MODÁLIS SZEMANTIKA

RUZSA IMRE

A logika tudományának művelői világszerte ismerik a kiváló finn tudós, Jaakko Hintikka nevét. Hintikka alkotó módon járult hozzá a logika és a metodológia számos ágának fejlődéséhez. Nemrég megjelent műve[1] a *modális logikával* foglalkozó válogatott tanulmányainak gyűjteménye. A kötetben foglalt cikkek az utolsó 8—10 évben jelentek meg, abban az időszakban, amelyben kialakult a modális logika régóta hiányolt *szemantikája* (elsősorban Saul Kripke és Stig Kanger úttörő munkássága alapján). Ily módon e tanulmányok mintegy dokumentumai annak a nagy jelentőségű szemléleti változásnak, amely ebben az időszakban a modális logika területén végbement, és amely bizonyára jelentős hatást gyakorolt a tárgy minden szakemberére. Cikkünkben, a teljességre való törekvés nélkül, ismertetjük Hintikka fontosabb gondolatait, helyenként bizonyos megjegyzésekkel kiegészítve. Annak érdekében, hogy e beszámoló minél több olvasó számára hozzáférhető legyen, rövid bevezetést adunk a modális logika alapfogalmairól.[2]

1. A MODÁLIS LOGIKA ELŐTÖRTÉNETÉBŐL

A modális logika a *szükségszerűség* és a *lehetőség* fogalmának *logikai* előfordulásaival foglalkozik. Általában egy logikai elmélet (rendszer, kalkulus) akkor tartozik a modális logika keretébe, ha tetszőleges p kijelentés esetén a „szükségszerű, hogy p" és a „lehetséges, hogy p" alakú kijelentések logikai elemzése is az elméletbe tartozik.

Példaként induljunk ki a klasszikus kétértékű kijelentéslogikából. Jelöljük a negáció, konjunkció, diszjunkció, materiális implikáció, materiális ekvivalencia műveleteit rendre a $\sim$, &, v, $\supset$, = szimbólumokkal. Bővítsük e rendszer formális nyelvét a szükségszerűséget, ill. a lehetőséget kifejező L, M betűkkel.[3] Pontosabban: ha p tetszőleges kijelentés, akkor jelöljük Lp-vel a „szükség-

[1] Jaakko Hintikka, *Models for Modalities*. Selected Essays. D. Reidel Publ. Co. Dordrecht, Holland, 1969, $X + 222$ old.

[2] E problémák egy részének részletesebb tárgyalása található: Ruzsa Imre, „Újabb eredmények a modális logikában", *Logikai tanulmányok* (megjelenés alatt).

[3] A logikai szükségszerűség (mint majd látni fogjuk) egy speciális esetben a *logikai* igazság szinonímája; ez magyarázza az L használatát a szükségszerűség kifejezésére. Korábban L helyett N-et használtak (mint a *necessitas*, necessity, Notwendigkeit kezdőbetűjét). A lehetőséget kifejező M a német Möglichkeit kezdőbetűjéből származik. Hintikka N-et használ L helyett. Ez az egyetlen pont, ahol eltérünk Hintikka jelölés-technikájától.

szerű, hogy p", ill. Mp-vel a „lehetséges, hogy p" kijelentést. Ezzel rendszerünk nyelvét alkalmassá tettük modális kijelentések *ábrázolására*. Ezekután a kétértékű kijelentéskalkulust *modális kijelentéskalkulussá* bővíthetjük, ha az Lp és Mp alakú kijelentések *logikai értékeit* szabályozó posztulátumokat vezetünk be. (L-et és M-et a továbbiakban *modális operátoroknak* fogjuk nevezni.)

A kétértékű kijelentéskalkulus összetett kijelentéseinek logikai értékeit szabályozó posztulátumok általánosan ismertek. (Pl. $\sim p$ akkor és csak akkor igaz, ha p hamis; $p \,\&\, q$ akkor és csak akkor igaz, ha p is, q is igaz stb.) Az értékelési szabályok alapján bármely összetett kijelentés logikai értékét egyértelműen meghatározzák komponenseinek logikai értékei (és, természetesen, az összetétel módja). Egy összetett kijelentés szerkezetét kifejező *formula* egy *interpretációján* azt értjük, hogy a formula minden egyes változójához hozzárendelü nk egy logikai értéket (azaz minden egyes változóra megmondjuk, hogy milyenlogikai értékű kijelentést képvisel). A fentiek szerint ezzel a formulához is hozzárendelünk egy logikai értéket. Ha ez az érték az *igaz*, akkor azt mondjuk, hogy az interpretáció a szóban forgó formulát „igazzá teszi" vagy „kielégíti". Egy formulát *kielégíthetőnek* mondunk, ha van olyan interpretációja, amely „igazzá teszi"; ha ilyen interpretáció lehetetlen, akkor a formulát *kielégíthetetlennek* mondjuk. Egy formulát *érvényesnek* (vagy *logikai igazságnak)* tekintünk, ha negációja kielégíthetetlen. Ez, más szóval, azt jelenti, hogy egy formula akkor és csak akkor érvényes, ha minden interpretációja „igazzá teszi" (azaz ha nem lehet „hamis"-ra interpretálni).

Ez a logikai igazság *szemantikus* definíciója a kétértékű kijelentéslogikában. Ahhoz, hogy modális kijelentéslogikát kapjunk, ezt a definíciót kellene alkalmas módon kibővíteni úgy, hogy a modális műveletek (L és M alkalmazása) esetét is magában foglalja.

