytonos. A turbulencia által okozott sebességeloszlás látóirányú vetületét Gauss-eloszlással közelítjük. A térfogatelemek mozgása miatt a belőlük kibocsátott fotonok Doppler-eltolódást szenvednek, a megfigyelt vonalprofil kiszélesedik. A kétféle turbulencia hatása a spektrumra egy-egy sebesség dimenziójú paraméterrel, a sebességeloszlás félszélességével jellemezhető. Az elvi különbség a kétféle turbulencia között az, hogy míg a makroturbulencia csak a vonalprofil szélességét növeli, változatlan ekvivalens szélesség mellett, addig a mikroturbulencia a színkép-vonalak kialakulására is hatást gyakorol, tehát az egyes vonalak ekvivalens szélességét is befolyásolja.

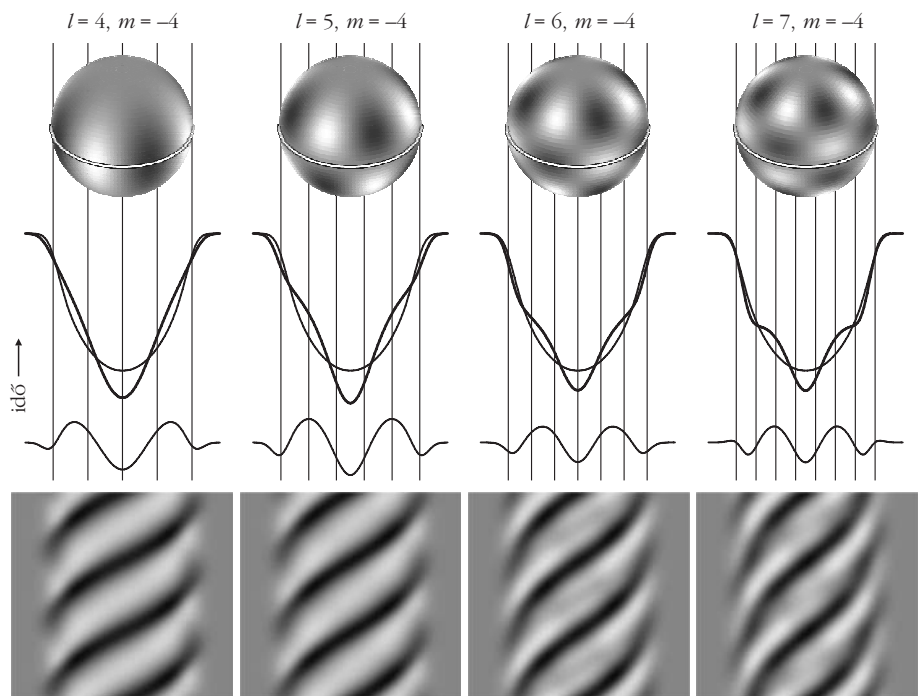
Forgási vonalkiszélesedés

A csillag forgása miatt a felszín mozog, és e mozgási sebesség látóirányú komponense Doppler-eltolódást okoz az adott felülelelemről kibocsátott fotonok hullámhosszában. A megfigyelt színkép az egyes felülelelemek színképének a felénk forduló csillag-félgömbre vett integrálja, amelyben így az egyes vonalak kiszélesednek. A csillagkorong – a forgástengely vetületének megfelelő irányú – középső sávja nem mozog látóirányban, míg a legnagyobb látóirányú rotációs sebességek a korong azon két szélső pontját jellemzik, amelyek ettől a középső sávtól a legtávolabb látszanak. Könnyen belátható, hogy mindez elliptikus vonalprofil-kiszélesedést okoz – legalábbis első közelítésben, a peremsötétedést és a differenciális rotációt figyelmen kívül hagyva. A kiszélesedés mértéke függ az egyenlítői forgási sebességtől (v_{eq}), valamint a forgástengely látóirányhoz viszonyított hajlásszögétől – ez az inklináció (i) – éspedig $v_{eq} \sin i$ szerint (5. ábra).

Csillagfoltok hatása

Bizonyos csillagok felszínén hőmérsékleti, illetve kémiai inhomogenitások, foltok lehetnek. A csillagfoltok hatása a rotációsan kiszélesedett vonalprofilban figyelhető meg. Ha a felszínen inhomogenitások vannak, akkor a vonalprofil adott felszínelemből eredő szegmense torzul a szabályos elliptikus alakhoz képest. Ha mért spektroszkópai idősor is a rendelkezésünkre áll, akkor megfigyelhetjük a folt átvonulását a forgó csillag látható félgömbjén. A csillagkorongra

6. ábra. Csillagpulzáció hatása a vonalprofilra. Az effektus nagyon hasonlít a csillagfoltok hatására. A pulzáció azonban jellemzően szabályosabb, mint az aktív csillagokra jellemző, rövid időskálán fejlődő, migráló csillagfoltok hatása. A hosszú élettartamú, stabil foltok, illetve a pulzáció között azonban esetenként nehéz vagy lehetetlen különbséget tenni (l a longitudinális – a csillag egyenlítője által kijelölt főkörmenti – csomóhelyek száma, m a meridionális – a csillag egyenlítőjére merőleges irányú főkör menti – csomóhelyek száma) (forrás: Telting & Schrijvers 1997, Astronomy and Astrophysics, 317, 723).



beforduló folt okozta vonalprofil-torzulás a kék oldalon jelenik meg, és onnan a vörös oldal felé mozog. Az idősor analíziséből megállapíthatjuk a rotációs periódust, és akár a felszíni foltok szélességi és hosszúsági koordinátáit is rekonstruálhatjuk. A csillagok nem merev testként forognak, az egyenlítő és a pólusok forgási periódusa gyakran eltér. Kellően kiterjedt spektrumidősorból ez a differenciális rotáció is megállapítható.

Csillagpulzáció

Sok csillag nem állandó és statikus, hanem periodikusan oszcillál, pulzál. Ez a felszínen szabályos alakzatokban megjelenő mozgások és hőmérséklet-változások formájában jelentkezik. E változások a spektrumvonalban, a forgáshoz és a foltokhoz hasonlóan Doppler-eltolódásként, illetve a rotációs vonalprofil torzulásaiként jelennek meg. A pulzáció vizsgálatához feltétlenül időszormérésekre van szükség. Sok pulzáló változócsillag egynél több, némelyik akár több száz frekvenciával is oszcillálhat egyszerre. Az egyes frekvenciáknak megfelelő vonalprofil-változások jellemzőek a csillagnak arra a rezgési módusára, amelyhez az adott frekvencia tartozik. Ez lehetőséget ad spektroszkópiai módusazonosításra, ami nagyon fontos a csillagpulzáció vizsgálatához (6. ábra).

A pulzáló csillagok tanulmányozásakor a spektroszkópiai megfigyelések általában kiegészítő jellegűek a fotometria mellett. A pulzációs frekvenciák ugyanis a szélesebb fotometriai hullámsávokban megfigyelt fényességváltozásokból is megállapíthatók, amihez egyszerűbb műszer és kisebb távcső is elegendő,

hiszen a kellően hosszú idősorokhoz sok távcső-idő szükséges. Azonban a magasabb rendű pulzációs módusokat ($I > \sim 4$), amelyeknél a csillagfelszín sok kis szegmense ellentétes fázisban változik, a felület-elemek egymást kioltó ellentétes fényességváltozásai miatt fotometriai módszerrel szinte lehetetlen megfigyelni. A spektroszkópiai módszer ilyen módusok megfigyelését is lehetővé teszi.

Csillagászati spektroszkópia Magyarországon

A magyar csillagászok spektroszkópiai műszerellátottsága egészen a közelmúltig meglehetősen rossz volt, az utóbbi években azonban jelentős javulás indult e téren. Az első hazai échelle-spektrográf, az ELTE szombathelyi Gothard Asztrofizikai Observatóriumának eShel nevű műszere néhány éve állt működésbe. Ez a spektrográf a 420–870 nm közötti tartományt vizsgálja, $R = 11\,000$ felbontással. A távcsőhöz üveg-szállal kapcsolódó, aktatáska méretű spektrográf hordozható, így a szombathelyi távcsövek mellett az ország legnagyobb, piszkés-tetői 1 m-es optikai távcsövével is könnyen használható.

E cikk írása idején pedig éppen megkezdte működését az MTA Konkoly Thege Miklós Csillagászati Intézete 1 m-es távcsövének saját, állandó échelle-spektrográfja is. Ez a műszer a 380–900 nm tartományban $R = 22\,000$ felbontást tud elérni.

Ez a két új magyar échelle-spektrográf várhatóan nagy lökést fog adni a hazai spektroszkópiai vonatkozású asztrofizikai kutatásoknak.

MATT FEKETE AUTÓK POLÁROS FÉNYSZENNYEZÉSE: A MATT BEVONAT SEM KÖRNYEZETBARÁT – 1. RÉSZ

Blahó Miklós, Herczeg Tamás, Száz Dénes, Czinke László, Horváth Gábor
ELTE Biológiai Fizika Tanszék, Környezetoptika Laboratórium

Barta András

Estrato Kutató és Fejlesztő Kft., Budapest

Egri Ádám, Farkas Alexandra, Tarjányi Nikolett

MTA Ökológiai Kutatóközpont, Duna-kutató Intézet

Kriska György

ELTE Biológiai Szakmódszertani Csoport

MTA Ökológiai Kutatóközpont, Duna-kutató Intézet

A sima felszínű, fényes fekete autók egyes karosszériarészei (például motorháztető, tető, csomagtartófedél, szélvédő) vízszintesen poláros fényt vernek vissza [1]. Mivel a polarotaktikus vízirovarok a vizetről tükröződő fény vízszintes polarizációja alapján ismerik fel a vízfelületeket és vonzódnak az ilyen fényhez [2], ezért a fényes fekete autókról visszaverődő vízszintesen poláros optikai inger megtévesztheti őket és pozitív polarotaxist válthat ki belőlük. A fényes

fekete járművek ezáltal tipikus poláros fényszennyező források [3]. Ennek egy látványos következménye, mikor például tömegesen rajzó kérészek az 1. ábrán is látható módon teljesen ellepnek egy fényes fekete autót, amire lepetéznek, majd a lerakott petecsomók kiszáradás miatt elpusztulnak. E veszélynek nemcsak az 1.c ábrán látható dunavirág (*Ephoron virgo*) van kitéve, hanem sok más, olykor fokozottan védett vízirovarfaj is.



1. ábra. A fényes fekete autó karosszériájáról visszaverődő erősen és vízszintesen poláros fény tömegesen vonzza a különböző kérészfajokat. a) Az *Ephemera benderickson* tömegrajzása egy fényes fekete autó körül Rebecca Allen felvételén (Michigan State University, USA). b) Az *Ephemera danica* peterakása egy fényes fekete autó karosszériájára és c) a tömegesen rajzó dunavirág (*Ephoron virgo*) több ezer nőstény egyedének szélvédőn történő landolása és petecsomóinak lerakása Kriszta György felvételein.

Napjainkban egyre terjed azon új és drága divathóbort, hogy főleg a luxusautók karosszériáját vagy annak egy részét matt feketére/szürkére festik (2.a-b ábra), vagy matt karbonfóliával borítják (2.c ábra). Az ilyen érdes felületű autók kinézete a megszokott csillogótól eltérő, matt lesz. Mivel a matt (érdes) felületek többé-kevésbé depolarizálják a róluk diffúzan visszavert fényt, ezért a polarotaktikus rovarok számára várhatóan nem vagy kevésbé vonzóak, mint a fényes megfelelőik. Általánosságban véve tehát a poláros fényszennyezés csökkentésének egyik hatásos módja lehetne az érintett fényes felületek mattá tétele [2, 3]. Hipotézisünk szerint az új divathóbort kapcsán terjedő matt fekete/szürke autók kevésbé idéznek elő poláros fényszennyezést, ami környezetvédelmi szempontból előnyös tulajdonság lehet.

E feltételezésünk ellenőrzésére terepkísérleteket végeztünk fényes fekete, matt fekete és szürke autók karosszériákból kivágott és a földre vízszintesen elhelyezett tesztfelületekkel. Azt vizsgáltuk, hogy e felületek miként vonzanak bizonyos polarotaktikus rovarokat (kérészeket, szúnyoglábú legyeket és bögölyöket). E pozitív polarotaxissal bíró rovarokat az erősen és vízszintesen polarizált visszavert fény indikátoraiként használtuk [4–6]. A vizsgált kérészek és szúnyoglábú legyek tömegesen előfordultak a kísérletünk helyszínén, a bögölyök pedig mezőgazdasági kártevőként szintén gyakoriak. Eredményeink [7] fölfedték a matt fekete autók poláros fényszennyezésének mértékét, és kiderült, hogy a várakozásokkal ellentétben az alkalmazott matt fekete festékek és bevonatok nem környezetbarátok, mert optikailag azok is többé-kevésbé, de vonzzák a polarotaktikus rovarokat.

Vizsgálati módszerek

1. terepkísérlet

Első terepkísérletünket 6 meleg napon végeztük 2013. május 15. és 29. között, a Duna-Ípoly Nemzeti Parkhoz tartozó Dömörkapunál a Bükkös-patak mentén (47° 40' É, 19° 03' K), amivel párhuzamosan (attól 7 méternél nem távolabb) egy aszfaltút húzódott. E hegyi patak különböző pozitív polarotaxissal rendelkező kérészfaj (Ephemeroptera: Baetidae, Heptageniidae) és szúnyoglábú légyfaj (Diptera: Dolichopodidae) számára szolgál kirajzási helyként [4–6]. A kérészek kifejlett egyedei minden évben május és június között szürkületkor jönnek elő a patakból. Ezután nagy számban rajzanak az aszfaltút fölött vagy annak közelében, így módon ez a hely ideális volt kísérleteink számára. A vizsgált fajok veszélyeztetettek Európában, így a Közép-Duna-völgyi Környezetvédelmi és Természetvédelmi Felügyelőség engedélyezte a helyszínen történő kísérlet elvégzését. A helyszíni kísérletekben a vízszintes karosszéria-elemek kérészekre és szúnyoglábú legyekre kifejtett vonzó hatását vizsgáltuk. Három különböző, fémlapból készült (80 cm × 80 cm, 10 kg) tesztfelületet használtunk: (i) fényes fekete (100% szürkesség), (ii) matt fekete (100% szürkesség) és (iii) matt szürke (90% szürkesség). A tesztfelületeket egy karosszéria-festéssel foglalkozó cég (Lakk-Mix Kft., Budapest) ugyanolyan fényes/matt fekete festékekkel (RAL), illetve matt szürke karbonfóliával (Avery 502) vont be, mint amilyeneket jelenleg az autóiparban használnak.

Egy adott napon a kísérlet nyári időszámítás szerinti 19 órakor kezdődött és 21 óráig tartott (Greenwich Mean Time, GMT + 2 óra). A tesztfelületek sorrendjét 5 percenként ciklikusan permutáltuk, hogy elkerüljük a helyha-

2. ábra. Matt fekete (a) és matt szürke fényezésű (b), illetve matt karbonfóliával ellátott tetővel és motorháztetővel rendelkező autó (c) Horváth Gábor felvételein.



tást. Minden átrendezés után lefényképeztük mindhárom tesztfelületet, hogy dokumentáljuk a rájuk szálló vagy közvetlenül felettük néhány dm-re repkedő rovarokat. Később számítógépes kiértékeléssel összeszámoltuk az egyes fényképeken látható kérészeket és szúnyoglábú legyeket. Bár e rovarokat nem lehetett fajra beazonosítani, biztosan az Ephemeroptera rendbe, Baetidae és Heptageniidae családba, illetve a Diptera rendbe és a Dolichopodidae családba tartoztak. Ugyanezen a helyszínen végzett korábbi terepkísérleteink alapján tudjuk, hogy ott a következő fajok fordulnak elő: *Baetis rhodani*, *Epeorus sylvicola*, *Rhithrogena semicolorata* (kérészek), *Dolichopus unguiculatus*, *Dolichopus acuticornis*, *Dolichopus agilis* (szúnyoglábú legyek).

2. terepkísérlet

Második terepkísérletünket napsütéses, meleg napokon végeztük 2013. június 24. és július 27. között egy szokolyai lovastanyán (47° 52' É, 19° 00' K) 20 alkalommal. Korábbi nyári terepkísérleteink [4, 6] alapján tudjuk, hogy e helyszínen nagy mennyiségben fordulnak elő bögölyök. Így itt vizsgáltuk az 1. kísérletnél használt három tesztfelület (fényes fekete, matt fekete, matt szürke) bögölyökre gyakorolt vonzó hatását. A tesztfelületeket a lovastanyához közel, egy mezőn, egyenes vonal mentén helyeztük el a földön, egymástól 1 m távolságra, 5 m-re egy bokor- és fasortól. Két személy 2 m távolságban ült a tesztfelületektől és folyamatosan számolta a bögölyök felületekre adott reakcióit. Egy adott napon a kísérlet 9 órakor kezdődött és 14 óráig tartott (GMT + 2 óra). A felületek sorrendjét óránként ciklikusan permutáltuk.

Földön fekvő, vízszintesen poláros fényt visszaverő felületek közelében a következő három reakció jellemző a bögölyökre [8]: (i) levegőbeli körözés (a repülő rovar megközelíti a felületet, és legalább egy kört tesz fölöttes a levegőben néhány dm magasságban), (ii) érintés (a rovar legalább egyszer megérinti a felületet, azután elrepül), és (iii) leszállás (a rovar leszáll a felületre, és legalább 3 másodpercig rajta marad). E viselkedéselemeket figyelembe véve a 2. kísérletünk folyamán. Bár a megfigyelt bögölyöket nem lehetett fajra beazonosítani, bizonyos, hogy a Tabanidae családba tartoztak. A lovastanyán e 2. kísérlettel egyidejűleg különböző bögölycsapdákat alkalmazó két másik kísérlet is zajlott. Mivel az ott csapdázott bögölyök később határozásra kerültek – a határozást *Gyurkovszky Mónika* és *Farkas Róbert* (Parazitológiai és Állattani Tanszék, Állatorvostudományi Kar, Szent István Egyetem, Budapest) végezte –, tudjuk, hogy a következő bögölyfajok fordultak elő a 2. kísérletünk alatt: *Tabanus tergustinus*, *T. bromius*, *T. bovinus*, *T. autumnalis*, *Atylotus fulvus*, *A. loewianus*, *A. rusticus*, *Haematopota italica*.

Képpalkotó polarimetria

Különböző fekete és szürke matt autók, illetve az 1. és 2. terepkísérletben használt tesztfelületek polarizációs tulajdonságait képpalkotó polariméterrel [2] mértük a

spektrum vörös (650 ± 40 nm = a polariméter CCD-dektora maximális érzékenysége hullámhossza $\pm$ félérték szélesség), zöld (550 ± 40 nm) és kék (450 ± 40 nm) tartományában. A kérészek, szúnyoglábú legyek és bögölyök az ultrabolya, kék és zöld színekre érzékeny fotoreceptorokkal rendelkeznek [9], az azonban nem ismert, hogy e rovarok a spektrum mely tartományában érzékelik a poláros fényt. Cikkünkben csak a kék spektrális tartományban mért polarizációs mintázatokat mutatjuk be. A vizsgált autók és tesztfelületek polarizációs mintázatai nagyon hasonlóak a vörös és zöld tartományokban is, mivel színtelenségüknek (fekete/szürke) köszönhetően a róluk visszaverődő napfény és égboltfény polarizációs tulajdonságai csak kis mértékben függnek a fény hullámhosszától.

Statisztikai elemzések

Az 1. és 2. terepkísérlet során a különböző tesztfelületek által vonzott rovarok reakcióinak összehasonlítására nem-paraméteres Kruskal–Wallis-tesztet használtunk. Mivel a Kruskal–Wallis-tesztet mindhárom rovarcsoportnál szignifikánsnak bizonyultak, post-hoc összehasonlításként további Mann–Whitney U-tesztet végeztünk Bonferroni-korrekcióval, hogy megtudjuk, mely csoportok mutatnak szignifikáns különbséget. Minden statisztikai tesztet Statistica 7.0 szoftverrel végeztünk.

(Terjedelmi korlátok miatt a kísérleti eredmények bemutatására és kiértékelésükre a következő lapszámokban kerül sor.)

Irodalom

1. Kriska Gy., Csabai Z., Boda P., Malik P., Horváth G.: Why do red and dark-coloured cars lure aquatic insects? The attraction of water insects to car paintwork explained by reflection-polarization signals. *Proceedings of the Royal Society B* 273 (2006) 1667–1671.
2. Horváth G. (editor): *Polarized Light and Polarization Vision in Animal Sciences* (2nd edition, p. 649) Springer Series in Vision Research, volume 2 (series editors: Shaun P. Collin, Justin N. Marshall) Springer-Verlag: Heidelberg, Berlin, Dordrecht, London, New York, 2014.
3. Horváth G., Kriska Gy., Malik P., Robertson B.: Polarized light pollution: a new kind of ecological photopollution. *Frontiers in Ecology and the Environment* 7 (2009) 317–325.
4. Egri Á., Blahó M., Sándor A., Kriska Gy., Gyurkovszky M., Farkas R., Horváth G.: New kind of polarotaxis governed by degree of polarization: attraction of tabanid flies to differently polarizing host animals and water surfaces. *Naturwissenschaften* 99 (2012) 407–416.
5. Kriska Gy., Horváth G., Andrikovics S.: Why do mayflies lay their eggs *en masse* on dry asphalt roads? Water-imitating polarized light reflected from asphalt attracts Ephemeroptera. *Journal of Experimental Biology* 201 (1998) 2273–2286.
6. Kriska Gy., Bernáth B., Farkas R., Horváth G.: Degrees of polarization of reflected light eliciting polarotaxis in dragonflies (Odonata), mayflies (Ephemeroptera) and tabanid flies (Tabanidae). *Journal of Insect Physiology* 55 (2009) 1167–1173.
7. Blahó M., Herczeg T., Kriska Gy., Egri Á., Száz D., Farkas A., Tarjányi N., Czinke L., Barta A., Horváth G.: Unexpected attraction of polarotactic water-leaving insects to matt black car surfaces: mattness of paintwork cannot eliminate the polarized light pollution of black cars. *PLoS ONE* 9 (2014) e103339.
8. Krcmar S., Lajos P.: Response of horse flies to aged equine urine (Diptera: Tabanidae). *Entomol. Gener.* 33 (2011) 245–250.
9. Briscoe A. D., Chittka L.: The evolution of color vision in insects. *Annual Review of Entomology* 46 (2001) 471–510.

AKIK KIDERÍTETTÉK HOGYAN TÖRTÉNIK A FÉMEK KÉPLÉKENY ALAKVÁLTOZÁSA

– a képlékeny alakváltozás diszlokációs mechanizmusa

Márki-Zay János
Hódmezővásárhely

A képlékeny alakváltozás megértésére irányuló vizsgálatok az 1900-as évek elején értek el odáig, hogy a kutatók figyelme már a megoldás valódi kulcsát jelentő kristályhibákra, azaz a fémkristályban jelenlévő diszlokációkra terelődött. Hosszú és rögös út vezetett el idáig, amit megkísérünk vázlatosan ismertetni.

A képlékenységtan első kutatói

A képlékenységtan kezdetét *Charles Augustin de Coulomb* (1736–1806) francia fizikus 1773-ban végzett csavaró kísérleteitől számítjuk. Coulomb 1784-ben leírta egy 243,6 mm hosszú és 0,51 mm átmérőjű vasdróttal végzett csavarási kísérleteit. Világhírét torziós mérleggel végzett kísérleteinek köszönhetette. Ezen mit sem változtat, hogy nem tartották meggyőzőnek azt a megfigyelését, hogy átlagos terhelési és hőmérsékleti körülmények között a fémek anyagának egyre nagyobb kiterjedésű része válik képlékenyebbé.



Charles Augustin de Coulomb

John Macquorn Rankine (1820–1872) skót gépészmérnök és fizikus 1858-ban feltételezte, hogy a képlékenyebbé válás csak húzásra következik be és egyszerű modellt ajánlott a képlékeny határállapot bekövetkezésének ellenőrzésére. A későbbiekben kiderült, hogy a fémek alakítása szilárdságnöveléssel jár, amit alakítási keményedésnek neveznek. (Ezt magunk is könnyen ellenőrizhetjük: például egy fűrőgépbe fogott viszonylag lágy rézdrótot erősen megcsavarva a megcsavart rézdrótot úgy megkeményedik, hogy akár fába kalapálhatjuk.)



