

A most következő néhány oldalon egy olyan tudomány különös filozófiai megközelítéséről és az ebből származó elképesztő következtetésekről lesz szó, amellyel mindannyian ismeretséget kötünk a tanulmányaink során. Különböző mélységben sajátítjuk el ugyan, de jól tudjuk, hogy alapszintű ismerete nélkül a mai világban már senki sem boldogulhatna. Igen, a matematikáról van szó, de még mielőtt egy elegáns mozdulattal átlapoznánk ezt a rossz emlékeket idéző fejezetet, mindenkit megnyugtatok: ez a rövid kirándulás semmiben sem fog hasonlítani a rettegett matematika órákra vagy előadásokra. Elég, ha most felszabadítjuk elménk logikára fogékonyabb területeit, hátradőlünk egy kényelmes karosszékben és máris élénk tárul egy igazán rejtelmes világ...

Gondolati túránkat kezdjük egy korábbi kijelentés vizsgálatával: „A matematika ismerete nélkül a XXI. században ember már nem boldogulhat a világban”. Hogy ez mennyire igaz, arról különösen azok tudnának mesélni, akik bármilyen természettudomány ismereteinek mélyebb szintű elsajátítására szánták rá magukat. Legyen szó fizikáról, csillagászatról vagy kémiáról, biológiáról, netán műszaki-, gazdasági tudományokról, a megfelelő szintű matematikai „infrastruktúra” az ismeretanyag megértéséhez, feldolgozásához és alkalmazásához egyszerűen nélkülözhetetlen. Vajon ez a véletlen műve?

A kérdés minden komolyabb tudós elmét elgondolkoztatott már évszázadokkal ezelőtt is, de csak a legnagyobb gondolkodók voltak képesek arra, hogy megfogalmazzák az igazi feladványt, ahol a problémát maga a matematika jelenti. Mielőtt górcső alá vennék az emberi elme logikai képességének csodálatos eredményeit, gondolkozunk el, mi is a matematika valójában?

Kolmogorov¹ orosz matematikus korszerű meghatározása szerint a matematika a valós világ általános értelemben vett mennyiségi-, térbeli formáiról és viszonyairól szóló tudomány.²

A mennyiségi- és a térbeli formákat a matematikusok hozzák létre absztrakció³ segítségével, majd ezeken a formákon (számok, algebrai struktúrák, mátrixok, halmazok stb.) különböző műveleteket értelmeznek, amely műveletek sajátos „szabályok” szerint működnek. A matematikai „szabályok” rendszerét tételek és bizonyításaik alkotják,⁴ amelyeket viszont bizonyítás nélkül igaznak elfogadott egyszerű axiómákra⁵ vezetnek vissza.

Az egyes axiómarendszerekre különböző matematikai „világok” épülnek (halmazelmélet és logika, számelmélet, algebra, geometria, analízis, topológia, valószínűségszámítás stb.), amelyek egymástól elkülöníthetőek, de vannak közöttük jelentős kölcsönhatások és átfedések is. Tehát, ha megpróbáljuk lecsupaszítani a matematikát, akkor egy megegyezés szerint helyesnek elfogadott kijelentésekre (axiómarendszerre) épülő matematikai ítéletekből (tételekből) álló, logikusságra törekvő rendszert kapunk.⁶ Egy-egy axiómarendszer ellentmondás-mentességének igazolása azonban a matematika leg súlyosabb problémái közé tartozik.

Kurt Gödel⁷ kiemelkedő XX. századi matematikus 1931-ben közreadott nemteljességi tétele végérvényesen pontot tett a matematikai axiómarendszerek ellent-

mondás-mentességének kérdésére, mert logikai úton igazolta, hogy bármely axiómarendszeren belül megfogalmazható egy olyan állítás, amelyik nem bizonyítható, de nem is cáfolható. Tehát egy véglegesen megfogalmazott axiómarendszerben az el-
lentmondás-mentesség nem bizonyítható. Egy adott axiómarendszer nem igazolhatja saját maga „igaz” voltát.⁸

Ezek után talán nem véletlen, hogy korábban más tudományok művelői a matematikát kissé öncélú időrablásnak (jobb esetben eszköznék) tekintették, és sokáig nem is ismerték el önálló tudománynak.