Etlső közelítésre úgy tűnhet, hogy hasonlóan kell eljárni, mint pl. a negáció értékének megállapításakor. (L is, M is *egytagú* operátor, mint a negáció.) Kérségtelen, hogy ha p hamis, akkor Lp is az (ami hamis, az nem lehet szükségszeűen igaz), és ha p igaz, akkor Mp is az (ami igaz, az lehetséges is). De mi lenne Lp értéke p igazsága esetén, és mi lenne Mp értéke p hamissága esetén? Abból, hogy p igaz, nem következik, hogy p szükségszerűen igaz (ha következne, akkor Lp nem jelentene többet, mint p), és abból, hogy p hamis, nem következik, hogy p lehetetlen (ha következne, akkor Mp nem jelentene kevesebbet, mint p), azaz hogy Mp hamis. Könnyen belátható, hogy ha Lp és Mp értékét p értéke egyértelműen meghatározná, akkor Lp azonossá válna az alábbi négy művelet valamelyikével:

$$p \supset p, \quad p \,\&\, \sim p, \quad \sim p, \quad p;$$

és hasonló sorsa lenne Mp-nek is. Ám teljesen világos, hogy e négy művelet egyike sem fejezi ki a „szükségszerű, hogy p", „lehetséges, hogy p" kijelentések egyikét sem. Ez az út tehát járhatatlan.

Ez a tény (ti. hogy Lp és Mp logikai értékét p értéke nem mindig határozza meg) volt a fő oka annak, hogy a modális logika hosszú ideig a logika leghomályosabb, legbizonytalanabb területe, úgyszólván *terra incognitája* volt. Az első komoly változást e téren a formális-deduktív módszer (vagy logisztikai módszer) „feltalálása" jelentette. Az új módszer bevonulását a logikába Russell és Whitehead *Principia Mathematica*-jának megjelenésével (1910)

datálhatjuk.[4] Pár évvel a *Principia* megjelenése után napvilágot látnak C. I. Lewis írásai, amelyekben a *Principia* módszerét alkalmazza egy modális kijelentéskalkulus megalapozására.

A formális-deduktív módszerben az „érvényesség" fogalma helyett a „bizonyíthatóság" (vagy „levezethetőség") fogalma áll a középpontban. A bizonyíthatóság definíciója a következő: Bizonyos formulákat *axiómáknak* tekintünk. Azt, hogy mely formulák számítanak axiómáknak, nem szemantikai, hanem *szintaktikai* kritériumokkal határozzuk meg: egy formula kizárólag szerkezeti felépítése alapján lehet axióma. (Pl. van olyan felépítés, amelyben axióma minden $p \supset (q \supset p)$ alakú formula, azaz minden olyan implikáció, amelynek utótagja is implikáció, és előtagja azonos utótagjának utótagjával.) Ezután rögzítünk bizonyos *átalakítási szabályokat*, amelyek egy vagy több formulából egy újabb formulát hoznak létre. E szabályok is szigorúan szintaktikai jellegűek: alkalmazhatóságuk csak szerkezeti kritériumoktól függ. (Pl. az ún. *leválasztási szabály* egy tetszőleges formulából és egy olyan implikációból, melynek előtagja az előbbi formula, előállítja az említett implikáció utótagját; tehát p-ből és $p \supset q$-ból q-t.) Formulák egy véges sorozatát *bizonyításnak* tekintjük, ha a sorozat minden tagja (a) vagy axióma, vagy (b) a sorozat megelőző tagjaiból valamely átalakítási szabály alkalmazásával keletkezik. Egy formulát *bizonyíthatónak* mondunk, ha van olyan bizonyítás, amelynek végső tagja a szóban forgó formula. (E definíció szerint minden axióma bizonyíthatónak számít, hiszen az az egytagú sorozat, amelynek egyetlen tagja egy axióma, egy bizonyítása ezen axiómának.)

Mint látjuk, egy formális-deduktív fölépítésű logikai kalkulusban a logika lényeges fogalma, az *igazság*, egyáltalán nem is szerepel. Egy ilyen kalkulus, önmagában tekintve, olyan, mint egy társasjáték, amelynek nagyon precíz és szigorú szabályai vannak ugyan, de e szabályoknak nincs semmi értelmük (tartalmi jelentésük). Világos, hogy egy ilyen kalkulus csak bizonyos feltételek mellett tekinthető logikai elméletnek. Mik lennének e feltételek?

Ahhoz, hogy egy formális-deduktív rendszert logikai rendszernek tekinthessünk, nyilvánvalóan elegendő, ha van olyan szemantikai elmélet (tehát olyan interpretáció-fogalom), amely szerint a rendszer minden bizonyítható formulája érvényes (azaz logikai igazság). Ha ezen felül a formális rendszerben minden olyan formula bizonyítható, amely a szemantikai elmélet szerint érvényes, akkor a rendszert *teljesnek* mondjuk (a szóban forgó szemantikai elméletre nézve).

Egy szemantikus logikai elmélet létrejötte általában hosszú és fáradságos logikai kutatómunka gyümölcse. Ma is számos olyan területe van a logikai kutatásoknak, amelyen még nem rendelkezünk kielégítő szemantikus elmélettel (pl. valószínűségi logika). Nyilvánvaló, hogy a szemantika hiánya nem lehet akadálya annak, hogy valami ideiglenes formában ne foglaljuk össze egy adott logikai terület már föltárt törvényeit.

Ilyen célra is hasznos lehet egy formális-deduktív rendszer, ha kellő mértéktartással alkalmazzuk. Egy formális-deduktív rendszert (legalábbis ideiglenesen) logikai rendszernek tekinthetünk, ha a rendszer formuláinak van olyan intuitív-szemléletes interpretációja, amely szerint az axiómák logikai szemlé-

[4] A formális deduktív módszer első logikai alkalmazója tulajdonképpen Arisztotelész volt. Azonban Arisztotelész e módszert csak a logika egy szűk területére alkalmazta (és természetesen távolról sem azzal a szigorúsággal és szimbolikus apparátussal, amely a módszer modern formáját jellemzi).

letünk alapján evidensen igazak, s az átalakítási szabályok, ismét csak logikai szemléletünk szerint, logikai igazságokból logikai igazságokat produkálnak.