William John Macquorn Rankine

1864-ben *Henri Édouard Tresca* (1814–1885) francia gépészmérnök megállapította, hogy a fémek képlékeny alakváltozása egy bizonyos nagyságú csúsztafeszültség elérésekor indul meg. Szerinte a képlé-

keny alakváltozás akkor lép fel, ha a legnagyobb nyírófeszültség eléri azt az értéket, amely folyást idéz elő (a legnagyobb nyírófeszültség elve).

Rejtő Sándor (1853–1928) gépészmérnök az alakítási folyamatok és a fellépő erők közötti összefüggéseket kutatta. Rámutatót, hogy a fémek tulajdonságai az anyagszerkezetük függvénye.



Henri Édouard Tresca

A diszlokáció

A fémek képlékeny alakváltozásának megértéséhez vezető diszlokáció-elméletet *Vito Volterra* (1860–1940) olasz matematikus és fizikus 1905-ben kezdte el kifejleszteni. A diszlokáció fogalmát *Ludwig Prandtl* (1875–1953) és *Ulrich Dehlinger* (1901–1983) vezették be.

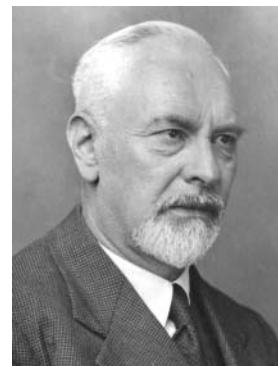
Ludwig Prandtl német fizikus a rugalmas-képlékeny testekre már 1913 előtt olyan modellt alkalmazott, amelyben fellelhető a diszlokáció fogalmának csírája. Prandtl mint a modern aerodinamika egyik megalapozója vált ismertté, e témában volt doktorandusza *Kármán Tódor*.

Ulrich Dehlinger német fizikus, a stuttgarter Műszaki Egyetem Elméleti és Alkalmazott Fizikai Intézetének professzora, ahol 1929-től 1969-ig a fémfizika kutatójaként dolgozott és jelentős szakírói tevékenységet is folytatott.

A fémek képlékeny alakváltozásához az szükséges, hogy az alakváltozást kiváltó erők meghaladják az atomokat összetartó belső



Vito Volterra



Ludwig Prandtl

erők nagyságát. Ha a csúszási síkban diszlokáció néven nevezett kristályhiba található, akkor a hiba által létrehozott rácsstorzulás miatt felhalmozódott feszültségi energia is hozzájárul a képlékeny alakváltozáshoz (az elcsúszáshoz) szükséges energiaszint eléréséhez. Másrészt a képlékeny alakváltozás során létrejött (akár a 10^{15} m^{-2} sűrűséget is elérő) nagy számú új diszlokáció viszont már egymás mozgását gátolja, ami alakítási keményedést okoz.



Ulrich Dehlinger

A képlékeny alakváltozás során megváltoznak a fém mechanikai tulajdonságai és szemcseszerkezete. A jelenség azonban különböző módon hat hideg- és melegalakításkor.

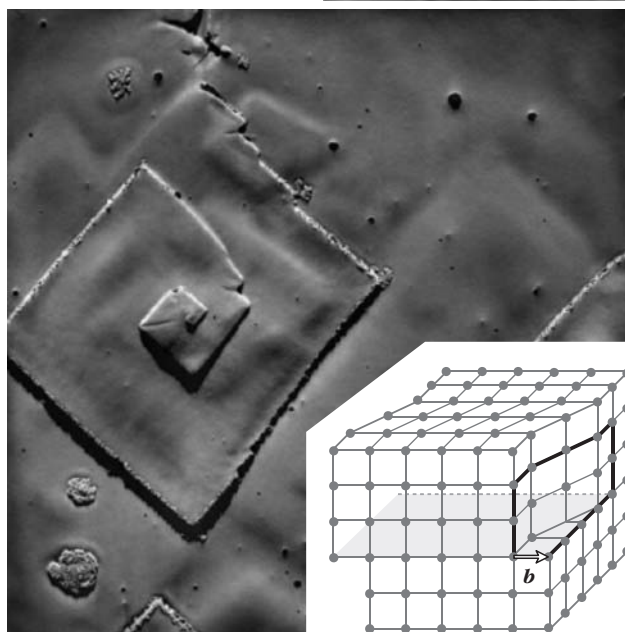
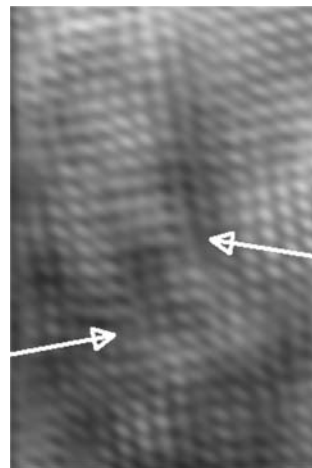
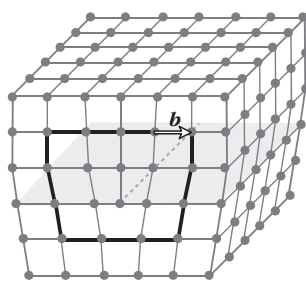
A kristályos anyagok atomjai vagy molekulái rendezett módon térbeli rácsban kapcsolódnak össze. A térbeli szerkezet rendezettsége azonban nem tökéletes, abban különböző hibák lépnek fel.

Témánk szempontjából most az egydimenziós (vonalmenti) kristályhibák, a diszlokációk fontosak, amelyeknek két szélső típusa az éldiszlokáció és a csavar-diszlokáció (1. ábra).

Az anyagban előforduló diszlokációk általában kevert diszlokációk, amelyek mind él-, mind csavar-komponenst tartalmaznak. A diszlokációk mennyiségét az egységnyi felületen (1 m^2) áthaladó diszlokációk átlagos számával, a diszlokáció-sűrűséggel jellemezzük. A diszlokáció-sűrűség másik lehetséges definíciója a térfogategységben található diszlokáció-vonalak összhossza.

A diszlokációk jobb minőségű fénymikroszkóppal már észlelhetők, de csak akkor, ha előhívtuk azokat. A megfelelő maratószer a diszlokációk felületet elérő dőfépontjánál mélyebb maratási gödröt old ki az anyagból, mint a hibátlan felületről, így az (különösen ferde megvilágításnál) már láthatóvá válik. Elektronmikroszkóppal a diszlokáció-eloszlás jól megfigyelhető. Elektronmikroszkópos mérések szerint a fémkristályokban a diszlokációk száma a gyors lehűtés, a hidegalakítások és a nagy szemcsenövekedési sebesség következtében megsokszorozódhat, és akár az ezerszeresére is növekedhet, miközben az anyag egyre ridegebb, keményebb lesz. Fordított eljárás esetén – a kristály hőkezelésekor, illetve melegalakításkor – a hibahelyek száma csökken.

Jelöljük ki a kristályrácsban egy paralelogrammát úgy, hogy minden irányban azonos számú rádspontot számolunk le. Tökéletes kristályban visszaértünk a kiindulási helyre, ami azt jelenti, hogy nincs a tartományban diszlokáció. Nem tökéletes kristályban – ahol diszlokáció van – a kezdőponttól a végpontba húzott vektor lesz az úgynevezett Burgers-vektor, amely a diszlokáció környezetéhez tartozó tartományok elcsúszásának nagyságát és irányát adja meg.



1. ábra. Felül éldiszlokáció – extra félsík beemelődése –, mellette HRTEM felvételen a nyilak mutatják a diszlokációt. Alul csavardiszlokáció, amely térbeli csavarvonal mentén elrendeződő hibahelyeket jelent, körülötte csavardiszlokáció menti kristálynövekedés AFM képe. Mindkét diszlokáció ábráján jelöltük a **b** Burgers-vektort és a körbejárást is.

Másképpen fogalmazva: egy-egy diszlokáció nem végződik a kristály belsejében, azaz vagy zárt görbét alkot a kristályon belül, vagy mindkét végpontja a kristály felületén van. Az energiaminimumra való törekvés miatt a diszlokáció rövidülni igyekszik.

Jobannes (Jan) Burgers (1895–1981) holland fizikus, a delfti Műszaki Egyetem folyadékdinamika tanára. A róla elnevezett Burgers-egyenlet tekinthető a folyadékdinamika modellezésében alapvető szerepet játszó Navier–Stokes-egyenletek egydimenziós változatának. Kristályfizikával foglalkozva 1939-ben bevezette a



Jan Burgers

Burgers-vektort. Tudományos munkásságának végén érdeklődése a plazmafizika és a lökéshullámok felé fordult.

Burgers 1921-ben a turbulenciával foglalkozva szakmai és személyes kapcsolatba került Kármán Tóddal.

Kármán Tódor (1881–1963) gépészmérnök, fizikus, alkalmazott matematikus. A szuperszonikus légi közlekedés atyja, a rakétatechnológia és a hiperszonikus űrhajózás úttörője. Az 1910-es években Kármán deformációs problémákkal foglalkozott: doktori értekezése a törés és plasztikus deformáció feltételeiről szólt, a hengerlés elméletéről, majd a szilárdságtan fizikai alapjairól írt fontos, sokat idézett munkákat (Theodore von Kármán: *Physikalische Grundlagen der Festigkeitslehre*, 1913).

Reuss Endre (1900–1968) gépészmérnök, egyetemi tanár, a műszaki tudományok doktora 1930-ban megjelentetett tanulmányaiban a Prandtl–Reuss féle elmélet alapjait fektette le.



Kármán Tódor



Reuss Endre

Még néhány tudnivaló a diszlokációkról

A diszlokációt tartalmazó teljes kristály némi többlet-energiával rendelkezik, aminek következtében például:

1. A diszlokációkat tartalmazó anyag képlékenyebben viselkedik. Számítások szerint a diszlokációk mozgatásához szükséges erők a diszlokációt jellemző Burgers-vektorral arányosak, a diszlokációk energiája pedig a Burgers-vektor abszolút értékének négyzetével. Tudni kell, hogy a diszlokációk energiája meghaladja az atomok rezgőmozgásának energiáját, így pusztán rezgőmozgások hatására nem jöhetnek létre.

Az amorf vagy üvegszerű anyagoknál hosszútávú rendezettségéről nem beszélhetünk, és ezért ezeknél diszlokációk sincsenek. Ezért például az üveget érő külső mechanikai hatás nem tud folyamatos diszlokációs mozgásokban megmutatkozni, hanem a felhalmozódó feszültségek általában hirtelen törést eredményeznek.

Ezzel szemben az, hogy a fémkristályokat ért mechanikai erőhatás következtében a fémkristályban

diszlokációk keletkezhetnek, illetve mozdulhatnak el, azt jelenti, hogy fémkristályokban a feszültségek kisebb léptékű alakváltozások sorozatát eredményezik. Az erőhatások a szemcsék elmozdulásával, illetve a szemcsehatárok változásával is járhatnak. Itt jegyzem meg, hogy Burgers feltételezte, hogy a szomszédos kristallitok vagy szemcsék kisszögű szemcsehatárai *diszlokációsorokból* állnak. Feltételezését később elektronmikroszkópos vizsgálatok is igazolták.

A diszlokációs mozgások tehát a feszültségek oldódásával járnak. A diszlokáció mozgásához szükséges feszültség meglehetősen kicsi, ha a kristálybeli kötési erők nem túlságosan irányfüggők. Ha valamilyen oknál fogva a diszlokációs mozgások akadályoztatva vannak, akkor a feszültségek felhalmozódnak, ami bizonyos határon túl már töréshez vezethet.

2. A diffúzió és a vele rokon korrodálás a szemcsehatároknál, így a diszlokációval (lásd diszlokációsorok) összefüggő kisszögű szemcsehatárok mentén is, erőteljesebb. Ezért az apró kristályoszemcsékből felépülő reális kristályok (a polikristályos anyagok) jóval kisebb ellenállást fejtenek ki az atomok diffúziójával szemben, mint a szemcsehatároktól mentes egykristályok. Azt, hogy a szemcsehatárok mentén kémiaiilag aktívabb az anyag az is mutatja, hogy a legtöbb kristályos anyagnál a szemcsehatárok láthatóvá tétele maratással történik.

3. Változnak a villamos tulajdonságok, deformálódik a fémionok által létrehozott periodikus tér, és zavart szenved az elektronok terjedése. Ezért például a kristályos félvezető eszközöket csak hibátlan (diszlokáció-mentes) kristályokból lehet gyártani.

Az 1900-as évek elején *Tytus Maksymilian Huber* (1872–1950) lengyel, *Richard von Mises* (1883–1953) osztrák és *Heinrich Hencky* (1885–1951) bajor fizikus – különböző időben, de egymástól függetlenül – megállapították, hogy a képlékeny alakváltozáshoz szükséges fajlagos deformációs munkának meg kell haladnia egy kritikus értéket (elméletüket azóta Huber–Mises–Hencky-féle folyási feltételnek nevezik).

Nádai Árpád Lajos (1883–1963) magyar gépészmérnök, egyetemi tanár, a Huber–Mises–Hencky-féle folyási feltétel ellenőrzésére végzett tesztek végrehajtásánál az elsők között szerepelt. Nádait főként a fé-



Tytus Maksymilian Huber



Richard Edler von Mises



Heinrich Hencky

mek folyása és törési jelenségei foglalkoztatták. Összefoglaló műve a *Theory of flow and fracture of Solids*, 1931 az első angol nyelvű könyv ebben a témában.

A *Max von Laue* (1879–1960) Nobel-díjas német fizikus által kidolgozott és mások által továbbfejlesztett röntgenvizsgálati módszerek a szilárd anyagok, így a fémek szerkezetéről pontos képet adtak, aminek alapján számításokat lehetett végezni a fémek elméleti szilárdságára vonatkozóan.

A csúszáshoz, azaz az atomsíkok egymáson való elmozdításához szükséges elméletileg meghatározott feszültség legalább két nagyságrenddel nagyobb-nak adódott, mint a kísérletekkel kimérhető folyáshatár. Ma már tudjuk, hogy ennek az a magyarázata, hogy reális anyagokban az atomsík atomjai nem egyszerre mozdulnak el egymáson, hanem soronként rácshibák, diszlokációk révén. Az elcsúszás általában azokon a síkokon indul meg, ahol a legtöbb atom található.

A képlékeny alakváltozásoknál az elmélet és a gyakorlat között jelentkező – két nagyságrendet meghaladó – ellentmondás feloldására 1934-ben *Polányi Mihály* és *Orován Egon* magyar származású tudósok dolgoztak ki hipotézist, akik feltételezték, hogy a szabályos szerkezetben előforduló rácsrendezetlenségek adják meg az eltérés magyarázatát.

Azt, hogy a képlékeny alakváltozás diszlokációk mozgása révén megy végbe (a csúszási sík mentén), tőlük függetlenül, de velük gyakorlatilag egyszerre, *Taylor* angol fizikus is felismerte, aki 1929-től a német *Ulrich Deblinger* nyomán indult el.

Geoffrey Ingram Taylor (1886–1975) angol fizikus és matematikus. Kutatási területe: áramlástan, hullámelmélet. Az első világháború utáni időszakban a legszélesebb körű munkát a kristályos anyagok deformációja terén végezte.

Polányi Mihály (1891–1976). 1913-ban orvostudományból diplomázott, majd kémiai tanulmányokat folytatott. Manchesterben lett a



Nádai Árpád



Max von Laue



Geoffrey Ingram Taylor

fizikai kémia professzora. Brit állampolgárként, mint vegyész, szociológus, tudományfilozófus és közgazdász járult hozzá a tudományok fejlődéséhez.

Orován (Orowan) Egon (1902–1989) magyar származású amerikai fizikus, metallurgus. Orován számos eredménye között a legfontosabb, hogy a képlékeny alakváltozást a diszlokáció fogalmával magyarázta.

Orován továbbfejlesztette a diszlokációk elméletét, és azt is kimutatta, hogy a kristályon belül kiváló idegen anyag olyan háromdimenziós hibákat okoz, amelyeket önmagukba záródó diszlokáció-vonalak, úgynevezett Orowan-hurkok vesznek körül. Számos szabadalom is fűződik nevéhez.

1928-ban a Berlieni Műszaki Egyetem hallgatójaként *Orován Egon* érdeklődése a fizika felé fordult. A kristályok töréséről írt doktorátust. Doktori témavezetője, a magyar *Wigner Jenő* (1902–1995) is foglalkozott diszlokációkkal. Orován, Wignerrel kívül többször konzultált az egyetemen tanító *Polányi Mihállyal*. A képlékeny alakváltozással kapcsolatos alapvető tanulmányát Orován 1933-ban Budapesten készítette el, amikor mint állástalan ráért gondolkodni. Elméletének megalkotását követően a témában ugyancsak elmélyült *Polányi* javaslatot tett egy közös cikk megírására. *Polányi Orován* munkáját sajátjánál többre tartotta, és ezért javaslatára a cikkeiket külön-külön írták meg, majd azok egyszerre jelentek meg a német *Zeitschrift für Physik* folyóiratban. A cikkek megjelenését követően *Geoffrey Ingram Taylor* elküldte Orovánnak a hasonló témában már korábban megírt cikkének kefelevonatát. *Taylor* is a diszlokációra épített, de cikkében több hibát is vétett, amelyekre Orován mutatott rá.

Úgy látszik, hogy a képlékeny alakváltozás magyarázatára a kor megérett, és így történhetett, hogy elméletét szinte egyszerre adta meg három tudós, akik közül kettő magyar származásúnak vallotta magát.

Feltételezéseik közvetlen bizonyítékát az elektronmikroszkóppal végzett vizsgálatok szolgáltatták az 1950-es években.



Polányi Mihály



Orován Egon



Wigner Jenő



Rejtő Sándor



Geleji Sándor



Kovács István

Végül megemlítem a szilárd testek plazmatikus deformációját és a diszlokációk kontinuum-modelljét kutató Kovács István (1933–2011) fizikust, az Eötvös Loránd Tudományegyetem tanszékvezető egyetemi tanárát. Érdemei közé tartozik, hogy (*Pattantyúst, Kaliszkyt* követően) nagy sikerű magyar nyelvű tankönyvet írt a képlékeny alakváltozásról. Kovács-Zsoldos: *Diszlokációk és képlékeny alakváltozás* (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1965). A könyv később angol nyelvű változatban is megje-

lent a Pergamon Press és az Akadémiai Kiadó gondozásában és jelentős nemzetközi sikert aratott.

A hazai műhely

Megemlékezünk még néhány magyar tudósról, akik szintén jelentős érdemeket szereztek a képlékenységgel kapcsolatos kutatások terén.

Rejtő Sándorról, a József Nádor Műegyetem rektoráról, a Magyar Anyagvizsgálók Egyesületének alapítójáról már volt szó.

Geleji Sándor (1898–1967) kohómérnök, egyetemi tanár kidolgozta az első olyan eljárást, amellyel a hengerléskor ébredő erők és teljesítményszükségletek kellő pontossággal kiszámíthatók. Kidolgozta a csőhengerlés elméletét, a hűtőpadok méretezésének alapelveit. 1966-ban jelent meg *A fémek képlékeny alakításának elmélete* című könyve.

Irodalom

- E. Orowan: Zur Kristallplastizität I–III. *Zeitschrift für Physik* 89 (1934) 605–659.
 M. Polányi: Über Eine Art Gitterstörung, die einen Kristall plastisch machen könnte. *Zeitschrift für Physik* 89 (1934) 660–664.
 G. I. Taylor: The mechanism of plastic deformation of crystals. Part I. – Theoretical. *Proc. Royal Society London* 145 (1934) 362–387.
 Kovács I., Zsoldos L.: *Diszlokációk és képlékeny alakváltozás*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1965.
 Juhász A., Kovács I.: *A szilárdtestek kristályszerkezete. Kristályhibák*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985.
 Voith M.: *A képlékenyalakítás elmélete – Nagy alakváltozások tana*. Miskolc, Egyetemi Kiadó, 1998.
 K. Osakada: History of Plasticity and Metal Forming Analysis. *ICTP 2008* (The 9th International Conference on Technology of Plasticity)

A FIZIKA TANÍTÁSA

A MÁGNESES VEKTORPOTENCIÁL, MINT VALÓSÁGOSAN LÉTEZŐ VEKTORMEZŐ

Hárs György, Varga Gábor
BME Fizikai Intézet

A legszélesebb körben alkalmazott elektrotechnikai eszköz a transzformátor, amely alapértelmezésben két galvanikusan független tekercsből áll. A tekercsek geometriai kialakítása lehet szolenoid vagy toroid jellegű. A tekercsek szoros mágneses csatolásban állnak. Tekintsük azt az esetet, amikor a szekunder tekercs belsejében helyezkedik el a primer. Az általánosan elfogadott elmélet szerint a szekunder tekercsben indukált feszültség forrása a primer tekercs által létrehozott mágneses fluxus megváltozása. Ezzel a magyarázattal azonban az a probléma, hogy a primer tekercsen kívül, a szekunder tekercs helyén gyakorlatilag nincsen mágneses tér, így a mágneses fluxus és annak változása is csak a primer tekercs belsejére

korlátozódik. Ennek dacára a szekunder tekercsben mindig megjelenik az indukált feszültség.

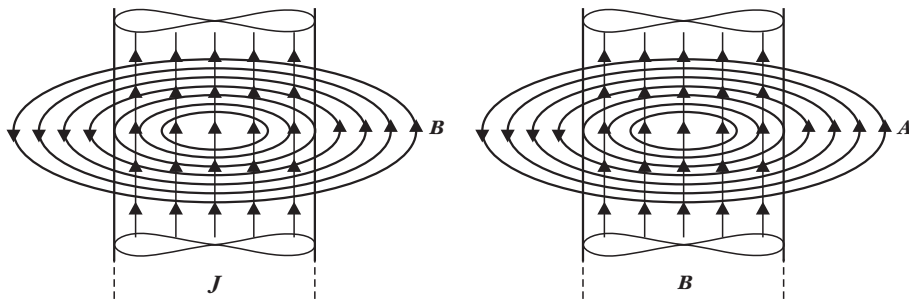
Ezt a ellentmondást oldja fel a mágneses vektorpotenciál. Ismert a harmadik Maxwell-egyenlet, amely a **B** mágneses indukció forrásmentességét írja le.

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Ezen kívül ismert a következő vektoranalitikai összefüggés:

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) \equiv 0.$$

Vagyis egy tetszőleges **A** vektormező rotációjaként előállított vektormező divergenciája azonosan nulla.



$$\oint_g \mathbf{B} d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} d\mathbf{F}.$$

A jobb oldalon az áramsűrűség felületi integrálja jelent meg, amely a g görbén átfolyó I áramok összegével egyenlő:

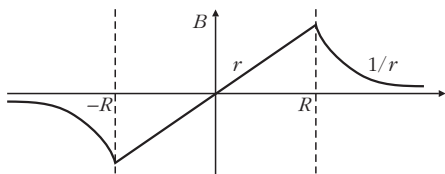
$$\oint_g \mathbf{B} d\mathbf{r} = \mu_0 \sum I.$$

Belül: $2 r \pi B = \mu_0 r^2 \pi j \Rightarrow B = \mu_0 \frac{j}{2} r,$

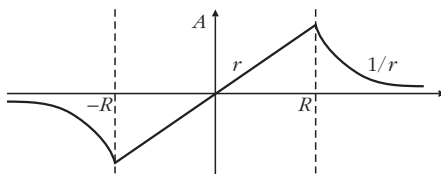
Belül: $2 r \pi A = r^2 \pi B \Rightarrow A = \frac{B}{2} r,$

kívül: $2 r \pi B = \mu_0 R^2 \pi j \Rightarrow B = \mu_0 \frac{j}{2} \frac{R^2}{r}.$

kívül: $2 r \pi A = R^2 \pi B \Rightarrow A = \frac{B}{2} \frac{R^2}{r}.$



1. ábra. Gerjesztési törvény



2. ábra. Vektorpotenciál-örvénytér

Ez tehát a gerjesztési törvény szokásos alakja a fent definiált esetben. Szavakban: a $\mathbf{B}$ vektormező zárt g görbére vett görbe menti integrálja egyenlő a görbén átfolyó áramok összegével szorozva a mágneses permeabilitással.

Alkalmazzuk most a Stokes-tételt a $\text{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}$ összefüggésre $\mathbf{A} = \mathbf{v}$ helyettesítéssel:

$$\oint_g \mathbf{A} d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{F}.$$

A jobb oldalon levő felületi integrál a Φ mágneses fluxus. Az egyenlet így írható:

$$\oint_g \mathbf{A} d\mathbf{r} = \sum \Phi.$$

Szavakban: az $\mathbf{A}$ vektorpotenciál zárt g görbére vett görbe menti integrálja egyenlő a görbén átfolyó összes mágneses fluxussal.