Mára a helyzet azért jelentősen változott. A matematikának sok új ága született, és sok, korábban teljesen haszontalannak vélt ága is hasznosnak bizonyult a valós világ frissen felfedezett folyamatainak objektív leírásában.⁹ Mintha a matematikusok előre megalkották volna ezeknek a korábban ismeretlen rendszereknek a lehetséges modelljeit. Talán az is elképzelhető, hogy az összes általunk megalkotható matematikai elmélethez fogunk találni olyan valós fizikai rendszereket, amelyeknek működése jól leírható majd segítségükkel. Ezt az elképzelést támasztja alá néhány kimagaslóan előremutató elméleti fizikai kutatás (szuperhúr elmélet, M-elmélet), ahol az előrejutást jelentősen korlátozza az a tény, hogy a sokdimenziós terekben zajló folyamatok leképezéséhez először ki kell fejleszteni a megfelelő matematikai eszköztárat, és csak az után lehet előre lépni a fizikai rendszerek szintézisében.¹⁰ Itt kétségtelen tény, hogy a fizikusok olyan egyedülálló elmélet kialakítására tesznek kísérletet, ami olyan matematikai infrastruktúrát igényel, amelyre a matematikusok eddig csak kevés időt fordítottak (de az alapjai már léteztek). Magyarul összefoglalva a matematika sokkal alapvetőbben átszövi az egész világunkat, mint azt korábban bármikor gondoltuk volna. De ha ennyire alapvető és teljesen körbevesz minket, mégis honnan származik?

A fentiek után lassan kénytelenek vagyunk belátni, hogy a matematika nem lehet csupán a matematikusok pusztá agyszüleménye. Az könnyen bizonyítható tény, hogy a világegyetemben működő fizikai törvények az ember jelenléte nélkül is léteztek (a távoli múltban) és léteznek ma is (például a szomszédos galaxisokban). Vajon ugyanez a helyzet a matematikával is?

Jelenleg még mindig az az elképzelés tartja magát, hogy a matematika az emberi gondolkodás határtalan absztrakciós képességének a demonstrációja, és mint ilyen, egyértelműen az intelligens gondolkodáshoz köthető. Azonban, ha jól belegondolunk, az emberi agyat felépítő idegsejtek bonyolult hálózata is részét képezi a világegyetem fizikai valóságának. Ebben a roppant összetett rendszerben molekuláris reakciók milliárdjain keresztül születnek meg a matematika megértéséhez szükséges fogalmak, amik akár a világtól teljesen elrugaszkodott tételek kimondásához is vezethetnek. De ne feledjük, az agyunk is részét képezi ennek a rendszernek, tehát akármilyen elvont kérdésről is legyen szó, az azzal foglalkozó emberek agyában zajló fizikai, kémiai, biológiai folyamatok ettől kezdve áttételesen függeni fognak a probléma megoldásától, mert az éppen aktív agyterületek neuronjainak a viselkedését a gondolkodási folyamat közben nem tudjuk más „elmélettel” pontosan leírni, csak azzal, amelyen éppen gondolkozunk. Tekinthejtük-e ezek után az adott elvont matematikai levezetéseket a fizikai valóságtól teljesen idegennek? Egyáltalán gondolkozhatunk-e olyan elvont problémán, ami nem köthető valamilyen valós folyamat működéséhez is?