Nem lévén alkalmas szemantikája, a modális logika modern fejlődése a formális-deduktív keretben vette kezdetét. Lewis úttörő munkásságát követően 1933-ban Kurt Gödel[5] a modális kijelentéskalkulus alábbi, viszonylag „természetes" deduktív fölépítését javasolta.

Induljunk ki a kétértékű kijelentéskalkulus egy (egyébként tetszőleges) deduktív rendszeréből, amelynek átalakítási szabályai között szerepel a (korábban példaként említett) leválasztási szabály. Terjesszük ki e rendszer axiómáit és szabályait *modális* (azaz modális operátorokat is tartalmazó) formulákra is, majd fűzzük hozzá a következő modális pótaxiómákat:

(M1) $Lp \supset p.$

(M2) $L(p \supset q) \supset (Lp \supset Lq)$;

(Ezekben p és q tetszőleges formulák.) Vegyük föl a következő modális átalakítási szabályt is:

(RL) Ha p bizonyítható, akkor Lp is az.

Végül egyezzünk meg abban, hogy Mp puszta rövidítése a $\sim L \sim p$ formulának.

Ez a bővítés logikai szemléletünk számára elfogadhatónak tűnik. (M1) azt mondja ki, hogy ami szükségszerűen igaz, az nem lehet hamis. (Itt és a továbbiakban is vegyük figyelembe, hogy a $p \supset q$ materiális implikáció, pontos jelentése szerint, azt fejezi ki, hogy p és $\sim q$ egyszerre nem igazak.) (M2) azt fejezi ki, hogy ha $p \supset q$ és p szükségszerűen igazak, akkor q is szükségszerűen igaz. Az (RL) szabály jelentéséhez vegyük figyelembe, hogy p bizonyíthatósága — ha rendszerünk korrekt — azt fejezi ki, hogy p logikai igazság. A logikai igazság pedig szükségszerűen igaz — és ez is logikai igazság. Így végül is, (RL) ennyit mond: ha p logikai igazság, akkor az is logikai igazság, hogy p logikai igazság. Végül Mp és $\sim L \sim p$ azonosítása is evidensnek tűnik: ami lehetséges, annak a negációja nem lehet szükségszerűen igaz.

1937-ben R. Feys,[6] 1951-ben pedig G. H. von Wright[7] mutatott be egy-egy modális kijelentéskalkulust. A későbbiek során kiderült, hogy a két kalkulus ekvivalens egymással és Gödel imént bemutatott rendszerével. (Két formális rendszert ekvivalensnek mondunk, ha a bizonyítható formulák osztálya a két rendszerben azonos, vagy legalábbis megfelelő fordítás után azonos.) A szóban forgó rendszert azóta **M** rendszernek (von Wright jelölése) vagy **T** rendszernek (Feys jelölése) nevezik. Mi a továbbiakban az **M** jelölést használjuk.

Lewis és Langford 1932-ben bemutatott modális kalkulusa[8], amelyet **S2**-vel jelölnek, az **M** rendszernél valamivel szűkebbnek bizonyult (mindaz, ami **S2**-ben bizonyítható, **M**-ben is bizonyítható, de fordítva nem).

[5] K. Gödel, „Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls", *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 4 (1933), 34—40.

[6] R. Feys, „Les logiques nouvelles des modalités", *Revue Neoscholastique de Philosophie* 40, (1937), 517—553.

[7] G. H. von Wright, *An Essay in Modal Logic*. Amsterdam 1951.

[8] C. I. Lewis and C. H. Langford, *Symbolic Logic*. 2nd ed. New York 1959.

1930-ban Oskar Becker[9] az ismétlődő modalitások redukálására vonatkozóan három „fakultatív" posztulátumot javasolt. Ezek a következők:

(B) $p \supset LMp$

(S4) $Lp \supset LLp.$

(S5) $MLp \supset Lp.$

Ha ezek valamelyikét hozzáfűzzük **M** bemutatott axiómarendszeréhez, egy-egy bővebb modális kijelentéskalkulust kapunk. Mindhárom posztulátum hatása abban nyilvánul meg, hogy bizonyos egymást követő modális jelek (*M* és *L*) közül néhány elhagyható. A részletekre itt nem térhetünk ki. A legradikálisabb az (S5) axióma: elfogadásával minden formula helyettesíthető egy olyannal, amelyben modális jel hatáskörében további modális jel már nem fordul elő.

A (B) axiómát Brouwer-axiómának nevezik.[10] Az **M** rendszerhez való adjungálása az ún. Brouwer-rendszert eredményezi, amit a továbbiakban **B**-vel jelölünk. (S4), ill. (S5) adjungálásával olyan rendszer keletkezik **M**-ből, amely ekvivalens Lewis és Langford S4, ill. **S5** jelölésű rendszerével. Természetes, hogy a **B**, **S4**, **S5** rendszerek mindegyike tartalmazza **M**-et. Bebizonyítható, hogy **S5** tartalmazza **B**-t és **S4**-et. (**B** és **S4** egyike sem tartalmazza a másikat.)