Erőteljes párhuzam található a két egyenlet között. Egy görbén átfolyó áram maga körül mágneses örvényteret kelt (gerjesztési törvény, 1. ábra), míg egy görbén átfolyó mágneses fluxus maga körül vektorpotenciál örvényteret kelt (2. ábra).

Tekintsük a második Maxwell-egyenletet:

$$\text{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Ez az indukciótörvény néven ismert összefüggés. Helyettesítsük be a vektorpotenciál definíciós egyenletét:

$$\text{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot} \mathbf{A}).$$

Átalakítva:

$$\text{rot} \mathbf{E} = \text{rot} \left(- \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right).$$

A rotációk egyenlőségéből természetesen nem következik azonnal az argumentumok egyenlősége, csupán az, hogy egy skalármező gradiensének erejéig különbözhetnek egymástól, mivel $\text{rot}(\text{grad} U) \equiv 0$, ahogy azt korábban említettük. Esetünkben ezt a gradiens-

Ha tehát a $\mathbf{B}$ mágneses indukciót egy $\mathbf{A}$ mágneses vektorpotenciál rotációjaként vezetjük le, akkor megszabadulunk a harmadik Maxwell-egyenlettől, mint külön feltételtől, mivel ekkor az említett matematikai azonosság garantálja a $\mathbf{B}$ tér forrásmentességét:

$$\text{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}.$$

Figyelmet érdemel a vektorpotenciál egyértelműségének a kérdése. Az ismert matematikai összefüggés szerint:

$$\text{rot}(\text{grad} U) \equiv 0,$$

ahol U tetszőleges skalármező. Ezért a vektorpotenciál csupán egy tetszőleges gradiens vektortér erejéig meghatározott. Általában az additív vektormezőt nullának, míg a vektorpotenciál-mezőt forrásmentesnek tekintjük ($\text{div} \mathbf{A} \equiv 0$). Ez utóbbi feltételt Coulomb-mértéknek nevezik az elméleti elektrodinamikában.

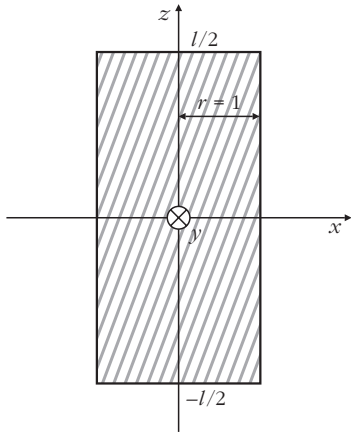
A továbbiakban mágnesezhető anyagot nem tartalmazó térben elhelyezkedő vezetőben folyó árammal foglalkozunk. Az első Maxwell-egyenlet csonkított alakja ekkor a következő:

$$\text{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j},$$

ahol μ_0 a vákuum mágneses permeabilitása, $\mathbf{j}$ pedig az áramsűrűség vektora. Tetszőleges, differenciálható $\mathbf{v}$ vektormezőre a Stokes-tétel állítása a következő:

$$\oint_g \mathbf{v} d\mathbf{r} = \int_S (\text{rot} \mathbf{v}) d\mathbf{F},$$

ahol a g peremgörbe irányítása jobbcsavart alkot az S nyílt felület irányításával. Alkalmazzuk a fenti matematikai tételt $\mathbf{B} = \mathbf{v}$ helyettesítéssel:



3. ábra. A szolenoid metszete. Forgástengelye a z tengely, míg x és y a forgástengelyre merőleges síkot képez.

mezőt nullának tekintjük, és az alábbi összefüggést fogadjuk el:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Vagyis a vektorpotenciál időbeli változása hozza létre az indukált elektromos mezőt.

Felmerülhet a kérdés, hogy mágneses vektorpotenciál csupán egy számítástechnikai segédlet, amely alkalmazásával a harmadik Maxwell-egyenlet elegánsan kiküszöbölhető, vagy pedig egy valós fizikai vektormező, amelynek időbeli megváltozása kelti az indukált elektromos teret? E kérdésre hosszú ideig nem volt egyértelmű válasz, mivel egyenáramú gerjesztéssel létrehozott mágneses vektorpotenciál nem volt kimutatható az elektromos kísérletek körébe tartozó klasszikus eszközökkel. Áttörést jelentett az Aharonov–Bohm-hatás kísérleti igazolása, amelyben kvantummechanikai effektus révén sikerült kísérletileg bizonyítani az egyenáramú gerjesztéssel létrehozott mágneses vektorpotenciál létezését.

A bevezetőben említettük, hogy a szolenoid- és toroidtekercsken kívül nincsen, pontosabban elhanyagolható a mágneses tér. Ezt az állítást tapasztalati tényként szokás elfogadni, viszont valaminek a nemléte a természettudományokban igen kérdéses, mivel a logaritmikus skálának nincsen nulla pontja. Határozzuk meg tehát a szolenoid- és toroidtekercs külső és belső $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ terét teljes általánosságban, numerikus integrálás segítségével. Így megtudhatjuk, hogy az elhanyagolás mennyire jogos.

A munkamódszer mindkét esetben a vektoriális Poisson-egyenlet megoldásával kezdődik.

$$\Delta \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}.$$

Igazolható hogy ennek megoldása a következő:

$$\mathbf{A}(\mathbf{v}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}}{|\mathbf{v} - \mathbf{l}|} dV,$$

ahol $\mathbf{v}$ helyvektor a futópont, míg $\mathbf{l}$ helyvektor a gerjesztés koordinátái. A $|\mathbf{v} - \mathbf{l}|$ kifejezés tehát a gerjesztési pont és a futó pont távolsága. Az így, integrálalokban előállított $\mathbf{A}$ vektormezőket rotációképzésnek vetjük alá, amelyből megkapjuk a $\mathbf{B}$ vektormezőt.

Az általános integrálképlet rotációképzés után egyébként az ismert Biot-Savart-törvényt adja, ennek direkt használata azonban jóval körülményesebb, ezért nem ezt az utat választjuk.

A fenti integrálban előforduló $\mathbf{j} dV$ kifejezés vezetékekben folyó áram esetében $I d\mathbf{l}$ formában írható, ahol I a vezetékben folyó áram. Így a térfogati integrál a vezeték mentén haladó görbe menti integrál formájában számítható.

A szolenoid mágneses vektorpotenciál ($\mathbf{A}$) és mágneses indukció ($\mathbf{B}$) terének számítása

A teljesen részletes számítás a honlapon található.

A szolenoid metszete a 3. ábrán látható. A nemnulla komponenseket az alábbiakban foglaljuk össze azzal a kiegészítéssel, hogy a nullával osztás megelőzése okán bevezetjük a δ huzalvastagságot:

$$\frac{A_y(x, z)}{A_{\max}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{D} + \delta} d\varphi \right) d\eta,$$

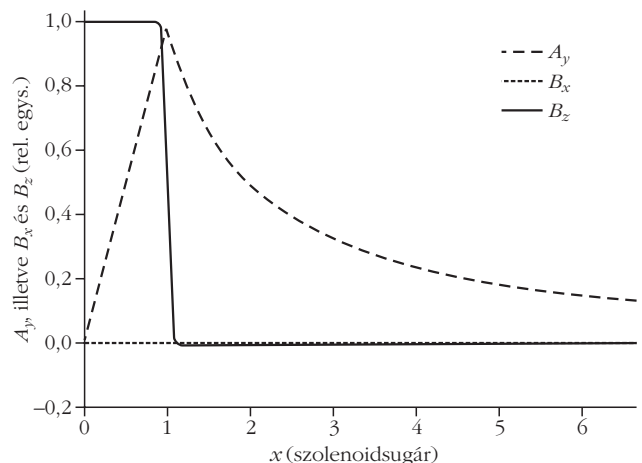
$$\frac{B_x(x, z)}{B_0} = \frac{r}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(z - \eta) \cos \varphi}{(\sqrt{D} + \delta)^3} d\varphi \right] d\eta,$$

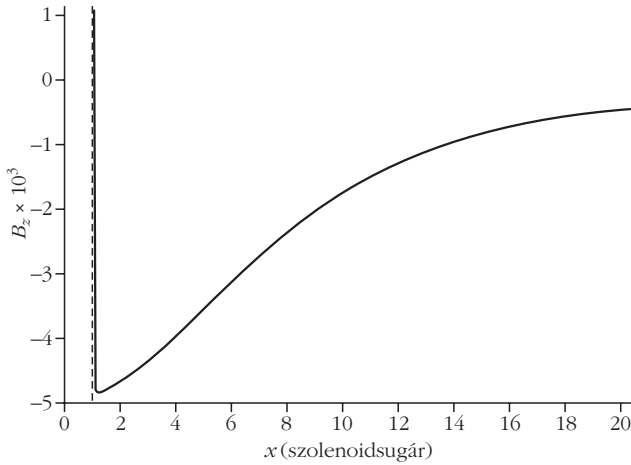
$$\frac{B_z(x, z)}{B_0} = \frac{r}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{r - x \cos \varphi}{(\sqrt{D} + \delta)^3} d\varphi \right] d\eta.$$

A numerikus számításoknál (4. és 5. ábra) a következő paramétereket alkalmaztuk: a szolenoid sugara az egység $r = 1$, hossza $l = 20$, huzalvastagság $\delta = 10^{-2}$.

Vegyük észre, hogy a szolenoidon kívül ellentétes irányú a B_z tér, mivel az erővonalak körbezáródnak!

4. ábra. A_y , B_x és B_z komponensek az x pozíció függvényében $z = 0$ helyen (a szolenoid közepén).





5. ábra. B_z komponens a szolenoidon kívül, az x pozíció függvényében ezerszeres nagyításban $z = 0$ helyen (a szolenoid közepén).

Ami a tekercs belsejében felfelé haladt az kívül lefelé mutat. A tér körülbelül a tekercs hosszának megfelelő távolságban elhanyagolható mértékűre csökken.

A toroid mágneses vektorpotenciál ($\mathbf{A}$) és mágneses indukció ($\mathbf{B}$) terének számítása

A teljesen részletes számítás a honlapon található.

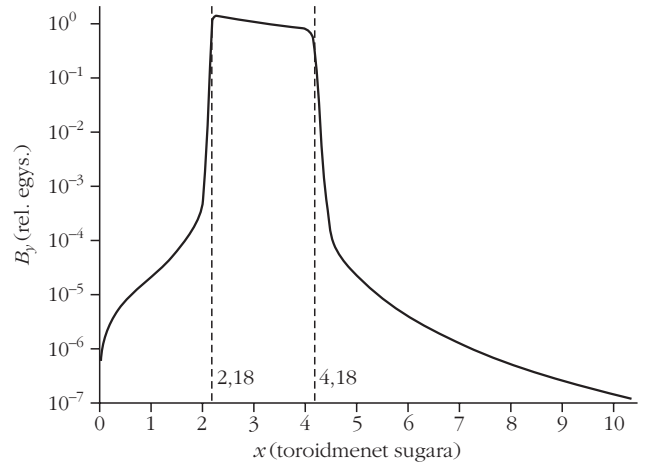
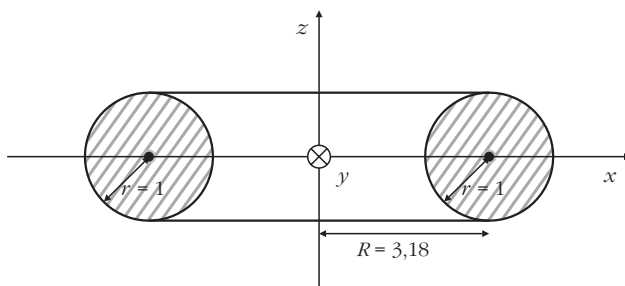
A toroid metszete a 6. ábrán látható. A nem-nulla komponenseket az alábbiakban összefoglaljuk azzal a kiegészítéssel, hogy a nullával osztás megelőzése okán bevezetjük a δ huzalvastagságot:

$$\frac{A_x(x, z)}{A_0} = \frac{R}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\sin\varphi \cos\alpha}{\sqrt{D} + \delta} d\varphi \right) d\alpha,$$

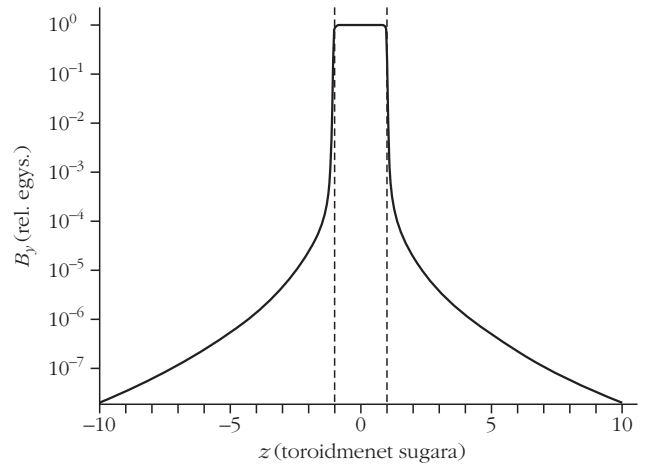
$$\frac{A_z(x, z)}{A_0} = \frac{R}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\varphi}{\sqrt{D} + \delta} d\varphi \right) d\alpha,$$

$$\begin{aligned} \frac{B_y(x, z)}{B_0} &= \\ &= \frac{rR}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x\cos\varphi - (R\cos\varphi + r - z\sin\varphi)\cos\alpha}{(\sqrt{D} + \delta)^3} d\varphi \right) d\alpha. \end{aligned}$$

6. ábra. A toroid metszete. Forgástengelye a z tengely, míg x és y a forgástengelyre merőleges síkot képez.



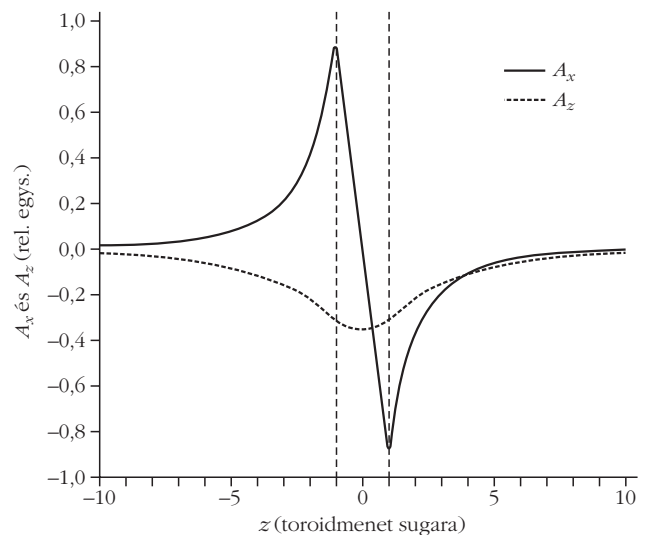
7. ábra. B_y komponens az x pozíció függvényében logaritmikus léptékben $z = 0$ helyen.



8. ábra. B_y komponens a z pozíció függvényében logaritmikus léptékben $x = 3,18$ helyen.

A numerikus számításoknál a következő paramétereket alkalmaztuk: a toroid meneteinek sugara az egység $r = 1$, a toroidalakzat rádiusza $R = 3,18$, (ez a R sugár éppen 20 kerületű tekercset eredményez, mint-

9. ábra. A_x és A_z komponensek z függvényében $x = 3,18$ helyen.



ha az előző számítás szolenoidtekercsét kör alakúvá hajlítottuk volna) továbbá a huzalvastagság $\delta = 10^{-2}$.

Vegyük észre, hogy a toroid belsejében a mágneses tér nem homogén (7. és 8. ábra). Kifelé haladva csökken, mivel a gerjesztési törvény szerint ugyanakkora gerjesztés jut egyre nagyobb területre. A tekercsen kívül a mágneses tér meredeken mintegy négy nagyságrendet csökken. A menetek középpontja $x = 3,18$ pozíciónál van.

A tekercsen kívül a mágneses tér meredeken mintegy négy nagyságrendet csökken. A vektorpotenciálmező abszolút értéke viszont a tekercsen kívül összemérhető a tekercsen belüli értékkel (9. ábra). Az indukált feszültség forrása tehát semmiképpen nem lehet a mágneses tér, csak a vektorpotenciálmező. Ennek időbeli változása okozza tehát az indukált elektromos erőteret, amelynek zárt görbére vett integrálja az indukált örvényfeszültséget adja.

SZÍNES KAMÉLEONOK FÁZISÁTALAKULÁSA

Beke Tamás

Nagyasszonyunk Katolikus Általános Iskola
és Gimnázium, Kalocsa

Néda Zoltán professzor úr az ELTE-n tartott egy előadás-sorozatot, amelyben különböző rendszerekben előforduló kollektív viselkedésekről esett szó. Az előadás végén javasolta, hogy találjunk ki olyan játékos feladatot, amelyben valamilyen kollektív viselkedés szerepel, és akár egy középiskolás diák figyelmét is fel lehet vele kelteni.

Sok egyedből álló rendszerekben olyan jelenségek is előfordulhatnak, amelyek nem direkt módon következnek a rendszert alkotó egyedek egyéni tulajdonságaiból. A jelenségeket összefoglaló néven kollektív viselkedésnek nevezzük. A fázisátalakulás, a szinkronizáció, a rajzás, a lavinák kialakulása vagy a térbeli mintázatképződés olyan kollektív jelenségek, amelyek nemtriviális módon jelennek meg az adott rendszerben. Ezek a jelenségek olyan rendszerekben fordulhatnak elő, amelyekben – általában – nagy számú egyed található, és az egyedek között létezik valamilyen kölcsönhatás [1].

A kollektív jelenségek közül ebben a cikkben a fázisátalakuláshoz kapcsolódóan mutatok be egy játékos szimulációs modellt. A fázisátalakulás során a rendszer fizikai tulajdonságai ugrásszerűen megváltoznak: bizonyos feltételek mellett a rendezetlen állapotból rend lesz vagy fordítva. Nézzünk néhány fázisátalakulást, amelyek során a rendezetlen állapotból rendezett állapot lesz!

- **Fagyás:** tiszta anyagok hűtése esetén folyadék halmazállapotból egy adott hőmérsékleten (a fagyásponton) szilárd halmazállapotú (kristályos) anyag keletkezik.

- **Szupravezetés:** néhány tiszta anyagnak, ötvözetnek, kerámiának hűtés közben egy adott kritikus (átmeneti) hőmérsékleten mérhetetlenül kicsivé válik az elektromos ellenállása. (Ez a kritikus hőmérséklet általában az abszolút zéruspont közelében van, bár például a magas hőmérsékletű szupravezető kerámiák kivételek.)

- **Ferromágneses rend kialakulása:** bizonyos tiszta paramágneses anyagok és néhány ötvözet is hűtés közben egy adott hőmérsékleten (a Curie-ponton) ferromágnessé válik.

Az előző példákban a rendezetlen állapotban lévő rendszerekben egy adott paraméter kritikus értékénél hirtelen rend alakult ki. Tudjuk jól, hogy a rendezetlenségből nehéz rendet teremteni. (Fordítva „megy magától” is, hiszen a termodinamika II. főtétele szerint a zárt, izolált rendszer entrópiája egyensúlyi állapotban maximális. Az entrópia a rendszer rendezetlenségének mértéke.)

A rendszer fázisátalakulását középiskolai tanulókkal is tanulmányozhatjuk. A bemutatásra kerülő modellben bizonyos paraméterértékeknél a rendezetlenségből „hirtelen” rend alakul ki. A fázisátalakulást modellező játékos szimulációs feladatban a tanulók fizikai ismeretei és modellalkotási képességei is gyarapodtak.

Kaméleonos feladat

A fázisátalakulási jelenségek iskolai bemutatására találtam ki egy „játékos” programot. A számítógépes szimulációt a fizika és az informatika iránt érdeklődő gimnazista diákokkal közösen, projekt munkában fejlesztettük. A szimulációs feladatot FreePascal programozási nyelven írtuk meg, mert iskolánkban a gyerekek ezt a programnyelvet tanulják. (A projektben résztvevő tanulóknak én tanítom a fizika és az informatika tantárgyat is.)

A szimulációs feladat kaméleonokról szól, amelyek különleges módon viselkedhetnek. A játékos megfigalmazás ellenére a feladat tulajdonképpen fizikai folyamatot modellez. Több „kaméleonos feladatot” is megvalósítottunk; a bemutatásra kerülő modellben a kaméleonok „egyszerű módon” képesek szimulálni a rendszer fázisátalakulását.

Egy globálisan kölcsönható rendszerben minden egyed hatással van minden másik egyedre; egy lokális

Az írás az ELTE Fizika tanítása PhD-program keretében készült, témavezető Bene Gyula.

rendszerben az egyes egyedek csak a velük kölcsönható szomszédoktól függenek, nem pedig az egész rendszertől. A lokális rendszerek viselkedése a bonyolultabb. A bemutatásra kerülő modellben kaméleonjaink „kvázi” lokális rendszert alkotnak, mivel nem csak közvetlen, hanem annál nagyobb, de szűk környezetüket érzékelik.

A feladat megfogalmazása

Képzeljük el, hogy van egy téglalap alakú terráriumunk, amelyben kaméleonok élnek. A kaméleonok összesen s db ($s > 1$) szín közül bármelyiket fel tudják venni. (Az s paraméter értékét magunk adhatjuk meg.) Jelöljük a kaméleonok lehetséges színeit $szín_1, szín_2, \dots, szín_s$ paraméterekkel!

A program indulásakor megadjuk az adott színű kaméleonok kezdeti számát, ekkor jelölje a $szín_1$ színű kaméleonok számát $N_{0, szín_1}$, a $szín_2$ színű kaméleonok számát $N_{0, szín_2}$, ..., a $szín_s$ színű kaméleonok számát $N_{0, szín_s}$! A terráriumban a kaméleonok összes darabszáma tehát $N = N_{0, szín_1} + N_{0, szín_2} + \dots + N_{0, szín_s}$. (N értéke egy adott szimulációban állandó: kaméleonok nem keletkeznek és nem vesznek el, „kaméleonmegmaradás” törvénye.)

A terrárium

Ha megadtuk a különböző színű kaméleonok kezdeti számát, akkor a program a grafikus képernyőn elosztja az N db kaméleont a terráriumon belül. Mindegyik kaméleonnak van egy indexszáma (1-től N -ig számozva), a szimuláció során ez alapján tudjuk nyomon követni az egyes kaméleonokat. (A kaméleonok egyébként azonos „kinézetűek”, legfeljebb csak a színükben különböznek.)

A különböző színű kaméleonok kezdetben véletlenszerűen helyezkednek el a terráriumban. A terráriumot a számítógépes programban egy téglalap jelképezi, a különböző színű kaméleonokat pedig egy-egy r sugarú, megfelelő színű kör. A kaméleonok elhelyezkedését derékszögű koordináta-rendszerben tartjuk nyilván. Az 1. ábra (az első belső színes borítón) egy lehetséges kiindulási állapotot mutat.

A kaméleonok ütközése

A kaméleonok mozognak a terráriumban. Az egyes kaméleonok sebességének iránya kezdetben véletlenszerű értékű; a kaméleonok sebességének nagysága a szimuláció indulásakor szintén véletlenszerű érték lehet.

A hőmérséklet

A terráriumban valamekkora hőmérséklet uralkodik (a terrárium tulajdonosa fizikus, ezért értékét abszolút hőmérsékletben fejezi ki). A terrárium hőmérsékletét a tulajdonos tetszőleges időfüggvénnyel szabályozni tudja, az persze állandó is lehet. A különleges kaméleonok elvileg „bármekkora” hőmérsékletet kibírnak; és a kaméleonok viselkedése függ a terrárium hőmérsékletétől

is. A számítógépes program indulásakor beállítjuk a terrárium kezdeti T_0 hőmérsékletét.

A hőmérséklet időfüggvényével tudjuk szabályozni a kaméleonok mozgásának sebességét. Jelöljük az i -ik időpillanatban a hőmérsékletet T_i -vel, az $(i+1)$ -ik időpillanatban a hőmérsékletet T_{i+1} -gyel! Ha az $(i+1)$ -ik pillanatban a T_i hőmérséklethez képest növekszik a hőmérséklet, akkor a kaméleonok nagyobb sebességgel mozognak; ha csökken a hőmérséklet, akkor a kaméleonok sebessége is csökken. (A valódi kaméleonok is élénkebbé válnak a hőmérséklet emelkedésével.) A kaméleonok sebessége az abszolút hőmérséklet négyzetgyökétől függ.