Talán ez a magyarázata annak, hogy a korábban haszontalannak hitt matematikai elméletek sorra „értelmet kapnak” újonnan felfedezett valós rendszerektől. Úgy tűnik,

hogyan az emberi agy neuronhálózata – páratlan bonyolultságának következtében – szinte tetszőleges viselkedésű valós rendszereket képes „modellezni”, és így mintegy magában rejt a világot leíró elméletekhez szükséges összes információt. Ezek után már elképzelhetjük, hogy a matematikusok, agyukat „törve” vagy számítógépeiket programozva végül akaratlanul sorra építik fel neuronjaik hálózatából – vagy a számítógépek tranzisztoraiból – az újabb és újabb (de ettől kezdve már biztosan létező) fizikai rendszereket, és így mégis lehetővé válik, hogy megalkothassák az ezeket leíró különös elméleteket.

Visszatérve a matematika alapvető szerepére, könnyen demonstrálhatjuk fontosságát egy gondolat-kísérlettel. Vegyünk az ismert világunkból egy apró részt – például egy elektront – és nézzük meg, mire van szükségünk ahhoz, hogy a létezését biztosítani tudjuk.

Ahhoz, hogy elektron létezessen, kerítünk egy darab tér-időt is, amiben elhelyezhetjük, hiszen csak kölcsönhatásuk biztosíthatja a megismert sajátos tulajdonságaikat. A tér-idő leírásához a relativitás-elméletre, az elektron viselkedésének megadásához pedig a komplett kvantummechanikára szükségünk van. Ezek az elméletek már önmagukban imponáló matematikai struktúrát képviselnek, mert egyetlen vákuumban lebegő részecskének a megadásához is be kell vetnünk a csoportelmélet, a függvényanalízis, a differenciál geometria vívmányainak jelentős részét.¹¹ Talán nem is olyan elhamarkodott kijelentünk: a matematika létezése alapfeltétele a fizika (és ezzel minden más) működésének. Ha ez a feltételezésünk helytálló bizonyul, akkor máris előttünk tornyosul a matematika eredetének problémája. Sőt, vérmérsékletünkől függően felmerülhet a végső kérdés: A matematika axiómarendszere önmagában reprezentálja-e az univerzum szerkezeti felépítését? Ezzel elérkeztünk fejtegetésünk legérdekfeszítőbb részéhez.

Látható, hogy a matematika eredetének kérdése szépen összefonódik a világegyetem eredetének kérdésével, így illeszkednie kell a ma elfogadott keletkezési elméletekhez is.

Az univerzum jelenlegi elképzeléseink alapján egy igen forró kvark-glüon plazmából keletkezhetett. A 10^{43} másodperc előtti extrém viszonyok között (végtelen sűrűség, végtelenül görbült tér stb.) nem létezhetett semmi számunkra is ismerős jelenség. A végtelenül apró térfogatba préselt univerzumnak nem volt mérhető kiterjedése és nem telt benne az idő sem.¹² Egyszerűen csak létezett, de a matematika alapvető axiómarendszerének már nyomokban itt is jelen kellett lennie, hiszen ezek között a viszonyok között is létezhetek szabályosságok. Persze, az is elképzelhető, hogy a matematika alapvető axiómái is folyamatosan fluktuáltak különböző állapotok között, ezzel mintegy dinamikusan változóvá téve azokat a törvényszerűségeket is, amelyek a kvark-glüon plazma örvénylését irányították.

Miközben ebben a vadul fortyogó energiakatlanban az egyes alkotóelemek kitöltötték az összes – az akár egymásnak ellentmondó – állapotokat is, előállt az „alapvetően igaz kijelentéseknek” egy olyan konstellációja, amely szétvetette az egész kezdeti állapotot, és létrehozta a ma megfigyelt táguló világegyetemet. A világegyetem tehát magában hordoz egy olyan kevésbé valószínű kezdeti állapotot, ami ahhoz kellett, hogy kibillenessen kezdeti egyensúlyából. 10^{35} másodperccel a „Nagy Bumm” után a fizika törvényszerűségeinek már javában működniük kellett, tehát a matematika jelenlegi axiómarendszerének ekkor már közel végső formájában meg kellett jelennie.

Azonban ennek az axiómarendszernek az ellentmondás-mentessége ennyi idő alatt biztosan nem derülhetett ki!