Ám azok a pótaxiómák, amelyek e rendszerekhez vezetnek, már korántsem olyan szemléletes igazságok, mint az **M** rendszer axiómái. Nem térhetünk ki a velük kapcsolatos filozófiai vitákra, csak, mintegy összegezésként, két megállapítást szűrhetünk le. Az egyik: a „szükségszerű" és a „lehetséges" kifejezések nemcsak a mindennapi szóhasználatban, de a filozófiában és a logikában is heterogén jelentésűek. Lehetséges, hogy az említett axiómák egyike vagy másika elfogadható e kifejezések egy meghatározott használata esetén, de elfogadhatatlan egy másik speciális használat számára. A másik, általánosan elfogadott megállapítás: az (S5) axióma (és vele együtt az **S5** rendszer) elfogadható, ha *Lp* azt jelenti, hogy *p* analitikus igazság. Valóban, ha *p* nem analitikus igazság (azaz $\sim Lp$ igaz), akkor ennek megállapítása csakis analitikus lehet (azaz $L \sim Lp$ is igaz); azaz $\sim Lp \supset L \sim Lp$ (analitikusan) igaz. Ebből kontrapozícióval következik $\sim L \sim Lp \supset Lp$, ami, tekintetbe véve, hogy $\sim L \sim = M$, éppen (S5)-öt adja.

1946-ban Ruth C. Barcan egy dolgozatával[11] vette kezdetét a modális predikátumlogika kidolgozása. A modális predikátumlogika formális-deduktív rendszeréhez (vagy rendszereihez) vezető természetes útnak látszik a kétértékű (elsőrendű) predikátumkalkulus egy formális rendszerének bővítése modális

[9] O. Becker, „Zur Logik der Modalitäten", *Jahrbuch für Philosophie und phänom. Forschung*, XI (1930), 497—548.

[10] Az elnevezés magyarázatához: L. E. J. Brouwer a matematika ún. intuicionista irányzatának vezéralakja. Az intuicionizmus, többek között, tagadja a kettős negáció törvényének általános érvényességét. Elfogadja $p \supset \sim \sim p$ helyességét, de elutasítja a fordított irányú implikációt: $\sim \sim p \supset p$-t. Egyesek ezt úgy értelmezik, hogy az intuicionista negáció nem szimpla tagadás, hanem a lehetetlenség kifejezése, tehát $\sim p$ helyett $\sim Mp$ (nem lehetséges, hogy p = lehetetlen, hogy p) volna a helyes jelölése. Helyettesítsünk, ennek megfelelően, $\sim$ helyére $\sim M$-et a fenti $p \supset \sim \sim p$ formulába. Ezzel a $p \supset \sim M \sim Mp$ formulához jutunk. Mivel $\sim M \sim = L$, az előbbit $p \supset LMp$ alakban írhatjuk. Ez éppen a Brouwer-axióma.

[11] R. C. Barcan, „A functional calculus of first order based on strict implication", *The Journal of Symbolic Logic*, **11** (1946), 1—16.

pótaxiómákkal és szabályokkal. Másképp: kombináljuk az **M**, **B**, **S4**, **S5** rendszereket (esetleg egyéb modális rendszereket is) a kétértékű predikátumkalkulussal. A gyakorlatban ezt az utat ki is próbálták, s eredményül számos elfogadhatatlan tételhez, „modális paradoxonhoz" jutottak. Ezekről később még részletesen szólunk. Mindenesetre, a modális predikátumkalkulusban az átfogó szemantikai elmélet hiánya sokkal súlyosabbá vált, mint a modális kijelentéslogikában.

2. A MODÁLIS SZEMANTIKA ALAPELVEI

A modális logika szemantikus elmélete 1960 körül kezdett kialakulni. Bár fejlődése ma még nem tekinthető befejezettnek, az alapelvek és a módszerek már teljesen világosak, s gyümölcsöző hatásuk máris rendkívüli módon megmutatkozott.

Mint annyiszor a tudomány történetében, most is egy régi eszme újraátgondolása és korszerűsítése vezetett eredményhez. Leibniztől származik a „tényigazság" és az „észigazság" ismert megkülönböztetése: a tényigazságok csak az aktuális világban, az észigazságok viszont minden lehetséges világban érvényesek. Ez a gondolat sugalmazza az alábbi modális szemantikát (egyelőre csak kijelentéslogikára korlátozva): Tekintsük a lehetséges szituációknak („világoknak") egy összességét, és tételezzük föl, hogy kijelentéseinknek minden szituációban van logikai értékük. *Lp*-t akkor és csak akkor tekintsük igaznak valamely szituációban, ha *p* igaz minden szituációban. (Egy-egy szituációban a kétértékű műveletek eredményeit ugyanúgy értékeljük, mint a klasszikus kétértékű logikában.)

Ez a modell az **S5** rendszert szentesítené, és éppen ezért túlságosan speciális. A modális logika általános szemantikájához úgy juthatnánk, ha ezt a modellt valahogyan általánosítanánk. Ez szükségessé teszi valamilyen változó faktor bevezetését.

A szituációk összessége, az eredeti leibnizi értelemben, teljesen homogén, struktúrálatlan. A leibnizi gondolat korszerű változatának fő jellemvonása a szituációk osztálya *strukturáltságának* föltételezése. (E strukturáltság speciális esete a teljes strukturálatlanság, az eredeti leibnizi modell.)A szituációk osztálya struktúrájának változtatásával más és más típusú modális logikára kaphatunk szemantikus modellt.