Az $(i+1)$ -ik pillanatban a T_{i+1} hőmérsékleten a pillanatnyi sebesség:

$$v_{i+1}(T_{i+1}) = v_i(T_i) \sqrt{\frac{T_{i+1}}{T_i}},$$

ahol $v_i(T_i)$ a kaméleonok i -ik pillanatban T_i hőmérsékleten mérhető sebessége.

Ütközések

A kaméleonok a terrárium falával és egymással is teljesen rugalmas módon ütközhetnek. A rugalmas ütközésnél a lendület-megmaradás mellett az ütköző testek mozgási energiájának összege is állandó.

Ha a kaméleonok a terrárium széléhez érnek, akkor onnan „visszafordulnak”, gyakorlatilag „rugalmasan visszapattannak” a terrárium faláról. A terrárium falával való ütközéskor a kaméleonhoz képest „végtelenül nagy tömegű” falról a kaméleon úgy pattan vissza, hogy a fallal párhuzamos sebességkomponense megmarad, a falra merőleges pedig ellentétesre változik.

A kaméleonok mozgásuk során egymással rugalmasan és centrálisan ütközhetnek. Az egyszerűség kedvéért úgy vettük, hogy a kaméleonok azonos tömegűek, ezért két kaméleon ütközése után csak meg kell cserélni az ütközés előtti sebességkomponenseket.

A kaméleonok színváltása

A kaméleonok bizonyos esetekben, a következő szabályok szerint, pillanatyszerűen megváltoztatják a színüket.

Azonos színű kaméleonok találkozása

Ha a terráriumban két azonos színű kaméleon találkozik, akkor csak „rugalmasan ütköznek” egymással; ilyenkor biztosan nincs színváltás.

Különböző színű kaméleonok találkozása

Ha két eltérő színű kaméleon találkozik, akkor „megijednek” egymástól. Mivel ijedtségükben szeretnének „elbújni”, ezért körülnéznek a R ($R > r$) sugarú környezetükben, megszámolják, hogy a R sugarú környezetükben melyik színű kaméleonból van a legtöbb, és arra a színre váltanak át, hogy a lehető leg-

jobban beleolvadjanak környezetükbe. Ha R sugarú környezetükben csak 1-1 darab különböző színű kaméleont látnak, akkor nem váltanak színt. (A R paraméter értékét mi állíthatjuk be a program elején.) Ezután „rugalmasan ütköznek” és továbbhaladnak.

Immunitás

Ha egy kaméleon színt vált, akkor bizonyos ideig „immunissá” válik a többivel szemben, azaz egy darabig nem ijed meg semelyik másik kaméleontól, és nem vált színt. Jelöljük az „immunitási” időt (esetleg nevezhetjük „relaxációs” időnek is) a szín_1 színre váltott kaméleonok esetén $t_{\text{imm}, \text{szín}_1}$ -gyel, a szín_2 színre váltott kaméleonok esetén $t_{\text{imm}, \text{szín}_2}$ -vel, ..., a szín_s színre váltott kaméleonok esetén $t_{\text{imm}, \text{szín}_s}$ -sel! (Az egyes „immunitási időket” a program elején beállíthatjuk; értéke lehet zéró is, ilyenkor nincs „immunitás”).

Ha letelik a színváltás utáni „immunitási” idő, akkor ismét „ijedőssé” válnak a kaméleonok, azaz megfelelő esetekben ismételt színt válthatnak. Miért van „immunitási” idő? Ha egy kaméleon színt váltott az ijedtség következtében, akkor ehhez energiát kellett „használnia”; ettől kicsit „elfárad”, „kimerül” a kaméleon, és bizonyos ideig nem törődik a többi kaméleon színével.

A szimuláció során a grafikus képernyőn egy külön grafikonon ábrázoltuk a különböző színű kaméleonok darabszámát, minden pillanatban. Egy külön grafikonon ábrázoltuk a kaméleonok „találkozásainak” („egymással történő ütközéseinek”) számát minden pillanatban, illetve egy külön grafikonon ábrázoltuk a kaméleonok színváltásainak számát minden pillanatban.

Lehet-e rendszerünk stabil?

A kaméleonok találkozásai következtében a terráriumban lévő kaméleonok „színeloszlása” akár pillanatonként változhat, csak a kaméleonok összes száma (N) marad állandó. Kialakulhat-e olyan állapot, hogy a terráriumban lévő kaméleonok színeloszlása nem változik tovább?

Meg kell különböztetnünk a stabil „végállapotokat” és a véletlenszerűen kialakuló „ideiglenesen stabil” állapotokat.

Stabil végállapotok

Ha a terráriumon belül a folyamat során valamikor az összes kaméleon színe megegyezik, akkor ezután már hiába találkoznak egymással, nem lesz több színváltás. Tehát stabil végállapotban az összes kaméleon színe azonos a terráriumban. A rendszerben a fázisátalakulást az jelzi, ha hirtelen kialakul a rend, azaz a stabil állapot.

„Ideiglenesen stabil” állapotok

Ha a terráriumon belül különböző színű kaméleonok vannak, de ezek úgy mozognak, hogy a különböző színű kaméleonok sohasem találkoznak egymással, akkor gyakorlatilag nem lesz színváltás, azaz marad mindegyik kaméleon olyan, mint amilyen előtte is volt.

Képzeljük el például, hogy a kaméleonok szín szerint elkülönülve, vízszintes sávokban helyezkednek el és pontosan x irányban (vagy ellentétesen) mozognak, ezért hiába ütköznek, sebességük x irányú (vagy ellentétes) marad. A példa szerint tehát valamikor (véletlenszerűen) szín szerint „szeparálódtak” a kaméleonok és utána már nem kerülnek újra kapcsolatba egymással. Ez az állapot azonban nem stabil: ha csak az egyik kaméleon sebessége kicsit is eltér az x iránytól, azaz akármilyen kicsi, de y irányú sebességkomponense is van, akkor (i) a két y irányú végfalon való ütközések következtében kiszóródik a vele azonos színűek sávjából, (ii) másik, azonos színű kaméleonnal ütközve annak átadja kis y irányú sebességét, ez a folyamat is a sávból való kiszóródáshoz vezet. Így a korábban szeparálódott kaméleonok találkozni fognak, és újra lesz színváltás. Hasonlóképpen y irányú sávokban is véletlenszerűen szeparálódhatnak a kaméleonok, ez is egy „ideiglenesen stabil” állapot lenne. (Az ilyen ideiglenesen stabil állapotok felelhetnének meg bizonyos részleges fázisátalakulásnak.)

A rendparaméter

Vezessük be rendszerünk rendezettségének jellemzésére a q rendparamétert! A rendparaméter egy 0 és 1 közötti szám. A szimuláció i -ik időpillanatában a rendparamétert q_i -vel jelöljük. A rendparaméter megmutatja, hogy rendszerünk az adott pillanatban mennyire van rendezett állapotban. (A rendparamétert bizonyos határokon belül szabadon választhatjuk meg úgy, hogy az praktikus legyen az adott feladathoz.)

Ha a terráriumban az i -ik időpillanatban az s féle lehetséges színű, összesen N darab kaméleon színeloszlása egyenletes, azaz bármely színű kaméleonok száma N/s , akkor ezt tekintjük a rend teljes hiányának ($q_i = 0$). Ha a terráriumban csak azonos színű kaméleonok vannak, akkor ezt tekinthetjük a teljes rendnek ($q_i = 1$), hiszen ezután már biztosan nem lehet színváltás. Az i -ik időpillanatban a rendparamétert a következőképpen definiáltuk:

$$q_i = \frac{|s N_{i, \text{szín}_1} - N| + |s N_{i, \text{szín}_2} - N| + \dots + |s N_{i, \text{szín}_s} - N|}{2(s-1)N},$$

ahol $N_{i, \text{szín}_1}$ az i -ik pillanatban a szín_1 színű kaméleonok darabszáma, $N_{i, \text{szín}_2}$ az i -ik pillanatban a szín_2 színű kaméleonok darabszáma, ..., $N_{i, \text{szín}_s}$ az i -ik pillanatban a szín_s színű kaméleonok darabszáma, N pedig az összes kaméleon darabszáma.

A szimuláció

A szimulációs feladatban az volt a kérdésem, hogy a különböző színű kaméleonok kezdeti számának megadása után, véletlenszerűen kezdeti állapotból (hely- és sebességkoordináták) kiindulva eljuthatunk-e valamelyik stabil végállapotba?

A kérdésre általánosságban nem lehet válaszolni; csak a konkrét, véletlenszerűen választott kezdeti értékek ismeretében lehet „valamit” mondani. Általános esetben a feladat elején nem lehet megmondani, hogy a rendszer (a terrárium) stabil állapotba kerülhet-e véges számú lépés (találkozás) után.

A szimulációs feladatot úgy oldhatjuk meg, hogy a kezdőfeltételeknek megfelelően véletlenszerűen választunk egy kiindulási állapotot; ez lesz az $i = 0$ időpillanat. A kezdőállapottól kiindulva végrehajtunk egy „elemi lépést”, azaz az adott pillanatbeli helykoordináták és sebességek alapján kiszámítjuk, hogy a következő pillanatban melyik kaméleon hol lesz, történik-e ütközés a terrárium falával vagy a kaméleonok között, és az eltérő színű kaméleonok ütközése esetén lesz-e színváltás. Ekkor megvizsgáljuk, hogy a rendszer stabil állapotba került-e? Ha stabil állapotba került, akkor vége a feladatnak. Ha a rendszer újonnan kiszámított állapota nem stabil, akkor a szimuláció folytatódik egy újabb elemi lépéssel.

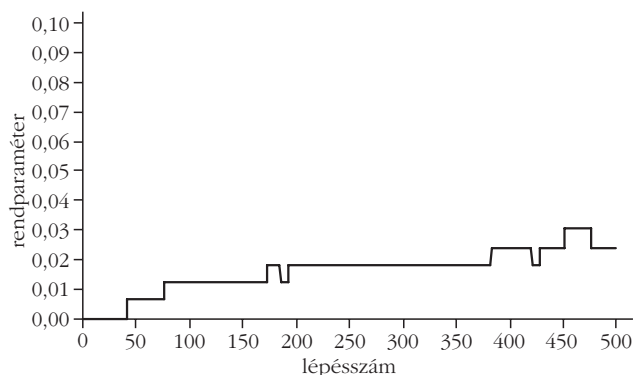
Néhány szimulációs eredmény

A könnyebb összehasonlíthatóság kedvéért a kiindulási állapot után mindegyik szimuláció 500 lépésből állt ($0 \leq i \leq 500$), és $s = 10$ lehetséges színt választottunk. Mindegyik esetben mind a 10 színre a kaméleonok kezdeti száma 50 volt, azaz a színek egyenletesen oszlottak meg a kaméleonok között. A különböző színű kaméleonok pillanatnyi darabszámát a szemléletesség érdekében halmozott oszlopdiagrammon ábrázoltuk. Mindegyik esetben a kezdeti hőmérséklet $T_0 = 300$ K volt, és a hőmérsékletet időben folyamatosan, lépésenként 0,1 K-nel növeltük.

1. eset

Az első esetben mindegyik színhez egyforma értékű, közepes immunitási időket állítottunk be, és a kaméleonok $R = 2r$ sugarú környezetüket érzékelték az ütközésük esetén. A rendparaméter értéke folyamatosan változott a zérus környékén. A 2. ábrán (az első belső színes borítón) a szimuláció halmozott oszlopdiagrammját, míg a 3. ábrán rendparaméter változását láthatjuk.

3. ábra. A rendparaméter változása a szimuláció során. Mindegyik színhez közepes immunitási idő tartozik, a kaméleonok $2r$ sugarú környezetüket érzik ütközéskor.



Ha részecskékben gondolkodunk, akkor a részecskék ebben az esetben egymással és a tárolóedény falával rugalmasan, centrálisan ütköznek. Az egyes részecskék között néha valamilyen átalakulás történhet (például fizikai, vagy kémiai reakció), ezt a színváltás jelzi. A ritka színváltások (átalakulások) nagyjából kiegyenlítősen történnek, a rendparaméter értéke 0,02 körül volt.

2. eset

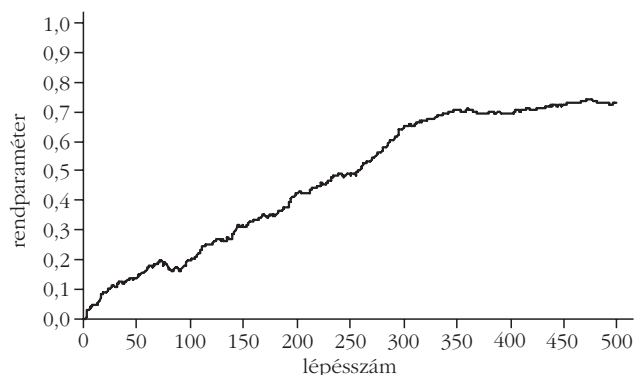
A második esetben mindegyik színhez egyforma értékű, alacsony immunitási időket állítottunk be, és a kaméleonok $R = 3,5r$ sugarú környezetüket érzékelték az ütközésük esetén. A 4. ábrán (az első belső színes borítón) a szimuláció halmozott oszlopdiagrammját, míg az 5. ábrán rendparaméter változását láthatjuk.

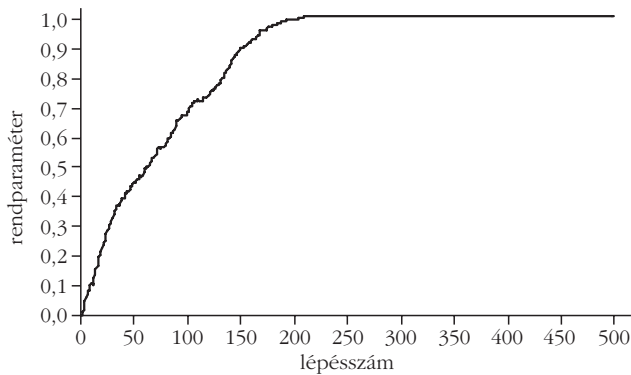
Most az egyes részecskék között viszonylag gyakran történik valamilyen átalakulás, amit a színváltás jelez. A szimuláció elején a színváltások (átalakulások) még nagyjából kiegyenlítősen történnek, de a fluktuációk következtében néhány színben csökkenés, másokban növekedés tapasztalható. Azok a kaméleonok, amelyekből véletlenszerűen egyre több lett, kezdték „uralni” a közvetlen környezetüket. A rendszeren belül kisebb-nagyobb tartományok alakultak ki, amelyeken belül csupa azonos színű kaméleon volt. A véletlenszerűen megerősödött nagyobb méretű tartományok egyre nagyobbra nőttek, a kisebbek gyakorlatilag eltűntek. A szimuláció végén már csak pár egyszínű, nagy tartomány maradt, az eredeti színek többsége teljesen eltűnt. A rendparaméter értéke folyamatosan növekedett, majd egy idő után – 0,75 környékén – nagyjából állandó maradt, mivel a nagyra „hízott” tartományok között egyfajta dinamikus egyensúly alakult ki. (Ezek a tartományok emlékeztetnek a ferromágneses domének kialakulására.)

3. eset

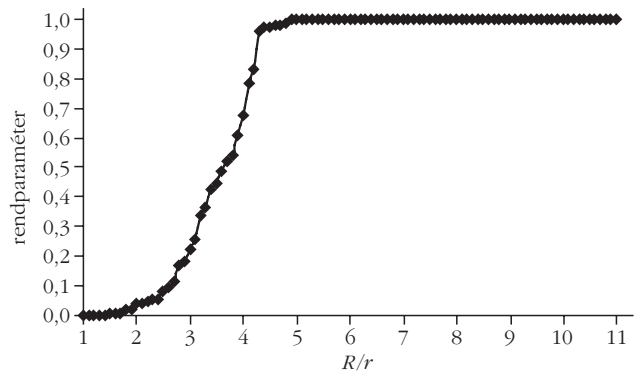
A harmadik esetben ($s = 1$) darab színhez egyforma értékű, alacsony immunitási időt választottunk, viszont egy színhez a többitől egy véletlenszámmal nagyobb értékű immunitási időt állítottunk be. Ez az egy kiemelt szín tehát „helyzeti előnyben” van a többivel

5. ábra. A rendparaméter változása a szimuláció során. Mindegyik színhez alacsony immunitási idő tartozik, a kaméleonok $3,5r$ sugarú környezetüket érzik ütközéskor.





7. ábra. A rendparaméter változása a szimuláció során. Mindegyik színhez – egy kivételével – alacsony immunitási idő tartozik, a kaméleonok $8r$ sugarú környezetüket érzik ütközéskor.



8. ábra. A rendparaméter értékének változása a R/r függvényében. (Minden szimuláció esetén a teljesen rendezetlen, $q = 0$ rendszerből indultunk ki.)

szemben, mert a hosszabb immunitási ideje miatt darabszáma az elején biztosan nem csökkenhet, illetve később is ritkábban „hajlamos” színváltásra, mint a többi. (Ehhez hasonló viselkedés elképzelhető egy sokrészeske-rendszerben is, ha valamelyik típusú részecskének jobban kedveznek az adott körülmények. Természetesen más körülmények esetén másik típusú egyedek kerülhetnek pillanatnyi helyzeti előnybe.) A kaméleonok most $R = 8r$ sugarú környezetüket érzékelték az ütközésük esetén. A 6. ábrán (az első belső színes borítón) a szimuláció halmozott oszlopdiaagramját, míg a 7. ábrán rendparaméter változását láthatjuk.

Az egyes egyedek között gyakran történik átalakulás. A szimuláció elején a színváltások (átalakulások) még nagyjából kiegyenlítetten történnek. A fluktuációk következtében néhány színben csökkenés, másokban növekedés tapasztalható; a kiemelt színben a többieknél erőteljesebb a növekedés a magasabb immunitási idő miatt. A kiemelt színű kaméleonok fokozatosan kezdik „uralni” közvetlen környezetüket. A rendszeren belül az elején a többi színből is kialakulnak kisebb tartományok, amelyeken belül csupa azonos színű kaméleon volt, de a kiemelt színű megerősödött, ez a legnagyobb méretű tartomány egyre csak „hízik”. A szimulációban nagyjából 150 lépés alatt megtörténik a hirtelen fázisátalakulás, azaz csak a kiemelt színű tartomány marad meg, a többi szín teljesen eltűnik.

Ebben a modellben „pillanatszerű fázisátalakulásnak” (hirtelen rend kialakulásának) is megvan a valószínűsége. A megfelelő paraméterek esetén, akár néhány száz lépésben kialakulhat a rend.

Kritikus paraméterérték

A szimulációk indulásakor a rendparaméter értéke mindig 0 volt (minden lehetséges színből azonos számú kaméleon volt kezdetben). Egyes esetekben 500 lépés után is csak 0,01 környékén fluktuált a rendparaméter, azaz a rendszer szinte ugyanannyira rendezetlen maradt, mint az elején volt. Az előzőekben azt is láthattuk, hogy a kezdeti véletlenszerű, rendezetlen állapotról kiindulva, bizonyos paramétereknél akár

néhány száz lépés után (azaz viszonylag hirtelen) teljes rend alakulhat ki. A R/r érték növelésével érhetjük el, hogy a rend kialakuljon, azaz bekövetkezzen a fázisátalakulás.

Mekkora az a kritikus R/r érték, ahol számíthatunk a rend kialakulására? Ennek eldöntésére külön szimulációsorozatot készítettünk, ahol a R/r értéket fokozatosan növeltük, és azt figyeltük, hogy 500 lépés után mekkora a rendparaméter értéke. Azért választottunk ennyi lépést, mert a korábbi szimulációk 500 lépésszáma megmutatta, hogy a teljes rend kialakulásához, ennyi lépés – sőt akár jóval kevesebb is – bőven elegendő. Az összes szimuláció indulásakor a rendszer hőmérséklete ($T_0 = 300$ K), a hőmérséklet időfüggvénye ($T_i = T_0 + 0,1i$) is ugyanaz volt, mint az előzőekben. Minden esetben 10 különböző kezdőszín és mindegyik színből 50 kaméleon lett véletlenszerűen elhelyezve a terráriumban. (Eddig tehát megegyeztek az előző esetekkel.) Immunitási idők választásában viszont határozottan különbözött ez a szimulációsorozat az előzőektől, ugyanis egy (kiemelt) színnél véletlenszerűen volt valamekkora immunitási idő, míg a többinél ez végig 0 érték maradt.

Ezzel a feltételekkel lefuttattunk 1000 db szimulációt úgy, hogy a R/r értéket 1,1-től 11-ig, 0,1-es lépésközzel fokozatosan növeltük és minden esetben 10 szimulációt hajtottunk végre (100 · 10 db szimuláció). A végeredményt statisztikailag elemeztük. A 8. ábrán a R/r érték függvényében a q rendparaméter átlagértéke látható.

Láthatjuk, hogy a rendparaméter értéke $R/r \approx 4$ környékén nagyon meredeken emelkedik, azaz rendszerünkben itt található az a kritikus paraméterérték, ahol a rendezetlen rendszerben kialakul a rend, vagyis bekövetkezik a fázisátalakulás.

Tapasztalatok

Az alapprogram közös elkészítése után a különböző viselkedési modellek programozása már viszonylag „egyszerűbb” feladat, ilyen átalakításokat már önállóan is végezhetnek a diákok. A dolgozatban leírt modellt én találtam ki, de a tanulók szabadon kísérletez-

tek különböző „viselkedésű” kaméleonok megadásával. A projektben résztvevő diákok nagyon élvezték a munkát; a tanulók az egész feladatot „játéknak” tekintették.

A projekt végén megbeszéltük, hogy a képzeletbeli kaméleonokhoz hasonlóan viselkedő rendszerek a valóságban is előfordulhatnak. Gondolhatjuk például a kaméleonokat részecskéknek, amelyek egy zárt tartályban mozognak, egymással és a tárolóedény falával rugalmasan ütközhetnek. (A szimulációban síkbeli mozgásokkal foglalkoztunk.)

A részecskék lehetnek s számú állapotban, amelyek között bizonyos valószínűséggel átmenetek fordulhatnak elő (például kémiai reakció, biokémiai folyamat vagy fizikai állapotváltozás), hasonlóan a kaméleonok színváltásához. Ahogy a terráriumban bizo-

nyos esetekben „fázisátalakulásokat” tapasztaltunk, egy valós rendszerben is hasonlóképpen játszódhatnak le fázisátalakulások.

A kaméleonok viselkedésének játékos szimulációja során rengeteg fizikai és informatikai ismerettel bővült a tanulók tudása anélkül, hogy az elején ezt tűztem volna ki célul. Mi csupán egy „számítógépes játékot” fejlesztettünk, legalábbis ők ezt hitték az elején. Természetesen a tanárnak más cél lebeg a szeme előtt: tudja, hogy „mire megy ki a játék”, a tanulók képességeinek fejlesztésére, a kompetenciák és az ismeretek bővítésére.

Irodalom

1. Neda Z., Káptalan E: A sokaság ritmusa. *Fizikai Szemle* 59/9 (2009) 301–305.

BESZÁMOLÓ A 2014. ÉVI EÖTVÖS-VERSENYRŐL

Tichy Géza – ELTE Anyagfizikai tanszék

Vankó Péter – BME Fizika tanszék

Vigh Máté – ELTE Komplex Rendszerek Fizikája tanszék

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 2014. évi Eötvös-versenye október 17-én délután 3 órai kezdettel tizenöt magyarországi helyszínen¹ került megrendezésre. A versenyen a három feladat megoldására 300 perc áll rendelkezésre, bármely írott vagy nyomtatott segéd-eszköz használható, de zsebszámológépen kívül minden elektronikus eszköz használata tilos. Az Eötvös-versenyen azok vehetnek részt, akik vagy középiskolai tanulók, vagy a verseny évében fejezték be középiskolai tanulmányaikat. Összesen 93 versenyző adott be dolgozatot, 18 egyetemista és 75 középiskolás.

Az ünnepélyes eredményhirdetésre és díjkiosztásra 2014. november 21-én délután került sor az ELTE Konferenciatermében. Az idei díjazottakon kívül meghívást kaptak az 50 és a 25 évvel ezelőtti Eötvös-verseny nyertesei is. Először az akkori feladatokat mutattuk be.