Korábban az a kép alakulhatott ki bennünk, hogy a matematika feltételezett időtlensége miatt az egyes tételek bizonyításához nincs szükség időre. Ha egyszer bebizonyítottuk őket, akkor mindig is léteztek, és kezdetektől fogva igaznak kell elfogadnunk ezeket az állításokat. Csakhogy a világegyetem keletkezésével együtt megszületett az idő is, amivel az információ terjedésének sebessége is a fény sebességére korlátozódott. Ha pedig csak korlátozva terjedhet az információ (az öt szállító elemi részek véges sebessége miatt), akkor azok a véletlenszerű vagy szándékos fizikai folyamatok, amelyek az egyes tételek igazát bizonyíthatják, csak nullától nagyobb idő alatt tehetik meg ezt.

Magyarán szólva, az egyes tételek bizonyításához időre van szükség, még hozzá a bizonyítás módjától függően különböző mennyiségre. Vannak olyan tételek, amelyek bizonyítására néhány másodperc gondolkodás elegendő, de vannak olyanok is, amelyek elvileg csak végtelen sok idő alatt végezhetőek el (például Fermat nagy sejtésének bizonyítását csak 360 évvel később 1993-ban adta meg Andrew Wiles angol matematikus egy igazán komplikált levezetésben¹³).

A világegyetem kezdeti állapotában „befagyott” axiómákból létrehozható összes tétel (ami akár végtelen sok is lehet) az azóta eltelt 15 milliárd évben tehát még nem nyerhetett igazolást, ezért a kiinduló axiómák ellentmondás-mentessége teljes bizonyossággal még nem derülhetett ki, illetve Kurt Gödel idevonatkozó nem-teljességi tételéből kifolyólag sohasem derülhet ki. Innen már csak egy apró lépés a következő kérdés: A kezdeti feltevések „megálmodói” honnan tudhatták, hogy ellentmondásoktól mentes tételrendszert alkothatnak belőlük?

Sehonnan! Ezért minden valószínűség szerint az univerzum alapját alkotó axiómák ellentmondásokat tartalmaztak.

Hogyan működhet mégis a világegyetem? Mi védi meg a katasztrofális logikai defektusok hatásaitól? Ennek megértéséhez végleg szakítanunk kell a megszokott hétköznapi világképünkkel.¹⁴

Tegyük fel, hogy a világegyetem egy távoli szegletében lévő intelligens civilizáció buzgó matematikusa bebizonyít egy újabb matematikai tételt, visszavezetve azt egészen a kezdeti axiómákra. Nagy örömeiben azonnal fénysebességű üzenetben adja tudtára az univerzum minden lakójának a felfedezését. Ezzel az üzenetet alkotó fotonok rendszerével a valós fizikai világhoz csatolja a bizonyítását, hiszen az agyán kívül egy újabb rendszer működése is függővé vált az új tétel kimondásától. A tétel bizonyításának „híre” tehát fénysebességgel terjed szét a világegyetemben, aminek kapcsán újabb, az előzővel kapcsolatos tételek nyerhetnek igazolást, így a matematikai tételek egész láncolata születhet a felfedezésből.

Egy másik távoli szegletben egy másként gondolkodó matematikus ugyanerre az axiómarendszerre alapozva egy előzővel ellentétes bizonyítást talál az eredeti tételre (persze, nem tud a másik létezéséről). Ő sem rest szétkürtölni mindenfelé, és erre a bizonyításra is újabb tételek láncolata épülhet fel egészen addig probléma nélkül, amíg a két táguló buborék nem találkozik valahol. A buborékokon belül továbbra is az eredeti bizonyítás-láncolat lesz az igaz, de a buborékok határvonalán különös dolognak kell történnie. A logikai ellentmondásosság nem tartható fenn, ezért lokálisan (a határfelület mentén) az alapvető axiómáknak módosulniuk kell, hogy biztosíthassák az