A szükséges strukturáltság fogalmához így juthatunk. A leibnizi modellben a *lehetséges* szituációk szerepelnek. Elképzelhető, hogy valami nagyon általános kritérium alapján két szituáció egyaránt lehetséges, de egy szűkebb kritérium alapján mégis összeférhetetlenek egymással. Ebben az esetben a lehetséges szituációk mindegyikéhez meg kell mondanunk, hogy melyek azok a szituációk, amelyek *az adott szituációval* összeegyeztethetők. Ez azt jelenti, hogy a szituációk osztályán értelmeznünk kell egy relációt, amelynek adott α és β szituációk közötti fönnállása azt fejezi ki, hogy α-val összeférhető β. Jelöljük ezt „$\alpha\ R\ \beta$"-val. E reláció megnevezésére különböző kifejezéseket használnak. Kripke posszibilitási relációnak[12], Hintikka alternatíva-relációnak nevezi. (Megfelelőleg „$\alpha\ R\ \beta$" kiolvasása, Kripke szerint: „β posszibilis α-hoz képest", Hintikka

[12] S. A. Kripke, „Semantical considerations on modal logic", *Acta Philosophica Fennica*, **16** (1963), 83—94.

szerint: „β egy alternatívája α-nak".) A továbbiakban Hintikka terminológiáját használjuk. Az így strukturált modellben Lp igaz egy α szituációban, ha p igaz α minden alternatívájában (tehát nem feltétlenül minden szituációban). A leibnizi modellben minden szituáció minden szituációnak alternatívája.

Az alapgondolat után lássuk a modális szemantika precíz értelmezését (kijelentéslogikára szorítkozva). Egy formula egy *interpretációján* azt értjük, hogy megadunk egy nem üres W osztályt (a lehetséges szituációk egy osztályát) és egy ezen értelmezett R relációt (az alternatíva-relációt), továbbá a formula minden változójához *minden szituációban* hozzárendelünk egy logikai értéket. Ezután a formula logikai értékét bármely szituációban kiszámíthatjuk a kétértékű értékelési szabályok és az alábbi kiegészítő szabály segítségével:

(L*) Lp akkor és csak akkor igaz egy α szituációban, ha p igaz α minden alternatívájában (azaz minden olyan β szituációban, amelyre $\alpha R \beta$ fennáll).

Egyébként e szabálynak következménye az alábbi[13]: (M*) Mp akkor és csak akkor igaz α-ban, ha p igaz α-nak legalább egy alternatívájában.

Ha egy formula egy adott interpretáció valamely szituációjában az *igaz* értéket veszi föl, akkor azt mondjuk, hogy ez az interpretáció *kielégíti* az adott formulát.

Adjunk meg most valamilyen F feltételt az eddig teljesen határozatlan R relációra. Ezután egy formulát *F-kielégíthetőnek* mondhatunk, ha van olyan interpretációja, amelyben R eleget tesz az F feltételnek, és amely kielégíti formulánkat; ha ilyen interpretáció lehetetlen, akkor formulánk *F-kielégíthetetlennek* számít. Végül egy formulát *F-érvényesnek* mondunk, ha negációja F-kielégíthetetlen. (Ebben az esetben formulánk igaz lesz minden olyan interpretációjának minden szituációjában, amely az F feltételnek eleget tesz.)

Milyen F feltételt kell előírnunk az alternatíva-relációra, hogy egy konkrét modális logikát kapjunk? Ezt szemantikai elemzés alapján kell eldöntenünk. Ha a szükségszerűség fogalmáról semmi mást nem kötünk ki, csak azt, hogy a szükségszerűség vonja maga után az igazságot (azaz hogy $Lp \supset p$ érvényes legyen), máris kapjuk azt a feltételt, hogy az alternatíva-relációnak *reflexívnek* kell lennie: minden α szituációra fönn kell állnia $\alpha R \alpha$-nak. (Szavakban: szükséges, hogy minden szituáció önmagának egy alternatívája legyen.) Ugyanis ha Lp igaz α-ban, akkor (L*) szerint p igaz α minden alternatívájában. De ez csak akkor foglalja magában azt, hogy p-nek α-ban is igaznak kell lennie, ha α alternatívája önmagának. Ha tehát R nem reflexív, akkor előfordulhat, hogy Lp igaz, de p hamis valamely szituációban (azaz $Lp \supset p$ hamis). Valóban, R reflexivitása elengedhetetlen.

Jelöljük a reflexivitás feltételét F_r-rel. Bebizonyították, hogy *az F_r-érvényes formulák osztálya azonos az* **M** *rendszerben bizonyítható formulák osztályával.* Ennek alapján F_r-érvényesség helyett **M**-érvényességet mondhatunk.

Ez az eredmény bizonyos szempontból nagyon meglepő. Hiszen a reflexivitás feltételének megállapításához csupán annyit használtunk föl, amennyit az (M1) axióma megkövetel. Nem is gondoltunk arra, hogy jó volna, ha az (M2) axióma és az (RL) szabály is szentesítve lenne szemantikus rendszerünkben; mégis, ez automatikusan bekövetkezett. A reflexivitás kikötése valóban nagyon minimális követelménynek látszik. Az ebből nyert eredmény alapján mértéktartóan reálisnak mondható az a megállapítás, hogy *az* **M** *rendszer a legszűkebb*

[13] Föltéve, hogy az $Mp = \sim L \sim p$ összefüggést elfogadjuk.

természetes modális kijelentéslogika.[14] Egyben némi magyarázatot találunk arra is, hogy három tudós, keresvén a „minimális" modális logikát, egymástól függetlenül épp ehhez a rendszerhez jutott el.

Ha olyan feltételt keresünk, amely biztosítja a (B) axióma érvényességét, akkor némi elemzés árán azt találjuk, hogy ki kell kötnünk R *szimmetriáját*, azaz azt, hogy ha α alternatívája β-nak, akkor β is alternatívája α-nak. A reflexivitás és a szimmetria kettős feltételét F_{rs}-sel jelölve, bizonyítható, hogy az F_{rs}-érvényes formulák halmaza azonos a **B** rendszerben bizonyítható formulák halmazával.