Az 1964. évi Eötvös-verseny feladatai

1. feladat

60°-os és 30°-os hajlásszögű lejtők egy élben találkoznak. Itt kicsiny, súrlódásmentes csigát helyezünk el. A csigán átvetett fonál végein m_1 és m_2 tömegű ládák függenek, amelyek csúszási súrlódási együtthatója $\mu = 0,2$. Milyen feltétel mellett maradnak a ládák nyugalomban?

2. feladat

Kilenc négyzetből álló hálózat mindegyik éle R ellenállású. A középső négyzetes mező helyébe tökélete-

sen vezető négyzetlapot helyezünk. Mennyi az eredő ellenállás a négyzet két átlagos csúcsa között?

3. feladat

Egy gyűjtőlencsét szemünkhöz közel helyezünk el úgy, hogy egy hengeres parafadugó homlokfelületét a tisztán látás távolságában élesen látjuk. A dugó és a lencse kölcsönös távolságát rögzítjük. Elhelyezhetjük-e szemünket úgy, hogy a dugó palástfelületét is lássuk? A henger hossz tengelye és a szem tengelye mindig a lencse tengelyében legyen!

Az 1989. évi Eötvös-verseny feladatai

1. feladat

Gergő gyakran segít a háztartásban. A zacskós tejet az *ábrán* látható módon a zacskónál valamivel szűkebb keresztmetszetű, levágott tetejű és alul kilyukasztott műanyag flakonban szokták tárolni. Gergő megfigyelése szerint a szájával lefelé fordított flakonból a még felbontatlan zacskós tej magától kiesik, viszont a tetejénél megfogott tejes zacskóról még akkor sem esik le a flakon, ha alulról egy másik zacskó tejet akasztunk rá.



2. feladat

Egy keskeny, hosszú csőben (kapillárisban) 30 mm magasra emelkedik a víz a csővön kívüli szinthez képest. A víz felszíne 30°-os szöget zár be a cső falával az érintkezési vonalnál. A csövet benyomjuk a vízbe

¹ Részletek a verseny honlapján: <http://mono.eik.bme.hu/~vanko/fizika/eotvos.htm>

(így az teljesen megtelik), majd a felső végén ujjunkkal befogva, függőleges helyzetben egészen kiemeljük a csövet a vízből. Ezután a befogott nyílást újra szabaddá tesszük, s ekkor a víz egy része kifolyik.

Lehet-e a függőleges helyzetű csőben maradó vízszlop hossza

- a) 123 mm; b) 62 mm; c) 41 mm; d) 20 mm?

3. feladat

Az iskolai 12 V-os, 50 Hz-es váltóáramú áramforrásra sorba kapcsoltunk egy 24 V, 10 W-os izzót és egy 101,3 μF kapacitású kondenzátort. Az izzó alig világít. Rendelkezésünkre áll még egy 0,1 H induktivitású tekercs is. Hogyan lehetne a kapcsolást úgy átalakítani, hogy az izzó szép fényesen világítson? (A tekercs ohmos ellenállása elhanyagolható. Csak a kapcsolást szabad átalakítani, az alkatrészeket nem.)

Az egykori díjazottak közül *Corradi Gábor* (ötven évvel ezelőtti győztes) és *Somfai Ellák* (huszonöt évvel ezelőtti második díjas) jött el az alkalomra, akik a feladatok ismertetése után röviden beszéltek a versennyel kapcsolatos emlékeikről és pályájukról.

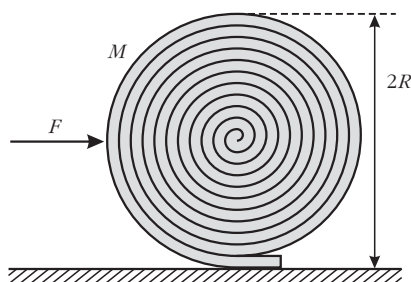
Ezután következett a 2014. évi verseny feladatainak és megoldásainak bemutatása. Az első és a harmadik feladat megoldását *Vigh Máté* és *Gnädig Péter* (a feladatok kitűzői), míg a második feladatot a külföldi útja miatt távol maradó *Tichy Géza* helyett *Vankó Péter* ismertette.

A 2014. évi verseny feladatai és megoldásuk

1. feladat

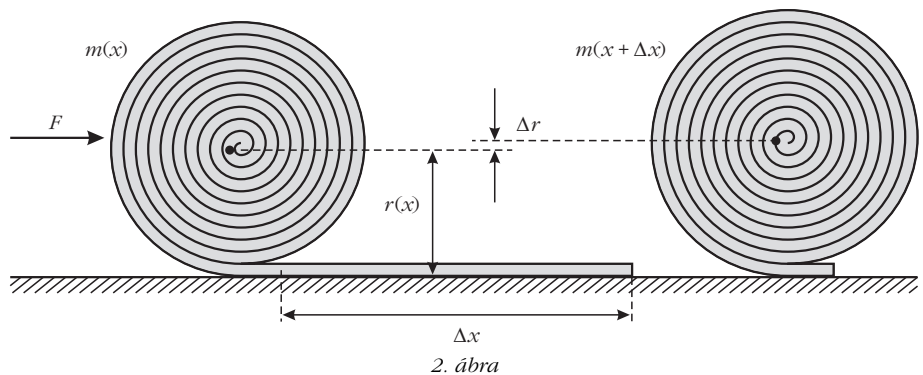
Kitűzte: Vigh Máté

Egy M tömegű, L hosszúságú, hajlékony futószőnyeget szorosan felgöngyöltünk egy R sugarú hengerré (1. ábra). Ha a felgöngyölt szőnyeget elengedjük, az magától kitekeredik. (A gördülési ellenállás elhanyagolható.)



1. ábra

- a) Milyen erőhatással magyarázható a jelenség?
b) Mekkora vízszintes erővel akadályozható meg a szőnyeg kitekeredése?



2. ábra

Megoldás

a) A guriga tömegközéppontja nem esik az alátámasztási pont fölé, az így fellépő forgatónyomaték görgeti ki a szőnyeget.

b) A guriga egyensúlyát biztosító vízszintes F erőt a virtuális munka elvéből határozhatjuk meg. Ha a nem teljesen felgöngyölt gurigát kicsiny Δx távolsággal feljebb görgetjük (2. ábra), az $F(x)$ erő által végzett munka a szőnyeg helyzeti energiájának (kicsiny) megváltozását biztosítja:

$$F(x) \Delta x = \Delta E_h.$$

A szőnyeg helyzeti energiája

$$E_h(x) = m(x) g r(x),$$

amely a feltekeredés közben két okból is növekszik: egyrészt tömegközéppontja magasabbra kerül, másrészt feltekerés közben a szőnyeg „hízik” is. (A földön fekvő rész helyzeti energiája 0, azzal nem kell számolnunk.)

A helyzeti energia kicsiny megváltozása eszerint

$$\Delta E_h = m g \Delta r + \Delta m g r.$$

A szőnyeg x hosszúságú darabjának feltekerésekor kialakuló szőnyegguriga m tömege egyenesen arányos a felgöngyölt rész hosszával, így

Vigh Máté



$$\Delta m = \frac{m}{x} \Delta x \quad \text{és}$$

$$m = \frac{M}{L} x,$$

hiszen $x = L$ esetén a tömeg éppen M .

A guriga keresztmetszetének területe is arányos x -szel, vagyis a guriga sugarára fennáll:

$$r^2 = \frac{R^2}{L} x.$$

Ebből kifejezhetjük Δr -t is Δx segítségével (felhasználva, hogy Δr kicsi):



Corradi Gábor

Somfai Ellák

$$\frac{R^2}{L} \Delta x = (r + \Delta r)^2 - r^2 \approx 2 r \Delta r,$$

$$\Delta r = \frac{1}{2} \frac{r}{x} \Delta x.$$

Mindezt behelyettesítve ΔE_h kifejezésébe:

$$\Delta E_h = \frac{3}{2} \frac{m g r}{x} \Delta x.$$

Ebből pedig az x darabon feltekert guriga megtartásához szükséges erő:

$$F(x) = \frac{3}{2} \frac{m g r}{x} = \frac{3}{2} \frac{M g R}{L} \sqrt{\frac{x}{L}},$$

amelyből a keresett F erő $x = L$ helyettesítéssel

$$F = \frac{3}{2} \frac{R}{L} M g.$$

Megjegyzések

1. Néhány versenyző próbálkozott a virtuális munka elvével, de a helyzeti energia megváltozásában elfelejtkeztek az egyik tagról. A fenti megoldásban az erőt a feladat kérdésénél kicsit általánosabban, x függvényében egy tetszőleges helyzetben is megadtuk, ez lehetőséget ad a megoldás ellenőrzésére. Az erő elmozdulás szerinti integrálásával meghatározzuk a feltekeréshez szükséges teljes munkát:

Szölőssi Irén és Virágh Anna



$$\int_0^L F(x) dx = \int_0^L \frac{3}{2} \frac{M g R}{L} \sqrt{\frac{x}{L}} dx = M g R,$$

ez valóban megegyezik a teljesen feltekert szőnyeg helyzeti energiájával.

2. A versenyzők többsége statikai megoldással próbálkozott. A feladat így is megoldható, azonban még könnyebb tévedni. A statikai megoldásban a forgatónyomatékok egyensúlyát írjuk fel a szőnyeg alátámasztási pontjára:

$$F R = M g x_{\text{tkp}},$$

ahol x_{tkp} a guriga tömegközéppontjának távolsága az alátámasztáson át húzott függőleges egyenestől. A feladat ennek meghatározása.

A tömegközéppont két okból sem esik az alátámasztási pont fölé: egyrészt a guriga spirális alakja miatt a guriga érintője nem merőleges a spirál középpontjából az érintési ponthoz húzott sugárra, másrészt a guriga tömegközéppontja nem a spirál középpontjába esik. (Mindkét okra rájöttek versenyzők, de senki se gondolt mindkettőre, így helyes megoldás nem született.)

A guriga „ferdesége”, és így a spirál középpontjának helye könnyen meghatározható a menetemelkedésből. A tömegközéppont ebből származó elmozdulása

$$x_1 = \frac{1}{2} \frac{R^2}{L}.$$

A guriga tömegközéppontjának a spirál középpontjához viszonyított helyét sokféleképp meg lehet határozni, erre sok helyes megoldás érkezett az integrálásból az ügyes trükkökig. Egy lehetőség például az, hogy a gurigát gondolatban kiegészítjük egy további fél menettel, amelynek tömegét és tömegközéppontjának helyét is ismerjük: ekkor a szimmetria (és a szőnyeg kis vastagsága) miatt a tömegközéppont ugyanolyan távolra kerül a spirál középpontjától, csak éppen a másik irányba – és ebből a keresett távolság már könnyen kiszámolható:

$$x_2 = \frac{R^2}{L}.$$

A két részeredményt összeadva

$$x_{\text{tkp}} = x_1 + x_2 = \frac{3}{2} \frac{R^2}{L},$$

amiből a keresett erőre valóban helyes eredményt kapunk.

3. Néhány versenyző a szőnyeg rugalmas tulajdonságaival próbálta magyarázni a jelenséget. A feladat szövegében viszont az áll, hogy a szőnyeg *bajlékony*, ami arra utal, hogy ezt a hatást nem kell figyelembe venni. (Nem is voltak megadva olyan adatok, amikre ez esetben szükség lenne.)



Vankó Péter és Kürti Jenő

2. feladat

Kitűzte: Tichy Géza

András, Bence és Csaba egyhetes biciklitúrán vesznek részt. A reggelihez minden nap teát isznak; a teavízet a saját fém bögréjükben forralják fel egy (nyomáscsökkentő szelep nélküli) butántöltésű gázpalack lángja fölött. A túra végéhez közeledve érdekes megfigyelést tesznek: a teavíz felforralásához feltűnően több időre van szükség, mint a túra elején.

András szerint ebben nincs semmi különös: ahogy csökken a palackban a gáz mennyisége, úgy csökken a nyomás, így a gázláng is gyengébben ég. Bence figyelmeztet rá, hogy a palackban folyadék is van, ezért a gáz nyomása a mennyiségtől függetlenül mindig a telítési gőznyomással egyenlő. Szerinte azért csökkent le a nyomás, mert a folyadék már teljesen elfogyott a palackból. Csaba ekkor meglötyögte a palackot, és meglepve tapasztalja, hogy még van benne valamennyi folyadék.

Mi lehet az oka a forralási idő meghosszabbodásának?

Megoldás

A gázpalack használata közben a palackból gáz áramlik ki, a kiáramló gázt a palackon belül a folyékony bután forrása pótolja. A folyadék elforralásához energiára van szükség, amelyet – legalább részben – a folyékony butánból von el, és így a bután lehűl. Amikor a palackban már csak kevés bután van, akkor sokkal kisebb a hőkapacitása, mint a teli palacknak, és így jobban lehűl. A folyadék-gáz rendszerekben kialakuló egyensúlyi gőznyomás viszont erősen hőmérsékletfüggő, a hőmérséklet aránylag csekély csökkenése is a nyomás jelentős csökkenését, és ezzel a vízforralási idő jelentős meghosszabbodását okozza.

Megjegyzések

1. A forralási idő meghosszabbodását természetesen nagyon sok más tényező is okozhatja: a levegő vagy a víz hőmérsékletének csökkenése, a légnyomás növekedése (az időjárás vagy a tengerszint feletti magasság változása miatt), a főző szelepének eldugulása, és így tovább. (A feladatban azonban ezekről nincsen szó, és a fiúk – akik láthatóan elég okosak –

szintén nem beszélnek róla.) Általában igaz, hogy egy jelenséget végtelen sok hatás befolyásol kisebb-nagyobb mértékben. Így fel se sorolhatjuk azt a *vég-telen* sok hatást, amit elhanyagolunk, nem veszünk figyelembe. A feladat azon *néhány* effektus felismerése és leírása, amelyek a jelenséget alapvetően meghatározzák.

Erre a feladatra hat versenyző adott hibátlan megoldást. Még többen rájöttek arra, hogy a palack lehűl, de nem elemezték a folyadék mennyisége és a lehűlés mértéke, illetve a lehűlés és az egyensúlyi gőznyomás csökkenése közti kapcsolatot.

2. A gyakorlatban használt gázpalackok jelentős részében nem tiszta bután, hanem propán-bután keverék található. A folyadékkeverékek gőznyomását a Raoult-törvény írja le. Ilyenkor a két komponens nem egyforma sebességgel fogy a palackból, és ez is okozhatja a nyomás csökkenését. A feladatban ezért szerepel tiszta bután töltésű palack. Ilyen is kapható: főleg nyáron előnyös, mert a bután gőznyomása jóval kisebb, mint a propáné, így nagy melegben se alakul ki túl nagy nyomás.

3. Az eredményhirdetés végén a jelenséget kísérlettel is demonstráltuk: egy már majdnem kiürült palack aljára platina ellenállás-hőmérőt ragasztottunk, amelynek ellenállását egy multiméterrel mértük. A palack szelepének megnyitása után az ellenállás látványosan csökkent, ami a hőmérséklet csökkenését igazolta.

3. feladat

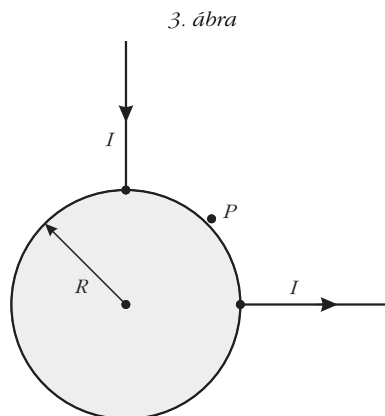
Kitűzte: Gnädig Péter

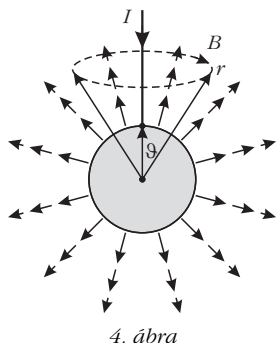
Egy R sugarú, rézből készült, vékony falú gömbhéjat szigetelő állványra helyezünk. A gömb egyik pontjába hosszú, sugárirányú, egyenes vezetővel I erősségű áramot vezetünk, rá merőlegesen (szintén sugárirányban) pedig elvezetjük azt (3. ábra).

Milyen mágneses mező alakul ki a gömb belsejében, illetve a gömbön kívül? Mekkora például a mágneses indukcióvektor az áramok be- és kivezetési pontja között „félúton” lévő P pontban, egy „hajszálnival” a gömb felületén kívül?

Megoldás

Számítsuk ki először egyetlen félegyenes mentén befolyó, majd a gömb felületéről radiálisan, gömbszimmetrikusan távozó áram által létrehozott mágneses teret! (Ez az árameloszlás ténylegesen megvalósítható,





4. ábra

ha az igen jól vezető gömböt valamekkora vezetőképességű „végtelen” közegbe helyezzük, és feszültséget kapcsolunk rá.)

Egyetlen áramvezető esetén a mágneses mező az egyenes vezető által kijelölt „tengely” körül forgásszimmetrikus, és az indukcióvonalak, ahogy ezt meg fogjuk mutatni, kör alakúak.

A mágneses indukció nagyságát az Ampère-féle gerjesztési törvényből határozhatjuk meg. A gömb belsejében képzeletben felvett zárt görbe *nem* ölel körül áramot, ezért itt (amikor $r < R$) *nincs* mágneses tér. A gömbön kívül ($r > R$) viszont a gerjesztési törvény így írható (lásd a 4. ábrát):

$$2\pi r \sin\vartheta B(r, \vartheta) = \mu_0 \left(I - \frac{1 - \cos\vartheta}{2} I \right).$$

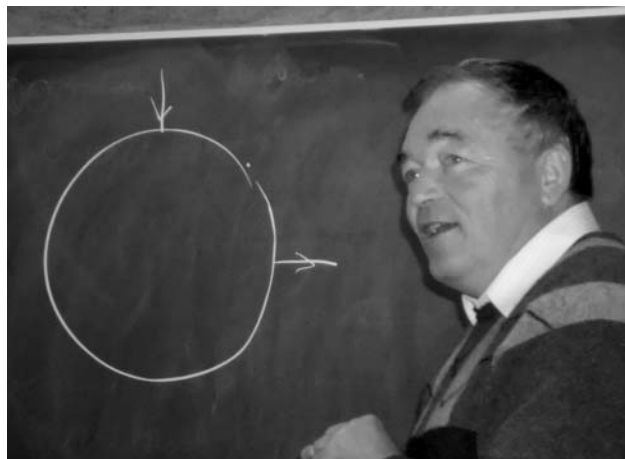
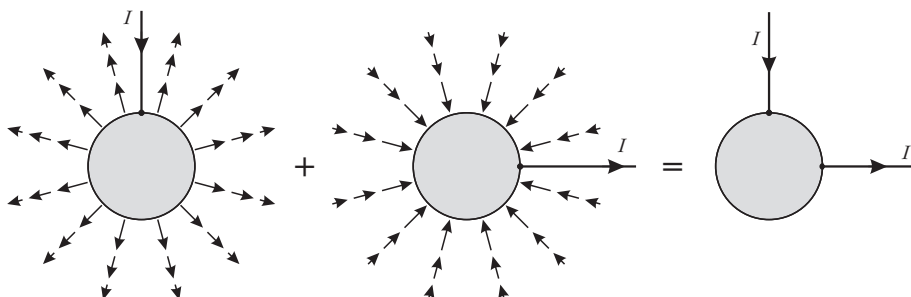
Felhasználtuk, hogy a 4. ábrán szaggatottan jelölt körvonallal határolt r sugarú gömbösüveg felszíne $2\pi r^2(1 - \cos\vartheta)$, az r sugarú gömb felszíne pedig $4\pi r^2$, emiatt a gömbszimmetrikusan kifolyó áram számításba vehető része $I(1 - \cos\vartheta)/2$ erősségű. A mágneses indukció nagysága tehát

$$B(r, \vartheta) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1 + \cos\vartheta}{r \sin\vartheta} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\operatorname{ctg}(\vartheta/2)}{r}.$$

Az áramvezető közelében ($\vartheta \approx 0$) a kis szögekre érvényes $\operatorname{ctg}(\vartheta/2) \approx 2/\vartheta$ összefüggés miatt éppen a végtelen egyenes vezető körüli mágneses mezőt kapjuk vissza; a bevezetett árammal ellentétes oldalon pedig ($\vartheta \rightarrow 180^\circ$) az indukció fokozatosan eltűnik.

Végezzük el ugyanezt a számítást a 90° -kal elforgatott egyenes vezetőn kivezetett és gömbszimmetrikusan bevezetett áramokra is, majd szuperponáljuk a két elrendezés mágneses terét (5. ábra). A gömb bel-

5. ábra



Gnädig Péter

sejében továbbra is mindenhol *nulla* lesz az indukció, a kérdéses P pontban pedig (a gömbön kívül)

$$B_P = 2 B(R, 45^\circ) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \operatorname{ctg} 22,5^\circ = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} (\sqrt{2} + 1).$$

Hátra van még annak igazolása, hogy a 4. ábrán látható hengerszimmetrikus elrendezésben mágneses indukcióvonalak csak kör alakúak lehetnek (bár ezt a bizonyítást a versenyzőktől nem vártuk el). A hengerszimmetria nem zárna ki, hogy az indukciónak radiális és a szimmetria tengelyével párhuzamos, „hosszanti” komponensei is legyenek. (Gondoljunk például a köráram szintén hengerszimmetrikus terére!)

Illesszünk az egyenes vezetőre és egy rajta kívül lévő P pontra egy síkot, majd tükrözzük az egész elrendezést erre a síkra! A tükrözés után az árameloszlás pontosan olyan marad, amilyen eredetileg volt, tehát a tükrözés során a mágneses mező sem változhat meg.

A mágneses indukció – jöllehet vektorként szoktuk ábrázolni – nem egy irányított szakasz, a tér egyik pontjából egy másikba mutató nyíl (úgynevezett *polárvektor*, mint amilyen a helyvektor vagy az elektromos térerősség), hanem egy irányított körvonallal és egy nagysággal megadható mennyiség (mint például a szögsebesség vagy a forgatónyomaték). Az ilyen mennyiségeket *axiálvektornak* nevezzük. A mágneses indukció körvonalát úgy kaphatjuk meg, ha megadjuk azt a síkot és körüljárási irányt, amely mentén egy megfelelő sebességgel mozgó töltött részecske (az adott pont közelében) körmozgást végezhet. A sík normálisa és a körmozgás körüljárási iránya biztosítja egyértelműen az indukcióvektor irányítottságát.

Belátjuk, hogy a feladatban szereplő mágneses mezőnek nem lehet „radiális” (vagyis az áramvezetőtől a P pontba mutató vektorra merőleges síkú körvonallal szemléltethető) komponense. Ez a komponens ugyanis az említett tük-

rögzítés során előjelet váltana, de ugyanakkor változatlanak is kell maradnia, ez a két feltétel pedig csak úgy teljesülhet egyszerre, ha a vizsgált indukciókomponens nagysága zérus (6.a ábra). Ugyanilyen okok miatt a mágneses indukciónak nem lehet „hosszanti” (az egyenes vezetőre merőleges síkú körvonallal megadható) komponense sem, hiszen az is előjelet váltana a tükrözés során, pedig értékének változatlanak kell maradnia (6.b ábra). A mágneses indukció harmadik, a tükrözés síkjába eső körvonallal megadható komponenséről semmit nem állíthatunk, hiszen azt a tükrözés művelete változatlanul hagyja (6.c ábra).

Megjegyzés

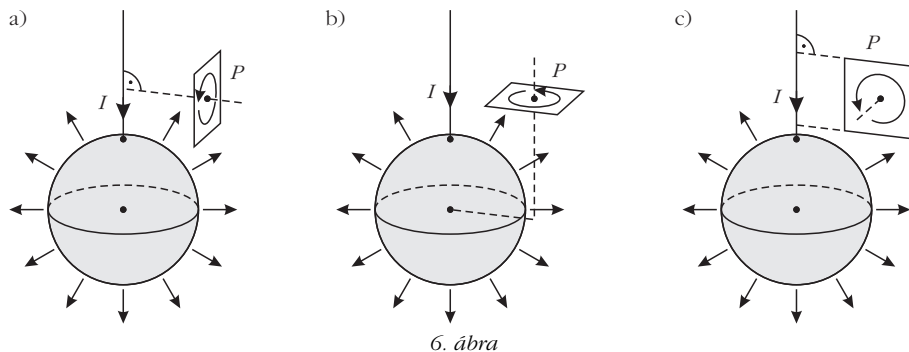
A feladatra két teljesen hibátlan megoldás érkezett. Az egyik versenyző bebizonyította, hogy a gömb felületén az áramvonalak körívek, és meghatározta az árameloszlást, majd ebből a keresett mágneses indukciót. A másik versenyző azt mutatta meg, hogy a gömbön kívül az elrendezésnek ugyanolyan mágneses tere van, mint egy két félegyenesből összerakott L-alakú vezetéknek (amely viszont a Biot–Savart-törvényvel könnyen meghatározható). Erre két további versenyző is „ráért” (és így helyes eredményt kapott), de ezt nem igazolta.