ellentmondás-mentességet. Az axiómák eme helytől és időtől függő finoman változó rendszere bármilyen körülmények között képes biztosítani az univerzum számára a szükséges mértékű ellentmondás-mentességet. Persze, innentől kezdve a létrejött módosult axiómák információs „hulláma” fénysebességgel terjed szét az univerzumban, és lassan kisímítja az eredetileg rejtett logikai defektus hatásait. Azonban végtelen sok lehetséges tételhez végtelen sok ellentmondás is tartozik, ami folyamatosan változó axiómarendszerhez vezet, de természetesen minél több idő telik el a világegyetem keletkezése óta, annál bonyolultabb fizikai kapcsolatokat igénylő tételek maradhatnak csak bizonyítás nélkül.

Ezzel arra is magyarázatot kaptunk, hogy miért van olyan kevés jelentős ellentmondás a jelenlegi matematikában. A kezdeti univerzum nyers axiómái az idők folyamán egyre finomodnak, ahogy az egyes ellentmondásos tételek a napvilágra kerülnek. A kezdeti pillanatokban nagyon sok ellentmondás létezhetett, de akkor a világegyetem magas energiaszintje és a kavargó részecskék sokasága miatt a lehetséges egyszerűbb fizikai rendszerek nagy része véletlenszerűen realizálódhatott, ezzel a kimondható ellentmondásos tételek nagy tömege gyorsan felmerülhetett és felülírhatta a kezdeti feltevéseket. Az univerzum mérete ekkor ráadásul még roppant kicsi volt, így az axiómarendszer változásai homogén módon zajlottak mindenütt. A felfűvódásos szakaszban (10^{-35} és 10^{-32} másodperc között) a még megmaradt ellentmondásokat az egyes tér-idő darabok magukba zárták, és a további ellentmondások axiomatikus feloldása azóta már lokálisan folyik.

Tehát jelenleg minden tér-idő tartományban egyedi – kis mértékben eltérő – axiómarendszer létezik, ami pillanatról pillanatra dinamikusan változik azoknak a véletlenszerű vagy szándékos fizikai folyamatoknak a következtében, amelyek a helyi axiómarendszerre épülő egyes tételeket éppen igazolják vagy megdöntik. Ezt nevezhetjük a matematikai relativitás elméletének, ami legalább annyira megrázhatja a világról alkotott képünket, mint a relativitáselmélet tette azt a múlt század elején.

Miért is olyan megrázó az, amit az előbb olvashattunk? Azért, mert magában hordozza azt a jelentőségteljes kijelentést, hogy az egyes fizikai rendszerek működésük közben visszahatnak az univerzum felépítésére, lokálisan megváltoztatva annak alapvető szerkezetét.

Ha még mindig nem érzékeljük ennek a jelentőségét, lássunk egy példát. Egy matematikus hosszú évek munkájával igazol egy eddig még senki által nem bizonyított tételt. Újabb hosszú évek munkája után azonban nyomára bukkan egy olyan levezetésnek, ami várhatóan ennek az ellenkezőjét bizonyítja majd. Az agyában lévő információk abban a pillanatban, amikor a logikus levezetés lépései a gondolataiban összeállnak, máris kölcsönhatásba lépnek a világegyetemet felépítő alapvető axiómarendszerrel, és emiatt az eddig még sosem látott ellentmondás miatt lokálisan finoman kiegészülnek az axiómák úgy, hogy az ellentmondás feloldódjon. A matematikus már nem fogja eredeti formájában meglelni a defektust, mert közben létrejött a logikai ellentmondás feloldásának lehetősége.

Röviden összefoglalva az elhangzottakat: Ha a matematika tényleg olyan elképesztően alapvető, mint amennyire annak tűnik a tudósoknak, akkor az ember mégis csak képes befolyásolni pusztán a „gondolatainak erejével” az univerzum felépítését.