Hasonlóan (S4) érvényességéhez az szükséges, hogy R *tranzitív* legyen: $\alpha R \beta$ és $\beta R \gamma$ esetén $\alpha R \gamma$ is teljesüljön. (S5) érvényességéhez szükséges, hogy R *szimmetrikus és tranzitív* legyen. F_{rt}-vel, ill. F_{rst}-vel jelölve a reflexivitás és a tranzitivitás, ill. a reflexivitás, szimmetria és tranzitivitás feltételét nyerjük, hogy az F_{rt}-érvényes formulák osztálya azonos az **S4**-ben bizonyítható formulák osztályával, az F_{rst}-érvényes formulák osztálya pedig azonos az **S5**-ben bizonyítható formulák osztályával. Végül ha F_u-val jelöljük azt a feltételt, hogy R *univerzális* legyen abban az értelemben, hogy bármely szituáció bármely szituációnak alternatívája (tetszőleges α, β párra fönnálljon α R β), akkor az F_u-érvényes formulák osztálya megint csak az **S5**-ben bizonyítható formulák osztályával lesz azonos. A teljes strukturálatlanság ugyanazt adja, mint az F_{rst}- struktúra.[15]

Ezekből az eredményekből három fix pont kristályosodik ki.

(1) Bármilyen értelemben használjuk is a szükségszerűség fogalmat, ez mindig tartalmazza azt, hogy a szükségszerűség az adott szituáció minden lehetséges alternatívájában érvényre jut. A szükségszerűség sokrétű (logikai, természeti, társadalmi, morális stb.) fogalmának e legáltalánosabb tulajdonságát adekvát módon tükrözi modális szemantikánk (az (L*) szabályt is beleértve).

(2) A szükségszerűség legtöbb, de nem minden konkrét értelmezése tartalmazza azt, hogy a szükségszerű egyben aktuálisan-valóságos is.[16] Az aktuálist (vagy, ha úgy tetszik, a faktuálist) magában foglaló szükségszerűség legáltalánosabb természetes elmélete az **M** rendszer.

(3) A szükségszerűség speciális esete az *aléthikus* vagy *logikai* szükségszerűség. Ha egy p kijelentés szükségszerű igazságán azt értjük, hogy p analitikusan igaz, úgy ez azt jelenti, hogy p-nek kivétel nélkül minden elképzelhető szituációban igaznak kell lennie. E feltevés mellett minden szituáció minden szituációnak alternatívája. Következésképp az analitikus szükségszerűség logikai elmélete az **S5** rendszer.

Kevesebbet tudunk mondani a **B** és az **S4** rendszerekről. Sokan **S4**-et tartják az ideális aléthikus logikának (ekkor persze logikai szükségszerűségen nem a

[14] A teljes igazság kedvéért megemlítjük, hogy egy jóval bonyolultabb kiegészítő feltétel mellett a reflexivitás feltétele enyhíthető az ún. kvázireflexivitásra: ha α alternatívája valaminek, akkor önmagának is alternatívája. Ilyen fogásokkal lehet szemantikus modellt konstruálni pl. az **S2** rendszerre, amelyben sem (M2), sem (RL) nem érvényes, de (M1) persze érvényes. Az ilyen modelleket azonban méltán tekintik nem-természetes modelleknek. Ezekben a kielégíthetőség definícióját is módosítani kell.

[15] Ennek egyszerű matematikai magyarázata van, de ezzel itt nem foglalkozunk.

[16] Egy példa a kivételre: a normatív szükségszerűség. Erre cikkünk 6. pontjában visszatérünk.

puszta analiticitást értik). S. Halldén szerint[17] pl., ha p logikai szükségszerűségén azt értjük, hogy p nemcsak analitikus, hanem *bizonyítható is* egy rögzített formális-deduktív rendszerben, akkor **S4** lesz az adekvát aléthikus logika. Hintikka szerint[18] az adekvát rendszer valamivel gyöngébb lesz, mint **S4**. Ugyanis **S4**-ben érvényes az $L(Lp \supset p)$ formula, amely a fenti értelmezés szerint ezt jelentené: logikailag igaz, és egy adott formális-deduktív rendszerben bebizonyítható (ez a külső L jelentése!), hogy ha p logikailag igaz és bizonyítható az adott rendszerben (ez Lp jelentése), akkor p igaz. Ez azonban nem általánosan igaz, mert nem minden formális rendszerben bizonyítható be az, hogy hamis állítások nem bizonyíthatók be a rendszerben. Sőt, Gödel eredményeiből tudjuk, hogy egy „valamirevaló" formális rendszerben saját ellentmondástalansága nem bizonyítható (ha igaz). Hughes és Cresswell[19] szerint **S4** a korrekt aléthikus logika, ha Lp jelentése ez: „a matematikában nem-formálisan bizonyítható p". Mivel itt zárt rendszerről nincs szó, Hintikka előbbi kifogása elesik.