A feladatok és megoldásaik ismertetése után került sor az eredményhirdetésre. A díjakat Kürti Jenő, az Eötvös Loránd Fizikai Társulat főtítkára adta át.

Egyetlen versenyző sem oldotta meg az összes feladatot, így a versenybizottság nem adott ki első díjat.

Második díjat nyert és a verseny győztese Öreg Botond, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója, Horváth Gábor tanítványa.

Harmadik díjat nyert Fehér Zsombor és Janzer Barnabás, mindketten a Budapesti Fazekas Mihály



6. ábra

Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulói és Horváth Gábor tanítványai.

Kiemelt dicséretben részesült Horicsányi Attila, az Egri Dobó István Gimnázium érettségizett tanulója, Hóbor Sándor tanítványa és Takáts János, a budapesti Városmajori Gimnázium érettségizett tanulója, Ábrám László tanítványa – jelenleg mindketten az ELTE fizikus hallgatói.

Dicséretben részesült Morvay Bálint Géza, a pécsi Szent Mór Iskolaközpont érettségizett tanulója, Merényi Péter tanítványa – jelenleg a PTE fizikus hallgatója –; Olosz Balázs, a PTE Babits Mihály Gyakorló Gimnázium 12. osztályos tanulója, Koncz Károly tanítványa; Szántó András, a debreceni Mechwart András Gépipari és Informatikai Szakközépiskola 12. osztályos tanulója, Szőlősi Irén tanítványa; Tari Balázs, a miskolci Földes Ferenc Gimnázium 12. osztályos tanulója, Bíró István és Zámboreszky Ferenc tanítványa; valamint Virágh Anna, az Érdi Vörösmarty Mihály Gimnázium 12. osztályos tanulója, Varga László és Varga Zsolt tanítványa.

Minden díjazott és felkészítő tanáraik is megkapták az eredményhirdetés előtt néhány nappal megjelent 333 furfangos feladat fizikából című feladatgyűjteményt, amelyet a szerzők – Gnädig Péter, Honyek Gyula és Vigh Máté, az Eötvös-versenybizottság egykori és mostani tagjai – dedikáltak. A MOL támogatásával a második díjjal 25 ezer, a harmadik díjjal 20 ezer, a kiemelt dicsérettel 10 ezer forint pénzdíj jutalom járt, a dicséretesek pedig a Typotex Kiadó által felajánlott könyvet kapták.

Az első sorban balról a második a verseny győztese: Öreg Botond.



BRÓDY IMRE ORSZÁGOS FIZIKA KÍSÉRLETVERSENY, 2014

Kiss Lászlóné
Nyíregyházi Arany János Gimnázium,
Általános Iskola és Kollégium

Tizenhárom város huszonkét iskolájából mintegy nyolcvan diák vett részt a 2014-ben hetedik alkalommal megrendezett Bródy Imre Országos Fizika Kísérletversenyen, a Nyíregyházi Főiskolán.

Az Arany János Gimnázium és Általános Iskola 2008-ban indította útjára a megmérettetést, akkor még csak saját tanulói részvételével. A cél természetesen a fizika megszerettetése, és egy kis „kedvcsináló” a kísérletezés iránt. A diákok körében nagy sikert aratott, így 2010-ben városira, 2012-től megyeire bővült a verseny és 2014-ben először országos szinten hirdették meg. A diákok május 16-án, pénteken három szekcióban mérték össze a fizikaórákon szerzett elméleti és gyakorlati tudásukat. Kedvenc kísérleteiket mutatták be, valamint versenyeztek a hőlégballonok és a hajítógépek készítői is.

Hőlégballon-verseny

Cél, hogy a hőlégballon a lehető leghosszabb ideig a levegőben maradjon.

A „hőlégballon” saját készítésű, működőképes modell kell legyen, amely egy legfeljebb 60 literes műanyag szemetesszákból készülhet. Minden versenyző ugyanarról az indítóállványról indíthatja hőlégballonját, ami egy asztalra helyezett madárkalitka, alján borseszéggel.

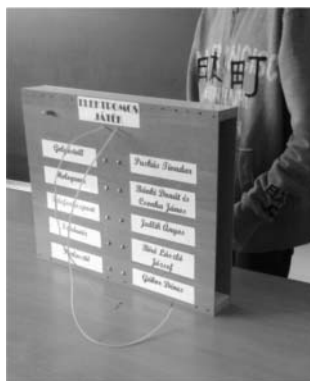
A feladat nehézsége az, hogy a versenyzőknek összhangba kell hozniuk a ballon méreteit a megfelelően felmelegíthető levegőmennyiséggel, és biztosítaniuk kell a ballon függőleges mozgását. Ehhez többféle megoldás is alkalmazható: egy lehetséges változat, amikor a ballon kerületének 4 pontjára kis tömegű nehezéket illesztenek. A képen látható nagyon egyszerű modell is felemelkedik legalább 6 m magasságig.

Versenyen kívül felbocsátottak két „óriás ballont is” a Főiskola „C” épületének aulájában!

egyszerű modell



óriás ballon az aulában



elektromos játék



szívószál-szökökút

Kedvenc kísérletem

A kísérletek hihetetlenül széles repertoárját mutatták be a tanulók, a fizika majd mindegyik témaköréből kaphattunk ízelítőt. A diákok és kísérőtanáraik is jelen voltak a bemutatókon, így sokat tanultak egymástól, és egy-egy jó ötlettel is gazdagodva térhettek haza.

Hajítógépek

Minden évben ez vonzza a legtöbb érdeklődőt, most is több mint húszan szálltak ringbe a győzelemért.

A kiírás szerint a hajítógép saját készítésű, működőképes modell kell legyen, amely összeszerelt, kilövésre kész állapotban belefér egy 50 cm × 50 cm × 50 cm méretű kockába (és a hozzá tartozó kiegészítők – például felhúzókar – méretei sem haladhatják meg az 50 cm-t). A felhasznált anyagokra nincs korlátozás. A méret ilyen pontos meghatározására azért volt szükség, mert korábbi években a modelleket olyan erős rugóval látták el, hogy a megfeszítéséhez több jól megtermett középiskolás erejére is szükség volt. Így azonban nem „fair” a játék.

Az értékelés szempontjai:

- a verseny elsődleges célja egy teniszlabda minél nagyobb távolságra történő kilövése,
- a megvalósítás ötletessége, a modell szépsége.

Számtalan technikai megoldás született a gumiszalagostól a csavar- vagy laprugós kivitelekig. Az állványokat többnyire fából készítették, de több, teljes egészében fémből készülő példány is akadt.

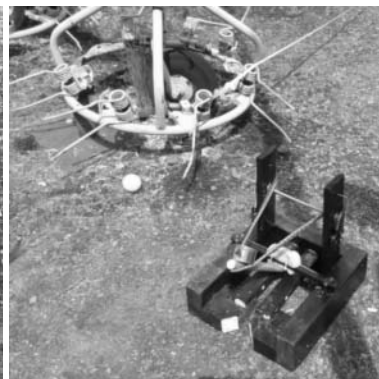
Nem csak a hajítás távolságát értékelték, hanem a célba dobást is, egy külön ezért készített várfalra. Ez utóbbi tette leginkább próbára a diákokat és hajítógépeiket. A legtöbb modellen egyelőre még nem oldották meg a pontos célzást, ez lehet a következő évi felkészülés, modelltökéletesítés egyik célja.



lányok is versenyeztek



gépész-tanulók mesterműve



„aranyos” munka

Összefoglalás

A versenyek közti szünetekben sem unatkozhattak a diákok, mert a „C” épület aulájában magyar fizikusokról láthattak kiállítást, az egyik előadóban pedig az Univerzumról szóló filmvetítést tekinthették meg.

Sokan támogatták a versenyt, így – a szponzorok jóvoltából – értékes nyeremények találtak gazdára a helyezetteknél. A felkészítő tanárok és minden résztvevő tanuló emléklapot kapott. Külön jutalomban részesült a legtöbb versenyzőt indító iskola is.



eléri a várat a labda?



a „ledöntendő” várfal

Itt köszönöm meg *Beszeda Imre* tanár úr áldozatos munkáját, kollégáinak a zsűriben való részvételét, az „Arany” tanárainak, tanárnőinek önzetlen segítségét.

AKKREDITÁLT TANÁRTOVÁBBKÉPZÉS

Az ELTE *Fizika tanítása* tanári PhD-programhoz kapcsolódva

Az ELTE TTK Fizikai Intézet *Korszerű tartalom és módszerek a fizika XXI. századi tanításában I és II.* címmel két, egyenként 60 órás akkreditált tanártoábbképző tanfolyamot hirdet középiskolai fizikatanárok számára (engedélyszámuk: PED/1227-1/2014, illetve PED/1228-1/2014).

A *továbbképzés célja*, hogy bemutassa a gyorsan fejlődő fizikatudomány új eredményeinek középiskolai szintű interpretációját és mind tartalmilag, mind módszertanilag megkönnyítse a tanárok számára ezek tanítását.

A továbbképzés a *Fizika tanítása* doktori program előadásaihoz kapcsolódik, felkínálva, hogy a doktori anyag egy részét azok is elsajátíthassák, akik nem tervezik a doktori képzésbe való belépést. A továbbképzésre jelentkezők a doktori képzés négy szemeszterének előadásaiából összeállított négy modul

(A–D) bármelyikét választhatják. Minden modul 4 tárgyat foglal magába, a modulok rendszerét a felhívás végén foglaltuk össze. A négy modulból félévenként csak egy indul (az, ami a doktori képzés adott félévéhez kapcsolódik). Aki másik modul iránt érdeklődik, annak várnia kell, amíg az sorra kerül. Azok számára akik az első 60 órás modul elvégzése után további témák iránt is érdeklődnek, a továbbképzés második 60 órás egysége kínál újabb modulválasztási lehetőséget.

A modulok előadásai blokkosított formában kerülnek megtartásra 5 hónapon át, havonta egy szombati napot vesznek igénybe (jelenleg minden hónap második szombatját, reggel 9 és délután 5 óra között). 2015 februárjában a D, szeptemberében az A, 2016. februárban a B, szeptemberben a C modul indul, és így tovább, kétéves ciklusokban.

A 2015 februárjában induló tanfolyam (D modul) részvételi díja: 30 000 Ft.

A tanártoábbképzés eredményes elvégzése egyúttal könnyített lehetőséget jelent a bekapcsolódásra az ELTE Fizika Doktori Iskola tanári PhD-képzésébe. A könnyítés lényege az, hogy aki a továbbképzés könnyebb követelményeinek teljesítése helyett vállalja a doktori kurzus vizsgáinak letételét, az egy esetleges későbbi doktori képzés során az adott kurzusok alól felmentést és vizsgabeszámítást kap. Ennek feltétele, hogy a PhD-képzésbe való belépésre a továbbképzés befejezését követő 2 éven belül kerüljön sor. Továbbá, egyéni elbírálás alapján kapható könnyítés a doktori képzés tandíjának csökkentésére, a továbbképzés költségeire való tekintettel.

További információ a <http://fiztan.phd.elte.hu> honlapon.

A modul

Fizika tanítása I. (Klasszikus fizika: mechanika, hőtan)

A fizika történelmi, nagy kísérletei

A relativitáselmélet alapjai

Fizika a kémiában

Először a 2015/2016 tanév I. félévében

B modul

Fizika tanítása II. (Klasszikus fizika: elektromágnesesség, optika)

A számítógépek alkalmazása és e-learning

Energiatermelés és környezet

Kooperatív jelenségek, interdiszciplináris vonatkozások

Először a 2015/2016 tanév II. félévében

C modul

Fizika tanítása III. (Modern fizika: atomfizika, héj- és magfizika)

Szemléletes kvantumelmélet

Környezeti áramlások fizikája

Fizika a biológiában

Először a 2016/2017 tanév I. félévében

D modul

Fizika tanítása IV. (Modern fizika: statisztikus fizika, relativitáselmélet, anyagtudomány)

Kaotikus mechanika

A csillagászat és az űrkutatás aktuális eredményei

A mikrorészecskék fizikája

Először a 2014/2015 tanév II. félévében

KÖNYVESPOLC

Benkő József, Mizser Attila (szerk.):

METEOR CSILLAGÁSZATI ÉVKÖNYV 2015

Magyar Csillagászati Egyesület, Budapest, 2014, 363 oldal

A magyar természettudományos ismeretterjesztés minden évben jól rajtol a *Meteor csillagászati évkönyv*vel. Idén ez talán még az átlagosnál is jobbat jelent, pedig rendszeresen magas színvonalon megjelenő kiadványról van szó. Az átlag-felettség oka, hogy ebben a kiadványban mind a hat cikk fontos és érdekes. Ez összesen százoldalmi közleményt jelent – ritkán sikerül ennyi színvonalas anyagot együtt látni.

Bemutatásukhoz megtarthatjuk a megjelenés sorrendjét:

Kiss László a változócsillagok újdonságairól írt. 2009 után „idén ismét kísérletet teszünk a változócsillagászat friss felfedezéseiről, legújabb irányairól beszámolni – természetesen a teljességre való bármiféle törekvés nélkül” (227. oldal). Új változócsillagok tízezreinek felfedezéséről, adatainak elemzéséről, lengyel, brit és kínai programok eredményeiről számol be, adja meg hozzáférhetőségüket. Sor kerül a változócsillagok és a Tejútrendszer szerkezetének kapcsolatára, a csillagaktivitás és a kormeghatározás összefüggésének vizsgálatára. A szerző bemutatja azokat a kitérőket, amelyek nem magyarázhatók termonukleáris reakcióval, „hanem az összeolvadó kettőscsillagban a helyzeti energia konvertálódik át a kitérés energiájává” (237. oldal).

Az üstökösök megismerésének méréseiről Tóth Imre cikkéből ismerhetjük meg. A kőbe vésett sziklarajzok bizonytalan ábrázolásaitól a babilóniai ékirásos agyagtáblák, az egyiptomi papiruszok, az ókori kínai feljegyzések több ezer éves üstökös észleléseiig tart az előtörténet. Az ókori görög–római korban arról vitatkoztak, hogy a Föld meleg, száraz kigőzölgései az üstökösök, vagy a bolygókhoz hasonlóan tüzes kövekből állnak. Tycho Brahe pontos mérései, majd távcsöves megfigyelések alapján az üstökösök is a tömegvonzás newtoni törvényének engedelmeskedő égitesteknek bizonyultak. A 19. század fénypolarizációs és spektroszkópiai mérései sokat megmutattak az

üstökösök összetételéről. Ebben a században kezdődött és a következőben erőteljesebbé vált a magyar részvétel az üstökös kutatásban (Konkoly Thege Miklós, Gothard Jenő, Kulin György). A VEGA programban is markáns volt a magyar részvétel. Az üstökös-magok belső szerkezetét leíró modellek bemutatását ígéret fejezi be, hogy a legújabb eredményeket majd *a jövő évi évkönyvben megjelenő második részből* ismerhetjük meg (264. oldal).

Petrovay Kristóf Az éghajlatváltozás és a Nap című írásában a minduntalan felmerülő kérdésekre ad választ:

- az utóbbi évtizedek klímaváltozásában az emberi tevékenység okozta üvegházhatásé a főszerep;

- néhány éves időskálán a légkör-óceán rendszer belső folyamatai vannak legnagyobb hatással az éghajlatra;

- néhány évtizedes időskálán az éghajlatváltozás természetes okai közül a naptevékenység változása a legjelentősebb;

- a lineáris modelleken alapuló előrejelzések a globális melegedés folytatódását mutatják;

- a közép-európai térségben a globális átlagnál erősebb melegedés várható;

- „hosszabb távon (?) »számíthatunk a kiszámíthatatlanra«: a globális hőmérséklet és az azt meghatározó folyamatok közötti nemlineáris visszacsatolások hatására (például a sarki jégtakarók eltűnése)” (278. oldal).

Kovács József a száz éves általános relativitáselméletéről szóló írásában az 1907-ben megfogalmazott gondolat kíséretben jelöli meg a gyökeret, amely szerint lokálisan a gravitációs tér hatása nem különböztethető meg a gyorsulás által kiváltott hatástól. Izgalmas a napfogyatkozás-expedíció, az általános relativitáselmélet első tesztelésének leírása, amikor a megfigyelés felhőszakadással kezdődött, majd egyetlen használható előhívott lemezen keresztül a *The New York Times* címlapján tetőzött *Minden fénysugár elhajlik az égen* címmel. Az Einstein-egyenletek kozmológiai megoldásaitól nem rövid és egyenes, de használható eredményekben igen gazdag út vezetett az Univerzum gyorsuló tágulásának felismeréséig.

Szabados László a jó „öreg” Hubble űrtávcső eredményeit és sikerének titkát elemzi. Megállapítja, hogy „a Hubble Space Telescope (HST) az ezredforduló csillagászatának szimbóluma és a csillagászati ismeretterjesztés talán leghatékonyabb »segédeszköze« – immár negyed százada” (296. oldal). Pedig a történet kudarcosan indult, és a pályára állt HST csak helyszíni korrekciója után kezdte ontani a látványos felvételeket. Látványosakat, hiszen a képek zavaró légkör hi-

ján és a látható fény hullámhossztartományának határait mind az infravörös, mind az ultraibolya felé jóval meghaladva, kiváló térbeli felbontással készültek. És készülnek mindmáig, nem kis részben asztronauták további négy látogatásának köszönhetően, „hogy egyre érzékenyebb új detektorokat szereljenek be valamelyik korábbi segédeszköz helyére (és megjavítsák vagy kicseréljék az elromlott berendezéseket). Így a HST által szolgáltatott képek minősége, részletgazdagsága már jóval felülmúlja a kezdeti várakozásokat” (296. oldal). Az ismeretterjesztés mellett (vagy előtt) jelentős a kutatásban betöltött szerepe: „A HST mérései alapján készített szakcikkek száma 2011-re már meghaladta a tízezret, és e tanulmányokra közel fél-

millió hivatkozás található a csillagászati szakirodalomban” (297. oldal). A nagyon távoli és halvány objektumok terén elért eredményei mellett a Naprendszeren belül is akadtak feladatok a HST számára – például a Plútó és Charon nevű holdja alkotta kettős rendszer vizsgálata. A változócsillagok, a planetáris ködök, a Tejútrendszer centrumához közeli fiatal csillaghalmazok megismerésében is jelentős szerepe van a Hubble-űrtávcsőnek. A cikk végén a szerző felsorolja a HST-vel kapcsolatos legfontosabb történeteket. Hosszú a táblázat, aminek alapján további fontos felfedezések remélhetők.

A fényszennyezésről a *Fény Nemzetközi Évében* című írásában *Kolláth Zoltánnak* sikerült jól elképzelhetővé és kvantitatívva tenni a fényszennyezés fogalmát. Aból a 2005-ből származó adatból,

hogy egy európai polgárra mekkora fényenergia-felhasználás jut, kiszámítja ennek árát, majd azt is, hogy ezen ár ezerszeresébe kerülne, ha gyertyázt próbálnánk előállítani, azaz évi 35 millió forintba. Egy grafikon mutatja, hogy Angliában az elmúlt 200 évben az évente mesterségesen létrehozott fény mennyisége öt nagyságrenddel növekedett. A bevezetést egy szemléletes összefoglaló követi szemünk nappali és éjszakai látásának összehasonlításáról. Ennek egyik eredménye, hogy „a fényszennyezés jövőbeni alakulása szempontjából nagyon fontos különbség az éjszakai és a nappali látás között a spektrális érzékenységek eltérése... Éjszakai látásunk kicsivel rövidebb hullámhosszakon – a kék felé eltolódva éri el maximális érzékenységet a nappali látáshoz képest” (319. oldal). A fényszennyezés szempontjából „az egyedüli, teljes információt jelentő módszer a teljes égbolt leképező fénysűrűségének mérése”. A befejező oldalakon e mérés megvalósításáról van szó, a közvilágítás fehér fényű LED-re váltása közeljövőben várható bevezetésének veszélyeire összpontosítva a figyelmet.



A cikkeket a több mint 200 oldalas *Kalendárium* előzi meg. A kalendárium hónapról hónapra egy táblázattal kezdődik, amely minden napra tartalmazza a Nap és a Hold legfontosabb adatait, valamint a Ladó-Bíró-féle *Magyar utónévkönyv* alapján a névnapokat. Az eseménynaptár percnyi pontossággal közli a Nappal, Holddal és a bolygókkal történő eseményeket (például a Hold maximális librációjának időpontját, vagy, hogy mikor van a Merkúr alsó együttállásban a Nappal). A bolygók és az üstökösök történéseivel minden hónapnál külön fejezet foglalkozik. Ugyancsak havonta találunk táblázatot a Hold csillagfedéseiről, és grafikonokat, néha táblázatokat a Jupiter-holdak és a Szaturnusz-holdak helyzetének alakulásáról. Külön beszámolók foglalkoznak a napfogyatkozásokkal és holdfogyatkozásokkal akkor is, ha hazánk területéről nem láthatóak. Ezenkívül számos

rövid, átlagosan féloldalsnyi írás szól nevezetes csillagászati helyekről, együttállásokról. A csillagásztörténet nevezetes évfordulóit hónapról hónapra kapnak helyet. Itt olvashatunk a 100 éve született Fred Hoyle munkásságáról, ami jóval több, mint a Big Bang (Nagy Bumm) elnevezés kitalálása. Találkozunk az ugyancsak 100 éve született Zerinváry Szilárd nevével, aki rövid élete alatt jelentős csillagászati ismeretterjesztést végzett. De nem feledkezett el az évkönyv arról sem, hogy Fresnel 200 éve kezdte optikai kísérleteit, hogy 150 éve jelentek meg a Maxwell-egyenletek, a kozmikus háttérsugárzás felfedezése pedig ötven éve történt.

Az évkönyv utolsó oldalain fontos hazai csillagászati intézmények beszámolóit olvashatók, zárásként pedig a búcsú *Ponori Thewrewk Auréltól*.

Füstöss László

HÍREK – ESEMÉNYEK

AZ CÉLTUDATOSSÁG JUTALMA

Bársony István

MTA Műszaki Fizikai és Anyagtudományi Intézet

A fizikai Nobel-díjat 2014-ben három japán születésű kutató, *Isamu Akasaki* (83) és *Hiroshi Amano* (54) a Meijo University és a Nagoya University, Japán, valamint *Shunji Nakamura* (60) a University of California, Santa Barbara, CA, USA professzora kapta a „hatékony kék fényt kibocsátó diódák felfedezéséért, ami lehetővé tette az energiatakarékos és környezetbarát

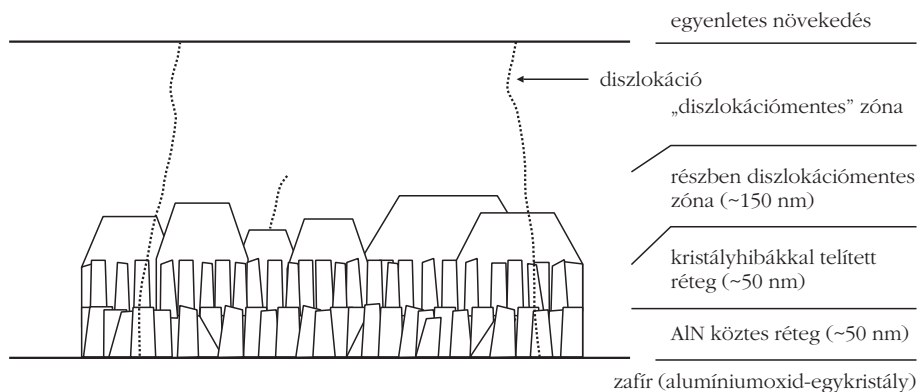
fényforrás” kifejlesztését (1. ábra). A Svéd Királyi Tudományos Akadémia hangsúlyozta, hogy a teljesen új elven működő fehérfényforrás ugyan még csak 20 éves, de előnyeit máris élvezzük [1].