Ha csak arra gondolunk, hogy a fenti szöveg olvasása közben az agyunk idegsejthálózatában milyen összetett kapcsolatok épülhettek ki, már azt sem tarthatjuk elkép-

zelhetetlenek, hogy a milliárdnyi neuron interakciója közben véletlenszerűen jó néhány tételt igazolhatott vagy megcáfolhatott. Ennek következtében más tételek is bizonyítást nyerhettek, aminek hatására logikai defektusok cikázhattak szét a lokális téridőre jellemző gigantikus tételrendszer testében. A minimálisan megváltozó axiómák miatt néhány speciális helyzetben lévő kvark kölcsönhatása kicsit módosulhatott, tehát akarva-akaratlanul létezésünkkel befolyásoltuk a minket körülvevő világ szabályait. Ezek a folyamatosan gerjesztődő apró változások bizonyos szinten, mintegy határozatlanná tehetik a tételek rendszerét, hasonlóan ahhoz, ahogy a kvantummechanikában érvényesek a határozatlansági elv törvényszerűségei.

A véletlenszerűen bekövetkező ingadozások azonban csak nagyon aprók lehetnek, és hosszú távon kiegyenlíthetik egymást. Viszont semmi sem gátolja meg, hogy tudatosan feltérképezzük az axiómarendszert átszövő parányi defektusok hálózatát. Ha ezt megtesszük, akkor tudatos munkával olyan „újszerű” matematikai tételcsoportok létrehozásába foghatunk, amelyek segítségével felerősíthetjük ezeket az apró változásokat, és megalapozhatjuk egy számunkra (vagy az élet számára) kedvezőbb világegyetem alapjait.

Talán a matematikusaink és a tudósaink tudtukon kívül már most is ezt teszik a világgal, hiszen az ember által megszerzett tudás mérhetetlenül sok fizikai rendszerbe épült be (emberi agyak, számítógépek, könyvek, épületek, műholdak stb.), amivel az általunk preferált logikai rendszert a Földet körülvevő fénysebességgel táguló buborékban bizonyára jelentősen megszilárdítjuk. Kérdés, hogy tudatos világformáló tevékenységünket a világegyetem erői hogyan tolerálják majd.

Előfordulhat, hogy rájövünk: a jelenleg érvényes rend is már egy tudatos folyamat eredménye, vagy szembetaláljuk magunkat olyan civilizációkkal, amelyek eljutottak már arra a szintre, hogy kedvük szerint formálják a világegyetem felépítését. Vajon figyelembe veszik majd a létezésre vonatkozó igényeinket? Ahhoz, hogy ne érhesen bennünket meglepetés, azt hiszem alapvető fontosságú lesz, hogy értsünk majd a matematikához.

Talán nem árt, ha máris elkezdjük ismétелgetni mindent elsöprő csatakiáltásunkat:
Számoljunk csak utána!

Jegyzetek

- ¹ *Kolmogorov, Andrej Nyikolajevics* (szül.: 1903) orosz matematikus. A valószínűségszámítás egzakt matematikai megalapozása az ő nevéhez fűződik. 1929-ben jelent meg „A mérték és a valószínűség általános elmélete” című műve, amely a valószínűségszámítás axiomatikus felépítését tartalmazza. 1931-ben professzor és a moszkvai egyetem matematika intézetének igazgatója lesz. Iskolateremtő tudós, akadémikus. Az ötvenes években az információelmélet továbbfejlesztésével foglalkozott. (<http://www.sulinet.hu – matematika oldalak>).
- ² *A matematika fogalmi meghatározásának* részletes magyarázatát l.: Szász Gábor: Matematika I. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1997. 11-12. o.
- ³ *Absztrakció:* Olyan gondolkodási művelet, amelynek során eltekintünk a tárgyak vagy jelenségek konkrét egyedi tulajdonságaitól, de kiemeljük és általánosítjuk lényeges közös tulajdonságaikat. L.: Szász Gábor i. m. 13. o.
- ⁴ *Tétel és bizonyítása:* Tételen olyan matematikai ítéletet értünk, amely igazként elismert más matematikai ítéletek következménye a logikailag helyesnek tekintett következtetési módok szerint. Azt a következte-

tés-sorozatot, amely a már a korábban igazként elismert ítéletektől az új tételig vezet, a tétel bizonyításának nevezzük. A tétel tehát nem más, mint bizonyított ítélet. L.: Szász Gábor i. m. 15. o.