Hintikka szerint **S4** jól alkalmazható az *episztemikus* logikában: a tudás, ismeret, vélemény stb. logikájában. Nevezetesen: **S4** az *objektív tudás* logikája.[20] Jelentse most Lp azt, hogy „tudjuk, hogy p". Ekkor $Mp = \sim L \sim p$ jelentése ez: „nem tudjuk, hogy p hamis", azaz „tudásunkkal összeegyeztethető, hogy p". Az (M1) axióma ($Lp \supset p$) most ezt jelenti: „ha tudjuk, hogy p, akkor valóban p", ami azt fejezi ki, hogy tudásunk *objektív*, nem puszta vélemény. Az (S4) axióma ($Lp \supset LLp$) mostani jelentése: „ha tudjuk, hogy p, akkor tudjuk, hogy tudjuk, hogy p", tehát hogy tudásunk tudatos. Az objektív és tudatos tudás logikája tehát **S4**. Modális szemantikánkban az alternatíva fogalma most episztemikus alternatívát jelent. Egy adott — mondjuk az aktuális — szituáció episztemikus alternatívái olyan szituációk, melyekben minden objektív-tudatos ismeretünk változatlanul igaz, az ettől logikailag független kijelentések logikai értéke viszont tetszőleges lehet (tehát pl. igaz lehet minden, amiről nem tudjuk határozottan, hogy hamis). — A szubjektív tudás vagy vélemény logikája persze egy jóval gyöngébb rendszer, amelyben pl. még $Lp \supset p$ sem érvényes. — Megemlítjük, hogy **S4**-et alkalmazhatónak tartják a fizikai szükségszerűség kifejezésére is (ún. *kauzális* logika).

3. MODÁLIS PREDIKÁTUMLOGIKA

Áttérünk a modális predikátumkalkulus szemantikájának problémájára. A kétértékű (elsőrendű) predikátumkalkulusban egy formula egy interpretációján a következőt értjük. (a) Megadunk egy nem üres I osztályt (individuumtartományt vagy univerzumot). (b) A formulában szereplő predikátumváltozók mindegyikét mint I-n definált predikátumot specifikáljuk: ha F egy ilyen n-argumentumú predikátumváltozó ($n \geq 1$), akkor megadjuk, hogy $Fu_1 \ldots u_n$ mely I-beli $u_1, \ldots, u_n$ individuumokra igaz. (c) A formulában esetleg előforduló szabad individuumváltozókat azonosítjuk I bizonyos elemeivel. (d) A formulában esetleg előforduló kijelentésváltozók logikai értékét rögzítjük.

[17] S. Halldén, „A pragmatic approach to modal theory", *Acta Philosophica Fennica*, 16 (1963), 53—63.
[18] Hintikka, 82.
[19] G. E. Hughess and M. J. Cresswell, *An Introduction to Modal Logic*. London 1968, 80.
[20] Hintikka, 83—84.

Adott formulához egy interpretáció egyértelműen hozzárendeli az *igaz, hamis* logikai értékek valamelyikét; ezt az értéket az ismert értékelési szabályok segítségével (beleértve a kvantorokra és esetleg az azonosságpredikátumra vonatkozó szabályokat is) kiszámíthatjuk. Ezután a kielégíthetőség, érvényesség stb. definíciója hasonlóan alakul, mint a kijelentéslogikában.

Kézenfekvő, hogy a modális predikátumkalkulus szemantikája a modális kijelentéskalkulus szemantikájának és a kétértékű predikátumkalkulus szemantikájának valamilyen kombinációja. Egy formula egy interpretációja a modális predikátumkalkulusban a következő módon képzelhető el. (A) Megadjuk a szituációk W osztályát és a hozzá tartozó R alternatíva-relációt, mint a modális kijelentéskalkulusban. (B) Minden α szituációhoz hozzárendelünk egy I_α individuumtartományt. (C) Ezután minden egyes α szituációra alkalmazzuk a kétértékű predikátumkalkulusra vonatkozó fönti (b), (c), (d) előírásokat. Ezzel az interpretációt megadtuk. Adott interpretáció mellett, adott formula értékét egy α szituációban úgy számítjuk ki, hogy a nem-modális részek kiszámítására alkalmazzuk a kétértékű értékelési szabályokat, a modális Lp vagy Mp alakú részek kiszámítására pedig a modális (L*), (M*) szabályokat. Ezután a kielégíthetőséget és az érvényességet hasonlóan értelmezzük, mint a modális kijelentéslogika szemantikájában.

A most vázolt interpretáció-fogalom egy sor kérdést vet föl. Az első kérdés a (B) ponthoz kapcsolódik és a következő: Megengedhető-e, hogy különböző szituációkban különböző individuumtartományokat szerepeltessünk? Nem volna-e helyes előírni, hogy minden szituációban egyazon individuumtartomány szerepeljen?

Ha a modális predikátumlogika korábbi (a szemantikus vizsgálatok megkezdése előtt kialakult) formális-deduktív rendszereihez kívánunk szemantikus modelleket konstruálni (természetesen úgy, hogy a bizonyítható formulák a szemantika szerint érvényesek legyenek), akkor valóban elő kell írnunk legalább annyit, hogy $\alpha\ R\ \beta$ esetén I_β foglalja magában I_α-t. (Másképp: egy szituáció bármely alternatívájában létezzenek mindazon individuumok, amelyek a kiinduló szituációban léteznek.) Ennek következtében pl. az **S5** típusú interpretációkban (ahol R reflexív, szimmetrikus és tranzitív) egy szituáció összes alternatívái közös individuumtartománnyal rendelkeznének.

Hintikka véleménye szerint ilyen kikötéseket *általánosan* nem szabad tennünk. A modalitások egyes speciális értelmezései mellett esetleg szükségesek lehetnek az indivtiduumtartományokra vonatkozó kikötések. Egyes esetekben azonban, jelesen az *aléthikus* értelmezés esetében is, minden ilyen kikötés elfogadhatatlan eredményhez vezet.