Már a 20. század elején amerikai kutatók kimutatták, hogy a félvezető kristályok fénykibocsátásra képesek. Az elektrolumineszcencia kedvelt kutatási téma

1. ábra. Isamu Akasaki (balra), Hiroshi Amano (középen) és Shunji Nakamura 2014. december 10-én, Stockholmban a Nobel-díj átadó ceremónia után (forrás: KYODO).



lett az akkori Szovjetunióban is, viszont csak a tranzistor 1947-es felfedezését követően (*Shockley, Bardeen, Brattain* – Nobel-díj 1956) vált világossá, hogy a p-n átmenetet szilárdtest fényemittáló szerkezetként lehet használni. Fényemissziót az ötvenes évek közepén Ge és Si p-n átmenetekből is kimutattak, de értékelhető hatásokkal csak az úgynevezett direkt-sávú félvezetőkben várható fénykibocsátás. Ezekben ugyanis egy lépéses, a vezetési-sávból a vegyérték-sávba való elektronátmenettel, fononok nélkül valósul meg az injektált elektronok sugárzásos rekombinációja. A fotonemisszió hullámhossza a tilossáv-szélesség által meghatározott energiából következik. Az első kísérletek vegyület-félvezető SiC, majd



2. ábra. A diszlokációmentes GaN epitaxiás növesztés első gyakorlati megoldása [3].

majd később Amanóval közösen a Nagoyai Egyetemen évekig tartó optimalizációs kísérletsorozat eredményeként sikerült MOVPE – fémorganikus gőzfázisú epitaxiával, a rácsillesztetlenség minimalizálásával Al_2O_3 szubsztráton optikai minőségű GaN réteget előállítani (2. ábra). Ehhez 500 °C-on 30 nm-es polikristályos AlN réteget nukleáltattak a zafír egykristályra, amiből a GaN növesztési hőmérsékletére (1000 °C) történő

III–V kristályokkal folytak, csak hogy a kísérlet mindig kisebb energiát mutatott, mint a tilos sáv energiájából következett volna. A viszonylag hibamentes GaAs egykristályon sikerült először az 1,4 eV tilos-sávnak megfelelő infravörös sugárzást kimutatni 1961-ben, majd pár hónappal később több laboratóriumban (GE, IBM, MIT, Lincoln Lab.) 77 K hőmérsékleten lézereffektust is igazoltak. A szobahőmérsékleti működést csak a heteroátmenetes, a kvantumbezártságot hasznosító lézerdiodák 1967-es felfedezése (Alferov és Kroemer – Nobel-díj 2000) tette lehetővé.

Nick Holonyak Jr., a GE kutatója tudott először látható vörös LED fénykibocsátást igazolni és 710 nm-en sugárzó lézert építeni kevert $\text{GaP}_x\text{As}_{1-x}$ kristályokkal [2]. Holonyak szülei Magyarországról kivándorolt ruszinok voltak, ő maga is tud magyarul. Az idei Nobel-díj odaítélése kapcsán sérelmezte, hogy a látható fénykibocsátás úttörőjeként nem szerepel a díjazottak közt.

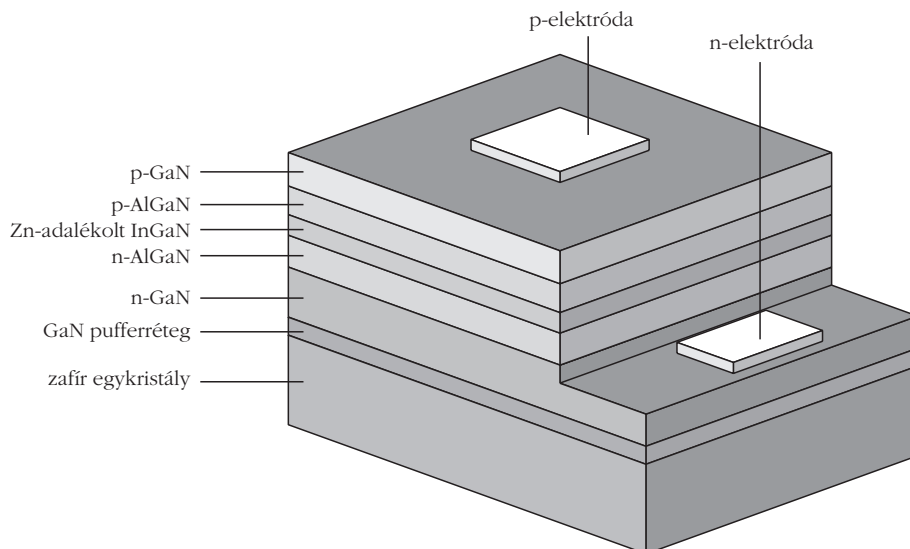
Már az ötvenes években komolyan felvetették a Philipsnél (Grimmeis) a világítástechnikai alkalmazás lehetőségét GaN szerkezetekkel. Kék fénnel gerjesztett fotolumineszcenciával ugyanis valamennyi hosszabb hullámhossz generálható a látható spektrumban, ahogy a fénycsövek falát borító fényporokból kevert „fehér fény” keletkezik. De a sugárzásos rekombinációt támogató, hibamentes GaN egykristály előállítása és hatékony p-adalékolása megfelelő akceptorral még sokáig váratott magára. Miközben világszerte sokan feladták a reményt a mechanikailag feszültségmentes GaN előállítására, Akasaki figyelmét felkeltették a 70-es években megjelent új kristálynövesztési technikák (MBE – molekulásugaras epitaxia és MOCVD – fémorganikus kémiai gőzfázisú lecsapódás), amelyek a rácsillesztett epitaxiás növesztés (SiC-on, vagy Al_2O_3 -on) lehetőségével kecsegtetettek. Akasakinak a Matsushita kutatóintézetében,

felfűtés alatt kristályos szigetek képződtek a GaN epitaxiás növesztésének megfelelő preferált orientációval. A diszlokációsűrűség a növekvő GaN kristályban a kezdeti magas értékről néhány nm-en belül drasztikusan csökkent.

A módszer 1986-ban eredményezett a LED heteroszerkezet növesztéséhez egykristályos GaN szubsztrátot [3]. Ezidőtájt Nakamura, a fényporgyártó Nichia vegyipari cég kutatásvezetője az AlN-et alacsony hőmérsékletű GaN-del helyettesítette, így alacsonyabb n-típusú háttérkoncentrációval készített alapréteget [4].

A GaN elektronmikroszkópos vizsgálata során figyelték meg, hogy mind a Zn-adalékolt n, mind a Mg-mal adalékolt p-GaN szennyezésének határfoka, azaz koncentrációja megnőtt. Erre pár év múlva Nakamura adott magyarázatot. A Zn és Mg hidrogénatomokkal komplexeket alkot, így a beépülés után nem viselkedik aktív szennyezőként. Az elektronbesugárzás viszont szétbontja a komplexeket és megemeli az adalékkoncentrációt. Így a 90-es évek elején mind Akasaki, mind Nakamura csoportjában már AlGaIn, InGaIn LED heteroszerkezeteket (3. ábra) fejlesztettek [5], ahol minimális veszteséggel történik meg a kvantumgödrökbe zárt (kvantumfogás) injektált elektronok rekombinációja. Nakamura a kettős heteroátmenetes

3. ábra. A GaN/AlGaIn/InGaIn kék LED heteroszerkezet [5].



szerkezetével 1994-ben már 2,7%-os kvantumhatásfokot ért el [5], majd mindkét csoportban kéklézer-emissziót is kimutattak.

Meg kell említenünk néhány hazai vonatkozást is. Az MTA Műszaki Fizikai Kutatóintézetében *Szigeti György* igazgató kezdeményezésére *Lendvay Ödön* vezetésével a vegyület-félvezető kutatás számos sikert ért el. Legjelentősebb, máig ható eredménye talán a parazitaveszteséges rekombináció visszaszorítását célzó mérési eljárás, a *mélynívó-spektroszkópia* kidolgozása volt *Ferenczi György* vezetésével. Ipari elterjesztése az intézet korai spin-off vállalkozásának, a mára multinacionális céggé nőtt Semilab Rt. érdeme. Az intézet kutatói nemzetközi együttműködések révén már korán bekapcsolódtak a LED-lézerdióda fejlesztésekbe. Pár éve így jelenhetett meg a jogutód MTA Műszaki Fizikai és Anyagtudományi Intézet fiatal munkatársának közös elektronmikroszkópos cikke a két Nobel-díjassal is – igaz, Linköpingből [6].

A látható fénykibocsátás fejlődése a vörös-zöld-kék-fehér sorrendben egy sor GaN alapú kutatási áttörés, felismerés és technológiai apró-munka eredménye, amiben *döntő tényező volt a japán kutatók kitartása, céltudatossága*. Az alkalmazások nyitotta távlatok ma még beláthatatlanok. A fehér fényt kibocsátó LED-ek a becsült 100 000 órás élettartam mellett ma 300 lm/W teljesítménnyel az Edison-féle izzólámpák körülbelül 16 lm/W-jával szemben csaknem 50%-os *hatásfokú elektromos-fény energiakonverziót* valósítanak meg. Mivel a globálisan felhasznált villamos energia csaknem 20%-át fordítjuk világításra, ez gigantikus

megtakarítást jelent a fenntartható fejlődés érdekében. Már bizonyos, hogy a vákuumtechnikai fényforrásokat rövid időn belül felváltják a LED alapú világítótestek, hiszen a kijelzők, TV képernyők, mobil eszközök már ma is általánosan LED-eket használnak. Az elektronikusan vezérelhető világítástechnikai eszközök egyben hamarosan a szélessávú adatátvitel és kommunikáció eszközeiként is hasznosulnak (Li-Fi), az ultraibolya-tartományban sugárzó LED-ek antibakteriális, fertőtlenítő hatása is számos új alkalmazást nyit majd meg.

Alfred Nobel végrendelete szerint a díj azok elismerését kell, hogy szolgálja, akik tudományterületükön az emberiség számára legnagyobb hasznot hajtó teljesítményt érték el. Ahogy a Nobel-bizottság elnöke megállapította: az idei díj valóban az alapító szándéka szerinti kitüntetés!

Irodalom

1. Scientific Background on the Nobel Prize in Physics 2014, http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2014/advanced-physicsprize2014.pdf
2. N. Holonyak, S. F. Bevacqua, *Appl. Phys. Lett.* 1 (1962). 82
3. H. Amano, N. Sawaki, I. Akasaki, Y. Toyoda, *Appl. Phys. Lett.* 48 (1986) 353.
4. S. Nakamura, M. Senoh, T. Mukai, *Jpn. J. Appl. Phys.* 30 (1991) L1998.
5. S. Nakamura, T. Mukai, M. Senoh, *Appl. Phys. Lett.* 64 (1994) 1687.
6. E. Valcheva, T. Paskova, G. Z. Radnoczi, L. Hultman, B. Mone-mar, H. Amano, I. Akasaki: Growth-induced defects in AlN/GaN superlattices with different periods. *Physica B* 340–342 (2003) 1129–1132.

PÁKÓ GYULA, 1955–2014

2014. október 9-én, életének 60. évében tragikus hirtelenséggel elhunyt iskolánk, az ELTE Apáczai Csere János Gyakorlógimnázium és Kollégium fizika vezetőtanára, *Pákó Gyula*. Földi maradványaitól október 22-én búcsúzott el családja, barátai, kollégái és diákjai az Óbudai temetőben.

Tartalmas, sikeres, boldog életet hagyott maga mögött.

1979-ben szerezte meg kémia-fizika szakos középiskolai tanári oklevelét az ELTE Természettudományi Karán. A fizika tantárgy tanításának módszertanába a legendás *Vermes Miklós* vezette be. Diplomájának megszerzése után a budapesti Közlekedésgépészeti Szakközépiskolában kapott állást, majd 1981-ben a budapesti Petőfi Sándor Gimnáziumban a fizika munkaközösség vezetőjévé választották. 1991-ben került iskolánkba, ahol vezetőtanári státuszt kapott. 1998-tól három éven át az iskola igazgatóhelyettese, majd egy éven keresztül megbízott igazgatója volt, egy igen

nehéz helyzetben vállalva a megbízást. Odaadóan, szerényen és becsülettel végezte munkáját igazgatóként, tanárként és osztályfőnökként is.

Tanári munkájának egyik jellemzője volt az állandó önképzés. 1981 óta volt tagja az Eötvös Loránd Fizikai Társulatnak, 2003-tól az ELFT Középiskolai Oktatási Szakcsoportja vezetőségének. A Társulat 1998-ban Mikola-díjjal ismerte el munkásságát. 1988-ban Kiváló Munkáért kitüntetésben részesült. 2006-ban megkapta az „ERICSSON a matematika és fizika tehetségeinek gondozásáért” díját fizikából. Évről évre részt vett az Eötvös Társulat Fizikatanári Ankétján. Rendszeres látogatója volt a CERN-nek, több ízben szervezett kirándulást iskolánk diákjainak a CERN-be, utoljára 2013 nyarán.

Tanári pályáján kiemelkedő fontosságúnak tartotta a tehetségek felismerését, általában a tehetséggondozást. Szakköröket szervezett és vezetett, tanórán kívül is sokat foglalkozott tanítványaival. Az eredmények sorából kiemelhetők a Mikola Sándor Fizikaversenyen elért első, harmadik és ötödik helyezés, a KöMaL pontversenyén kiérdemelt dicséret, az Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenyén kivívott III. díj.

Az összegyűjtött információkért köszönet Radnóti Katalin tanárnőnek és a komal.hu oldalnak.

A negyedik emeleti fizikatanári felejtethetlen színfoltja volt. Az asztalán tucatjával heverték a saját maga és a tanárjelöltjei által összeállított kísérleti eszközök. Bármikor felmerült egy lehetséges tanórai demonstráció ötlete, neki mindig volt egy fiókja, szekrénye, doboza, amiből előkerült egy használható alkatrész vagy akár egy komplett kísérlet. A saját maga által vásárolt eszközöket is örömmel bocsátotta az iskola és a kollégák rendelkezésére. És kifogyhatatlan volt a régmúlt történeteiből is Muki bácsiról (Vermes Miklós), *Marx* professzor úrról, a Petőfi Gimnáziumban eltöltött évekről, jelöltjeiről és diákjairól.

De önmagát soha nem tolta előtérbe. A szó legjobb értelmében volt „régivágású” tanár. Hatalmas tapasztalatot őrzött, következetes volt, tanítási stílusának minden apró részletét meg tudta indokolni, ugyanakkor jelöltjeit soha nem akarta saját képére formálni. Türelmesen, szeretettel terelve hagyta őket kibontakozni. Az óravázlat minden pontját, az órán elhangzott minden mondatot és minden mozzanatot kellő részletességgel, de sosem terjengősen beszélt meg. A jelöltek ötleteit, elképzeléseit nem csak megvalósulni hagyta, de mindig segített is a megvalósításukban, akkor is, ha éppen nem értett egyet az elképzeléssel. Az egyik, Gyulára különösen jellemző eset talán akkor történt, amikor egy jelölt-



jének felvettem egy kísérleti eszköz ötletét, amit órán be lehetne mutatni. A jelölt nekiállt elkészíteni az eszközt, Gyula pedig kinyitotta azt a szekrényét, amiben az eszközhoz használható, saját kezűleg kipreparált mosógépmotor feküdt, és jó két héten keresztül segített az összeállításban. A kísérlet végül nem működött. Az eszköz igen, de órai kísérletként nem volt elég meggyőző és nem is volt elég izgalmas – éppen úgy, ahogy azt Gyula már az eszköz-összeállítás legelején megjósolta.

Az egyik legkiegyensúlyozottabb ember volt, akit ismertem. Soha nem láttam idegesnek, a problémákat felismerte, de mindig jókedvűen, mosolyogva fogott megoldásukhoz. A tanításhoz nem kötődő hobbikban is elmerült: rendszeresen járt kirándulni, gombászni és kaktuszokat gondozni. Mindez a jókedv és boldogság személyes kisugárzásában is érződött, a hátul összekulcsolt kézzel sétálásában, az örökös mosolygásban, a türelmes hanghordozásában.

Hiányozni fognak történetei, segítségnyújtása, a jelöltekkel való foglalkozása, az íróasztalán felstócolt könyvhalom, az okos, vidám beszélgetések a szünetekben. De legfőképpen ő fog hiányozni. Szeretteivel: családjával, barátaival, kollégáival és diákjaival együtt szomorú szívvel búcsúzunk tőle.

Basa István

EMLÉKEZÉS FÜLÖP VIKTORNÉRA

*Fülöp Viktorné Rózsi*ka megígérte, az őszi elnökségi ülésünkre eljön, hogy közösen készítsük elő a jubileumi, a 25. Öveges-versenyt. Kettőnk kapcsolatában ez az első be nem váltott ígérete. 2014. augusztusban örökre elment.

Ki volt Ő? Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat Általános Iskolai Oktatási Szakcsoportjának aktív tagja, az ankétok résztvevője, szervezője, több mint egy évtizede az Öveges József Kárpát-medencei Fizikaverseny országos döntőjének győri főszervezője. Ő gondoskodott a helyi programokról, a versenyzők vendéglátásáról. Az általa szervezett kulturális estek élményt jelentettek a nyolcadikos, fizika iránt érdeklődő diákok számára is.

A pécsi Tanárképző Főiskolán szerzett matematika-fizika szakos tanári diplomájával négy évig a Lébényi Általános Iskola és Gimnáziumban, majd nyugdíjba vonulásáig szülőfalujában, a Mosonszentmiklósi Általános Iskolában dolgozott. Aktivitására jellemző, hogy ezt követően is ellátta a GyMS Megyei Pedagógiai Intézetnél a szaktanácsadói feladatokat. Előadásokat szer-

vezett, publikált, segítette a megye fizikaszakos kollégáit. Sokoldalúsága szemléltetéséül álljon itt néhány az utóbbi időszak feladataiból: zsűrielnök a Horváth Pál Fizikatörténeti Versenyen, kiállítás megnyitója a „Játékos tudomány” utazó kiállítás győri állomáshelyén, főszervezője a Simonyi Károly megyei fizikaversenynek, zsűritag a péri Öveges napok keretében megrendezett Ifjú Fizikusok/Fifikusok találkozóján, szakértőként készített óvodai szervezeti és működési szabályzatot, Mosonszentmiklós önkormányzati képviselője, lelkes tagja a Rábca dalkörnek, előadást tartott gróf Zichy Ferenc győri püspök életéről, ... És még mennyi minden követte volna! Számtalan terve volt.

Az újabb Öveges versenysorozat szervezése kapcsán egyre többször hangzik el a mondat: „Ez a Rózsi-ka feladata.” – volt.

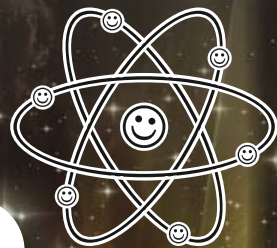
Nehéz lesz pótolni a munkád, de megoldjuk, ennyivel tartozunk neked! Nyugodj békében!

Az ELFT Általános Iskolai Oktatási Szakcsoportja nevében

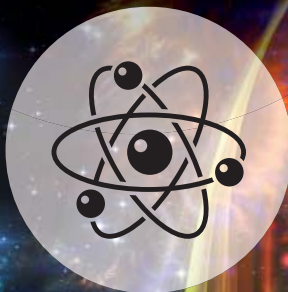
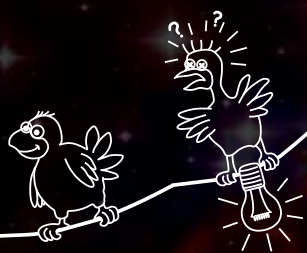
Lévainé Kovács Róza



Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat szervezésében



2015. ÁPRILIS 18. A FIZIKA MINDENKIÉ



2015. a Fény Nemzetközi Éve, rendezvényünk fókuszában a FÉNY áll!
Tanároddal, barátaiddal, szüleiddelel vegyél részt az országos fizika-napon!
Végezz kísérletet, hallgass előadást, fotózz szivárványt – szabad a fizika, hiszen nap mint nap
használjuk ezt a tudományt! MERT A FIZIKA MINDENKIÉ!
Mutasd meg Nekünk, hogy mi is meg tudjunk mutatni Téged! A legkreatívabb ötleteket díjazzuk.

Információért látogass el a weboldalunkra:

WWW.AFIZIKAMINDENKIE.KFKI.HU



Támogatók:



Gyere el a múzeumba!

**A kiállítás
korhatár nélkül,
fényképes
igazolvánnyal
ingyenesen
látogatható.**

Nyitva tartás:
hétfő-péntek: 8.00-15.00
szombat: 9.00-13.00
vasárnap: ZÁRVA

Érdeklődni lehet: 75/50-74-32

www.atomeromu.hu

www.facebook.com/paksiatomeromu



Atomenergetikai Múzeum

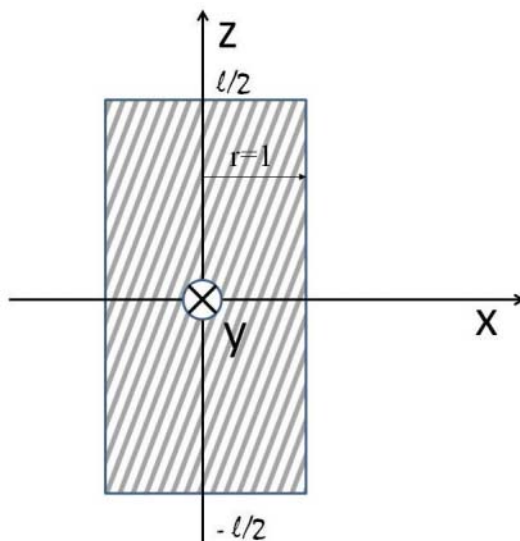


**paksi
atomerőmű**

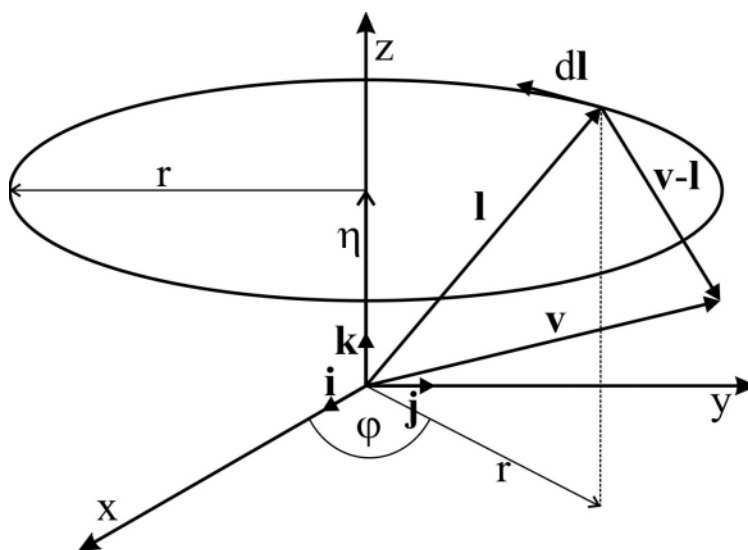


Hárs György, Varga Gábor – BME Fizikai Intézet
A mágneses vektorpotenciál, mint valóságosan létező vektormező
 – melléklet –

A szolenoid mágneses vektorpotenciál (**A**) terének és mágneses indukció (**B**) terének számítása:



A szolenoid metszete. Forgástengelye a z tengely, míg x és y a forgástengelyre merőleges síkot képez.