- 5 *Axióma*: A bizonyítás nélkül igaznak elfogadott matematikai ítéleteket axiómának nevezzük L.: Szász Gábor i. m. 16. o.
- 6 *Axiómarendszerek*: Egy-egy matematikai tudományág axiómáinak összességét az illető tudományág axiómarendszerének nevezzük. L.: Szász Gábor i. m. 16. o.
Néhány alapvető axiómarendszer:
Euklideszi geometria = Eukleidesz (*élt i. e. 300 körül*)
Hiperbolikus geometria = Bolyai J. (*1802-1860*) és Lobacsevszkij, Ny. I. (*1792-1856*) (XIX. század)
Általánosított euklideszi = Hilbert, D. (*1862-1943*) (1899)
Halmazelmélet = Zermelo, E. és Fraenkel, A. (1908)
Valószínűségszámítás = Kolmogorov, A. N. (*Szül.: 1903*) (1933)
Ugyancsak Hilbert volt az, aki 1899-ben megválaszolta azt a kérdést, hogy mikor megfelelő egy axiómarendszer:
Legyenek az egyes axiómák *függetlenek* egymástól, azaz egyiket se lehessen igazolni a másik segítségével.
Legyen az axiómarendszer *ellentmondásmentes*, vagyis ne fordulhasson elő olyan állítás, amely az axiómák alapján igazolható és cáfolható is egyben.
Legyen az axiómarendszer *teljes*, azaz az adott tudományág minden problémája vagy igazolható, vagy cáfolható lehessen.
1931-ben azonban Kurt Gödel osztrák matematikus megmutatta, hogy valamely *ellentmondás nélküli axiómarendszer sohasem lehet teljes*.
- 7 *Gödel, Kurt* osztrák matematikus. Fő kutatási területe a matematikai logika volt. Felbolygatta a matematikát a híres „eldönthetlenségi elmélete” – mely szerint minden szigorúan logikus matematikai rendszerben vannak olyan állítások, amelyeknek az igaz vagy hamis volta nem igazolható a rendszer axiómái alapján –, ami először egy német műszaki folyóiratban jelent meg 1931-ben. Gödel ezenkívül geometriai modelleket fejlesztett ki Einstein relativitás elméletéhez. (<http://www.sulinet.hu> – matematika oldalak).
- 8 Simonyi András: A Hilbert-program és Gödel nem-teljességi tételei. = Magyar Filozófiai Szemle 1999/6.
- 9 Lovász László: Egységes-e a matematika? = Természet Világa 1998. III. különszám, 45. o.
- 10 Green, Michael B.: Szuperhúrok. = Scientific American 1986/11. 24-36. o.
- 11 Gombás – Kisdí: Bevezetés az elméleti fizikába II. 234. o.
- 12 Mackintosh, R. – Al-Khalili, J. – Jonson, B. – Pena, T.: Az atommag. Akadémiai K., Budapest, 2003, 124. o.
- 13 Singh, Simon : A Nagy Fermat-sejtés. Park Kiadó, Budapest, 1999
- 14 Az utolsó rész a szerző világról alkotott részletes elképzeléseit tükrözi, de az ötletek Egan, G.: Fényözön c. nagyszerű kisregényében leírt (ezzel nem egyező) filozófiai fejtegetések nyomán kerültek kidolgozásra. L.: Egan, Greg: Fényözön. = Cherubion SF antológia 2003. 127-157. o. (*Greg Egan*: 1961-ben született az ausztráliai Perth-ben. Matematika szakon végzett az egyetemen, majd programozóként kezdett dolgozni. 1992 óta főállású író.)