A vektorpotenciál teret a körvezetők terének integrálásával kapjuk.

$$\mathbf{A}^*(\mathbf{v}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I^* d\mathbf{l}}{|\mathbf{v} - \mathbf{l}|}$$

$$\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{l} = \mathbf{i}r \cos \varphi + \mathbf{j}r \sin \varphi + \mathbf{k}\eta$$

$$\frac{d\mathbf{l}}{d\varphi} = \mathbf{i}(-r \sin \varphi) + \mathbf{j}r \cos \varphi$$

$$d\mathbf{l} = [\mathbf{i}(-r \sin \varphi) + \mathbf{j}r \cos \varphi]d\varphi$$

$$\mathbf{v} - \mathbf{l} = (x - r \cos \varphi)\mathbf{i} + (y - r \sin \varphi)\mathbf{j} + (z - \eta)\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{v} - \mathbf{l}|^2 = D = (x - r \cos \varphi)^2 + (y - r \sin \varphi)^2 + (z - \eta)^2 = x^2 + y^2 + (z - \eta)^2 + r^2 - 2r(x \cos \varphi + y \sin \varphi)$$

$$D = x^2 + y^2 + (z - \eta)^2 + r^2 - 2r(x \cos \varphi + y \sin \varphi)$$

$$\mathbf{A}^*(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I^* d\mathbf{l}}{\sqrt{D}}$$

$$\mathbf{A}^*(x, y, z) = \frac{\mu_0 I^*}{4\pi} \left(\mathbf{i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-r \sin \varphi}{\sqrt{D}} d\varphi + \mathbf{j} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{D}} d\varphi \right)$$

$$I^* = \frac{NI}{l} d\eta$$

$$d\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{NI}{l} d\eta \left(\mathbf{i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-r \sin \varphi}{\sqrt{D}} d\varphi + \mathbf{j} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{D}} d\varphi \right)$$

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{NI}{l} r \left[\mathbf{i} \int_{-l/2}^{l/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\sin \varphi}{\sqrt{D}} d\varphi \right) d\eta + \mathbf{j} \int_{-l/2}^{l/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}} d\varphi \right) d\eta \right]$$

$$A_{\max} = \mu_0 \frac{NI}{l} \frac{r}{2}$$

$$\frac{\mathbf{A}(x, y, z)}{A_{\max}} = \frac{1}{2\pi} \left[\mathbf{i} \int_{-l/2}^{l/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\sin \varphi}{\sqrt{D}} d\varphi \right) d\eta + \mathbf{j} \int_{-l/2}^{l/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}} d\varphi \right) d\eta \right]$$

Komponensek szerint:

$$\frac{A_x(x, y, z)}{A_{\max}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\sin \varphi}{\sqrt{D}} d\varphi \right) d\eta$$

$$\frac{A_y(x, y, z)}{A_{\max}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}} d\varphi \right) d\eta$$

Forgásszimmetria miatt x, z sík metszetet vizsgálunk. Itt $y = 0$

$$D = x^2 + (z - \eta)^2 + r^2 - 2rx \cos \varphi \quad \text{páros fv}$$

$$\frac{A_x(x, z)}{A_{\max}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\sin \varphi}{\sqrt{D}} d\varphi \right) d\eta \quad \text{Az integrandus páratlan fv} \quad A_x(x, z) = 0$$

$$\frac{A_y(x, z)}{A_{\max}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}} d\varphi \right) d\eta \quad \text{Az integrandus páros fv tehát} \quad A_y(x, z) \neq 0.$$

Általánosságban tehát:

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{A_{\max}}{2\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \left(\mathbf{i} \frac{-\sin \varphi}{\sqrt{D}} + \mathbf{j} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}} \right) d\varphi \right] d\eta$$

A mágneses indukció vektorát a mágneses vektorpotenciál rotációjaként kapjuk:

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \frac{A_{\max}}{2\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \text{rot} \left(\mathbf{i} \frac{-\sin \varphi}{\sqrt{D}} + \mathbf{j} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}} \right) d\varphi \right] d\eta$$

Vizsgáljuk az integrandus vektort!

$$\begin{aligned} \text{rot} \left(\mathbf{i} \frac{-\sin \varphi}{\sqrt{D}} + \mathbf{j} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}} \right) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\sin \varphi}{\sqrt{D}} & \frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}} & 0 \end{vmatrix} = \\ &= -\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}} \right) - \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\sin \varphi}{\sqrt{D}} \right) + \mathbf{k} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\sin \varphi}{\sqrt{D}} \right) \right] \end{aligned}$$

Az $\mathbf{i}$ komponens:

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}} \right) = -\cos \varphi \frac{\partial}{\partial z} \left(D^{-1/2} \right) = -\cos \varphi \left(-\frac{1}{2} \right) D^{-3/2} \frac{\partial D}{\partial z} = \cos \varphi \left(\frac{1}{2} \right) D^{-3/2} 2(z - \eta) = \frac{(z - \eta) \cos \varphi}{D^{3/2}}$$

Felhasználtuk, hogy: $\frac{\partial D}{\partial z} = 2(z - \eta).$

A **j** komponens:

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\sin \varphi}{\sqrt{D}}\right) = -\sin \varphi \frac{\partial}{\partial z}\left(D^{-1/2}\right) = -\sin \varphi \left(-\frac{1}{2}\right) D^{-3/2} \frac{\partial D}{\partial z} = \sin \varphi \left(\frac{1}{2}\right) D^{-3/2} 2(z-\eta) = \frac{(z-\eta)\sin \varphi}{D^{3/2}}$$

Felhasználtuk, hogy: $\frac{\partial D}{\partial z} = 2(z-\eta)$

A **k** komponens első tagja:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}}\right) = \cos \varphi \left(-\frac{1}{2}\right) D^{-3/2} \frac{\partial D}{\partial x} = -\frac{1}{2} \cos \varphi D^{-3/2} 2(x-r\cos \varphi) = -\frac{(x-r\cos \varphi)\cos \varphi}{D^{3/2}}$$

Felhasználtuk, hogy $\frac{\partial D}{\partial x} = 2(x-r\cos \varphi)$

A **k** komponens második tagja:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sin \varphi}{\sqrt{D}}\right) = \sin \varphi \left(-\frac{1}{2}\right) D^{-3/2} \frac{\partial D}{\partial y} = -\frac{1}{2} \sin \varphi D^{-3/2} 2(y-r\sin \varphi) = -\frac{(y-r\sin \varphi)\sin \varphi}{D^{3/2}}$$

Felhasználtuk, hogy $\frac{\partial D}{\partial y} = 2(y-r\sin \varphi)$

A **k** komponens két tagja összevonva:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sin \varphi}{\sqrt{D}}\right) = \frac{1}{D^{3/2}}(-x\cos \varphi + r\cos^2 \varphi - y\sin \varphi + r\sin^2 \varphi) = \frac{r-x\cos \varphi - y\sin \varphi}{D^{3/2}}$$

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \frac{A_{\max}}{2\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \left(\mathbf{i} \frac{(z-\eta)\cos \varphi}{D^{3/2}} + \mathbf{j} \frac{(z-\eta)\sin \varphi}{D^{3/2}} + \mathbf{k} \frac{r-x\cos \varphi - y\sin \varphi}{D^{3/2}} \right) d\varphi \right] d\eta$$

$$A_{\max} = \mu_0 \frac{NI}{l} \frac{r}{2}$$

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{NI}{l} r \int_{-l/2}^{l/2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \left(\mathbf{i} \frac{(z-\eta)\cos \varphi}{D^{3/2}} + \mathbf{j} \frac{(z-\eta)\sin \varphi}{D^{3/2}} + \mathbf{k} \frac{r-x\cos \varphi - y\sin \varphi}{D^{3/2}} \right) d\varphi \right] d\eta$$

$$B_0 = \mu_0 \frac{NI}{l}$$

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \frac{B_0}{4\pi} r \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \left(\mathbf{i} \frac{(z-\eta)\cos\varphi}{D^{\frac{3}{2}}} + \mathbf{j} \frac{(z-\eta)\sin\varphi}{D^{\frac{3}{2}}} + \mathbf{k} \frac{r-x\cos\varphi-y\sin\varphi}{D^{\frac{3}{2}}} \right) d\varphi \right] d\eta$$

$$\frac{\mathbf{B}(x, y, z)}{B_0} = \frac{r}{4\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \left(\mathbf{i} \frac{(z-\eta)\cos\varphi}{D^{\frac{3}{2}}} + \mathbf{j} \frac{(z-\eta)\sin\varphi}{D^{\frac{3}{2}}} + \mathbf{k} \frac{r-x\cos\varphi-y\sin\varphi}{D^{\frac{3}{2}}} \right) d\varphi \right] d\eta$$

$$\frac{B_x(x, y, z)}{B_0} = \frac{r}{4\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(z-\eta)\cos\varphi}{D^{\frac{3}{2}}} d\varphi \right] d\eta$$

$$\frac{B_y(x, y, z)}{B_0} = \frac{r}{4\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(z-\eta)\sin\varphi}{D^{\frac{3}{2}}} d\varphi \right] d\eta$$

$$\frac{B_z(x, y, z)}{B_0} = \frac{r}{4\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{r-x\cos\varphi-y\sin\varphi}{D^{\frac{3}{2}}} d\varphi \right] d\eta$$

$$D = x^2 + y^2 + (z-\eta)^2 + r^2 - 2r(x\cos\varphi + y\sin\varphi)$$

Forgásszimmetria miatt x, z sík metszetet vizsgálunk. Itt $y = 0$

$$D = x^2 + (z-\eta)^2 + r^2 - 2rx\cos\varphi \quad \text{Ez páros fv } \varphi\text{-ben.}$$

$$\frac{B_x(x, z)}{B_0} = \frac{r}{4\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(z-\eta)\cos\varphi}{D^{\frac{3}{2}}} d\varphi \right] d\eta \quad \text{Az integrandus páros fv } \varphi\text{-ben tehát } B_x(x, z) \neq 0$$

$$\frac{B_y(x, z)}{B_0} = \frac{r}{4\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(z-\eta)\sin\varphi}{D^{\frac{3}{2}}} d\varphi \right] d\eta \quad \text{Az integrandus páratlan fv } \varphi\text{-ben } B_y(x, z) = 0$$

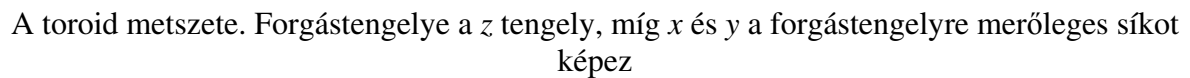
$$\frac{B_z(x, z)}{B_0} = \frac{r}{4\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{r-x\cos\varphi}{D^{\frac{3}{2}}} d\varphi \right] d\eta \quad \text{Az integrandus páros fv } \varphi\text{-ben tehát } B_z(x, z) \neq 0$$

A nem nulla komponenseket az alábbiakban összefoglaljuk azzal a kiegészítéssel, hogy a nullával osztás megelőzése okán bevezetjük a δ huzalvastagságot.

$$\frac{A_y(x, z)}{A_{\max}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\varphi}{\sqrt{D} + \delta} d\varphi \right) d\eta$$

$$\frac{B_z(x, z)}{B_0} = \frac{r}{4\pi} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{r - x \cos \varphi}{(\sqrt{D} + \delta)^3} d\varphi \right] d\eta$$

A toroid mágneses vektorpotenciál (**A**) terének és mágneses indukció (**B**) terének számítása:



$$\mathbf{A}^*(\mathbf{v}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I^* d\mathbf{l}}{|\mathbf{v} - \mathbf{l}|}$$

$$\mathbf{i}' = \mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \sin \alpha$$

$$\mathbf{j}' = \mathbf{i} \cos(90^\circ + \alpha) + \mathbf{j} \sin(90^\circ + \alpha) = \mathbf{i}(-\sin \alpha) + \mathbf{j} \cos \alpha$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}' r \cos \varphi + \mathbf{k} r \sin \varphi = r \cos \varphi (\mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \sin \alpha) + \mathbf{k} r \sin \varphi = \mathbf{i} r \cos \varphi \cos \alpha + \mathbf{j} r \cos \varphi \sin \alpha + \mathbf{k} r \sin \varphi$$

$$\mathbf{l} = R \mathbf{i}' + \mathbf{r} = R \mathbf{i} \cos \alpha + R \mathbf{j} \sin \alpha + \mathbf{i} r \cos \varphi \cos \alpha + \mathbf{j} r \cos \varphi \sin \alpha + \mathbf{k} r \sin \varphi$$

$$\mathbf{l} = \mathbf{i} (R \cos \alpha + r \cos \varphi \cos \alpha) + \mathbf{j} (R \sin \alpha + r \cos \varphi \sin \alpha) + \mathbf{k} r \sin \varphi$$

$$\frac{d\mathbf{l}}{d\varphi} = \mathbf{i} (-r \sin \varphi \cos \alpha) + \mathbf{j} (-r \sin \varphi \sin \alpha) + \mathbf{k} r \cos \varphi$$

$$d\mathbf{l} = [\mathbf{i} (-r \sin \varphi \cos \alpha) + \mathbf{j} (-r \sin \varphi \sin \alpha) + \mathbf{k} r \cos \varphi] d\varphi$$

$$\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} - \mathbf{l} = (x - R \cos \alpha - r \cos \varphi \cos \alpha)\mathbf{i} + (y - R \sin \alpha - r \cos \varphi \sin \alpha)\mathbf{j} + (z - r \sin \varphi)\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{v} - \mathbf{l}|^2 = D = (x - R \cos \alpha - r \cos \varphi \cos \alpha)^2 + (y - R \sin \alpha - r \cos \varphi \sin \alpha)^2 + (z - r \sin \varphi)^2$$

A pitagoraszsi összefüggés többszöri felhasználásával egyszerűbb alakra hozva:

$$D = x^2 + y^2 + z^2 + R^2 + r^2 - 2(Rx \cos \alpha + rx \cos \varphi \cos \alpha + Ry \sin \alpha + ry \cos \varphi \sin \alpha + rz \sin \varphi - Rr \cos \varphi)$$

$$\mathbf{A}^*(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I^* d\mathbf{l}}{\sqrt{D}}$$

$$I^* = \frac{NI}{2\pi} d\alpha$$

$$d\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{NI}{2\pi} d\alpha \left(\mathbf{i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-r \sin \varphi \cos \alpha}{\sqrt{D}} d\varphi + \mathbf{j} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-r \sin \varphi \sin \alpha}{\sqrt{D}} d\varphi + \mathbf{k} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{D}} d\varphi \right)$$

$$A_0 = \mu_0 \frac{NI}{2R\pi} \frac{r}{2}$$

$$\frac{d\mathbf{A}(x, y, z)}{A_0} = \frac{R}{2r\pi} \left(\mathbf{i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-r \sin \varphi \cos \alpha}{\sqrt{D}} d\varphi + \mathbf{j} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-r \sin \varphi \sin \alpha}{\sqrt{D}} d\varphi + \mathbf{k} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{D}} d\varphi \right) d\alpha$$

$$\frac{\mathbf{A}(x, y, z)}{A_0} = \frac{R}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\mathbf{i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\sin \varphi \cos \alpha}{\sqrt{D}} d\varphi + \mathbf{j} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\sin \varphi \sin \alpha}{\sqrt{D}} d\varphi + \mathbf{k} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}} d\varphi \right) d\alpha$$

Komponensek szerint:

$$\frac{A_x(x, y, z)}{A_0} = \frac{R}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\sin \varphi \cos \alpha}{\sqrt{D}} d\varphi \right) d\alpha$$

$$\frac{A_y(x, y, z)}{A_0} = \frac{R}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\sin \varphi \sin \alpha}{\sqrt{D}} d\varphi \right) d\alpha$$

$$\frac{A_z(x, y, z)}{A_0} = \frac{R}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}} d\varphi \right) d\alpha$$

Forgásszimmetria miatt x, z sík metszetet vizsgálunk. Itt $y = 0$

$$D = x^2 + z^2 + R^2 + r^2 - 2(Rx \cos \alpha + rx \cos \varphi \cos \alpha + rz \sin \varphi - Rr \cos \varphi) \quad \alpha\text{-ban páros fv}$$

$$\frac{A_x(x, z)}{A_0} = \frac{R}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\sin \varphi \cos \alpha}{\sqrt{D}} d\varphi \right) d\alpha \quad \text{Az integrandus } \alpha\text{-ban páros fv tehát } A_y(x, z) \neq 0$$

$$\frac{A_y(x, z)}{A_0} = \frac{R}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\sin \varphi \sin \alpha}{\sqrt{D}} d\varphi \right) d\alpha \quad \text{Az integrandus } \alpha\text{-ban páratlan fv } A_x(x, z) = 0$$

$$\frac{A_z(x, z)}{A_0} = \frac{R}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}} d\varphi \right) d\alpha \quad \text{Az integrandus } \alpha\text{-ban páros fv tehát } A_y(x, z) \neq 0$$

Általánosságban tehát:

$$\mathbf{A}(x, y, z) = A_0 \frac{R}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \left(\mathbf{i} \frac{-\sin \varphi \cos \alpha}{\sqrt{D}} + \mathbf{j} \frac{-\sin \varphi \sin \alpha}{\sqrt{D}} + \mathbf{k} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}} \right) d\varphi \right] d\alpha$$

$$A_0 = \mu_0 \frac{NI}{2R\pi} \frac{r}{2}$$

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \mu_0 \frac{NI}{2R\pi} \frac{r}{2} \frac{R}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \left(\mathbf{i} \frac{-\sin \varphi \cos \alpha}{\sqrt{D}} + \mathbf{j} \frac{-\sin \varphi \sin \alpha}{\sqrt{D}} + \mathbf{k} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}} \right) d\varphi \right] d\alpha$$

$$B_o = \mu_0 \frac{NI}{2R\pi}$$

$$\mathbf{A}(x, y, z) = B_o \frac{rR}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \left(\mathbf{i} \frac{-\sin \varphi \cos \alpha}{\sqrt{D}} + \mathbf{j} \frac{-\sin \varphi \sin \alpha}{\sqrt{D}} + \mathbf{k} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}} \right) d\varphi \right] d\alpha$$

A mágneses indukció vektorát a mágneses vektorpotenciál rotációjaként kapjuk

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{B}(x, y, z) = B_0 \frac{rR}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{rot} \left(\mathbf{i} \frac{-\sin \varphi \cos \alpha}{\sqrt{D}} + \mathbf{j} \frac{-\sin \varphi \sin \alpha}{\sqrt{D}} + \mathbf{k} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}} \right) d\varphi \Bigg] d\alpha$$

Vizsgáljuk az integrandus vektort.

$$\text{rot} \left(\mathbf{i} \frac{-\sin \varphi \cos \alpha}{\sqrt{D}} + \mathbf{j} \frac{-\sin \varphi \sin \alpha}{\sqrt{D}} + \mathbf{k} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}} \right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-\sin \varphi \cos \alpha}{\sqrt{D}} & \frac{-\sin \varphi \sin \alpha}{\sqrt{D}} & \frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}} \end{vmatrix} =$$

Az alábbiakban felhasználjuk a következő három összefüggést:

$$\frac{\partial D}{\partial x} = 2(x - R \cos \alpha - r \cos \varphi \cos \alpha)$$

$$\frac{\partial D}{\partial y} = 2(y - R \sin \alpha - r \cos \varphi \sin \alpha)$$

$$\frac{\partial D}{\partial z} = 2(z - r \sin \varphi)$$

Az $\mathbf{i}$ komponens:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\sin \varphi \sin \alpha}{\sqrt{D}} \right)$$

Kifejtve:

$$\begin{aligned} & \cos \varphi \left(-\frac{1}{2} \right) D^{-3/2} \frac{\partial D}{\partial y} + \sin \varphi \sin \alpha \left(-\frac{1}{2} \right) D^{-3/2} \frac{\partial D}{\partial z} = \\ & = \cos \varphi \left(-\frac{1}{2} \right) D^{-3/2} 2(y - R \sin \alpha - r \cos \varphi \sin \alpha) + \sin \varphi \sin \alpha \left(-\frac{1}{2} \right) D^{-3/2} 2(z - r \sin \varphi) = \\ & = -\frac{\cos \varphi (y - R \sin \alpha - r \cos \varphi \sin \alpha) + \sin \varphi \sin \alpha (z - r \sin \varphi)}{D^{3/2}} = \\ & = \frac{-y \cos \varphi + (R \cos \varphi + r - z \sin \varphi) \sin \alpha}{D^{3/2}} \end{aligned}$$

A **j** komponens:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos \varphi}{\sqrt{D}}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\sin \varphi \cos \alpha}{\sqrt{D}}\right)=$$

Kifejtve:

$$\begin{aligned} & -\cos \varphi\left(-\frac{1}{2}\right)D^{-3/2}\frac{\partial D}{\partial x}-\sin \varphi \cos \alpha\left(-\frac{1}{2}\right)D^{-3/2}\frac{\partial D}{\partial z}= \\ & =-\cos \varphi\left(-\frac{1}{2}\right)D^{-3/2}2(x-R \cos \alpha-r \cos \varphi \cos \alpha)-\sin \varphi \cos \alpha\left(-\frac{1}{2}\right)D^{-3/2}2(z-r \sin \varphi)= \\ & =\frac{\cos \varphi(x-R \cos \alpha-r \cos \varphi \cos \alpha)+\sin \varphi \cos \alpha(z-r \sin \varphi)}{D^{3/2}}= \\ & =\frac{x \cos \varphi-(R \cos \varphi+r-z \sin \varphi) \cos \alpha}{D^{3/2}} \end{aligned}$$

A **k** komponens:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\sin \varphi \sin \alpha}{\sqrt{D}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sin \varphi \cos \alpha}{\sqrt{D}}\right)=$$

Kifejtve:

$$\begin{aligned} & -\sin \varphi \sin \alpha\left(-\frac{1}{2}\right)D^{-3/2}\frac{\partial D}{\partial x}+\sin \varphi \cos \alpha\left(-\frac{1}{2}\right)D^{-3/2}\frac{\partial D}{\partial y}= \\ & =-\sin \varphi \sin \alpha\left(-\frac{1}{2}\right)D^{-3/2}2(x-R \cos \alpha-r \cos \varphi \cos \alpha)+\sin \varphi \cos \alpha\left(-\frac{1}{2}\right)D^{-3/2}2(y-R \sin \alpha-r \cos \varphi \sin \alpha)= \\ & =\frac{\sin \varphi \sin \alpha(x-R \cos \alpha-r \cos \varphi \cos \alpha)-\sin \varphi \cos \alpha(y-R \sin \alpha-r \cos \varphi \sin \alpha)}{D^{3/2}}= \\ & =\frac{(y \cos \alpha-x \sin \alpha) \sin \varphi}{D^{3/2}} \end{aligned}$$

Behelyettesítjük a komponenseket:

$$\frac{B_x(x, y, z)}{B_0}=\frac{r R}{4 \pi} \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{-y \cos \varphi+(R \cos \varphi+r-z \sin \varphi) \sin \alpha}{D^{3/2}} d \varphi\right) d \alpha$$

$$\frac{B_y(x, y, z)}{B_0} = \frac{rR}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \cos \varphi - (R \cos \varphi + r - z \sin \varphi) \cos \alpha}{D^{3/2}} d\varphi \right) d\alpha$$

$$\frac{B_z(x, y, z)}{B_0} = \frac{rR}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(y \cos \alpha - x \sin \alpha) \sin \varphi}{D^{3/2}} d\varphi \right) d\alpha$$

Forgásszimmetria miatt x, z sík metszetet vizsgálunk. Itt $y = 0$

$$D = x^2 + z^2 + R^2 + r^2 - 2(Rx \cos \alpha + rx \cos \varphi \cos \alpha + rz \sin \varphi - Rr \cos \varphi) \quad \alpha\text{-ban páros fv}$$

Az integrandus α -ban páratlan fv $B_x(x, z) = 0$

$$\frac{B_x(x, z)}{B_0} = \frac{rR}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(R \cos \varphi + r - z \sin \varphi) \sin \alpha}{D^{3/2}} d\varphi \right) d\alpha$$

Az integrandus α -ban páros fv tehát $B_y(x, z) \neq 0$

$$\frac{B_y(x, z)}{B_0} = \frac{rR}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \cos \varphi - (R \cos \varphi + r - z \sin \varphi) \cos \alpha}{D^{3/2}} d\varphi \right) d\alpha$$

Az integrandus α -ban páratlan fv tehát $B_z(x, z) = 0$

$$\frac{B_z(x, z)}{B_0} = \frac{rR}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{-x \sin \alpha \sin \varphi}{D^{3/2}} d\varphi \right) d\alpha$$

A nem nulla komponenseket az alábbiakban összefoglaljuk azzal a kiegészítéssel, hogy a nullával osztás megelőzése okán bevezetjük a δ huzalvastagságot.

$$\frac{A_x(x, z)}{A_0} = \frac{R}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\sin \varphi \cos \alpha}{\sqrt{D} + \delta} d\varphi \right) d\alpha$$

$$\frac{A_z(x, z)}{A_0} = \frac{R}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{D} + \delta} d\varphi \right) d\alpha$$

$$\frac{B_y(x, z)}{B_0} = \frac{rR}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \cos \varphi - (R \cos \varphi + r - z \sin \varphi) \cos \alpha}{(\sqrt{D} + \delta)^3} d\varphi \right) d\alpha$$

A numerikus számításoknál a következő paramétereket alkalmaztuk:

A toroid meneteinek rádiusza az egység $r = 1$, a toroid alakzat rádiusza $R = 3.18$, (ez a R rádiusz éppen 20 kerületű tekercset eredményez, mintha az előző számítás szolenoid tekercsét kör alakúvá hajlítottuk volna) továbbá a huzalvastagság $\delta = 10^{-2}$.