Említettük már, hogy a formális-deduktív felépítésű modális predikátumkalkulusok bizonyos paradoxonokat produkáltak. Témánk megvilágítására idézünk most néhány ilyen paradoxont. Az egyik: Az **M** rendszerrel kombinált formális predikátumkalkulusban bizonyítható a következő formula:

$$(1) \qquad M\,(Ux)\,p \supset (Ux)\,Mp$$

(Itt „(Ux)" az x individuumváltozóra vonatkozó univerzális kvantifikáció jele.[21] Szavakban: ha lehetséges, hogy minden dolog p tulajdonságú legyen,

[21] Kissé szokatlan „U" használata az univerzális kvantor jelölésére, de nyomdatechnikailag mindenesetre kényelmes.

akkor minden egyes dolog potenciálisan-p-tulajdonságú.[22] De ez nyilvánvalóan elfogadhatatlan mint általános logikai elv. Gondoljunk el egy testületet — mondjuk egy iskola tanári karát —, melynek tagjai között jelenleg férfiak is, nők is vannak. Lehetséges, hogy valamikor (pl. a jövőben) e testület összetétele úgy módosul, hogy minden tagja nő lesz. De ebből nem következik, hogy e testület *jelenlegi* tagjainak volna lehetőségük arra, hogy nőkké váljanak; valószínű, hogy a testület férfi tagjaira a nővé-válás lehetőségét kizárhatjuk.

Az (1) formula szemantikus érvényességét illetően így okoskodhatunk. Tegyük föl, hogy egy interpretáció (1) előtagját, $M\,(Ux)\,p$-t igazzá teszi egy α szituációban. Akkor, az (M*) szabály szerint, $(Ux)\,p$ igaz lesz α-nak egy β alternatívájában. Ezt így jelölhetjük:

$$|\,(Ux)\,p\,|_{\beta} = i$$

(olv.: $(Ux)\,p$ logikai értéke β-ban *igaz*). Jelöljük $p\,(u/x)$-szel azt a formulát, amely úgy keletkezik p-ből, hogy az x változót az u individuummal helyettesítjük. Az univerzális kvantor jelentése szerint az előzőekből következik, hogy:

(2) $\quad I_{\beta}$ bármely u elemére $\qquad |\,p\,(u/x)\,|_{\beta} = i.$

Ha I_{β} *magában foglalja* I_{α}-t, akkor (2) és (M*) alapján

(3) $\quad$ minden I_{α}-beli u-ra $\qquad |\,Mp\,(u/x)\,|_{\alpha} = i$

is teljesül, amiből az univerzális kvantor jelentése alapján:

$$|\,(Ux)\,Mp\,|_{\alpha} = i$$

következik. Összegezve: abból, hogy $M\,(Ux)\,p$ igaz egy α szituációban, következik, hogy $(Ux)\,Mp$ is igaz α-ban, *föltéve, hogy elfogadjuk azt az elvet, hogy egy szituáció minden alternatívájának univerzuma magában foglalja a kiinduló szituáció univerzumát.* Mivel (1) elfogadhatatlan, ez az elv is elvetendő. Ekkor (2)-ből (3)-ra nem lehet következtetni, hiszen előfordulhat, hogy u eleme I_{α}-nak, de I_{β}-nak nem, és $p\,(u/x)$ hamis α minden olyan alternatívájában, amelynek univerzuma magában foglalja u-t.

Ha az idézett elv elvetésében csak ilyen ellenpéldákra tudnánk hivatkozni, akkor azt lehetne mondani, hogy szemantikus elméletünk nem áll elég szilárd alapokon, hiszen elképzelhető, hogy valamilyen később talált paradoxon miatt újra felül kell vizsgálni. Valójában az ellenpéldára semmi szükségünk nincs. Semmiféle „a priori" érv nem szól az ellen, hogy egy adott szituáció lehetséges alternatíváiban nem kell léteznie minden olyan individuumnak, amely az adott szituációban létezik. Mondjuk, azon aktuális szituációnak, hogy Görögországban ma katonai diktatúra van, egy lehetséges alternatívája egy demokratikus rezsim Görögországban. Miért kellene ebben az alternatí-

[22] A magyar nyelvben van egy kis határozatlanság a mondatra *(de dicto)* és a tulajdonságra *(de re)* alkalmazott modalitások kifejezésében. „Szükségszerű, hogy minden hattal osztható szám osztható hárommal" helyett néha ezt mondjuk: „Minden hattal osztható szám szükségszerűen osztható hárommal." Az utóbbi formában kétséges lehet, hogy a szükségszerűség a mondatra vagy pedig csak a „hárommal osztható" tulajdonságra vonatkozik-e. E kétértelműség elkerülését célozza, hogy itt (és a továbbiakban is) a tulajdonságra vonatkozó modalitásjelzőt („szükségszerűen", „potenciálisan") mindig kötőjellel kapcsoljuk a tulajdonsághoz.

vában minden olyan individuumnak léteznie, amely az aktuális szituációban szerepel? Miért zárná ki az alternatíva fogalma éppen az individuumtartományra vonatkozó alternatívákat? Világos, hogy ilyen kizáró kikötéseknek csak bizonyos speciális esetekben lehet létjogosultságuk.

A példáknak csak az a szerepük, hogy megmutassák a formális-deduktív módszer gyöngeségét (abban az esetben, amikor hiányzik a kielégítő szemantikai megalapozás). Ez a megjegyzés nem kíván kritika lenni a modális logika korábbi fejlődésével szemben. A tudomány vargabetűit ritkán lehet objektív kritikával illetni, és nemigen lehet elődeinknek szemrehányást tennünk azért, hogy nem voltak olyan okosak, mint kortársaink (magunkról nem beszélve). De lehet *tanulni* a tudomány történetének vargabetűiből. És a tanulság, az adott esetben, bizonyára a következő: A logikai igazság megközelítésének természetes útja, a logika minden területén, a tárgy szemantikájának kidolgozása. A szintaktikus vagy formális-deduktív fölépítésnek a tárgy szemantikájához kell igazodnia. Egy deduktív-formális logikai elmélet csak ideiglenes pótszer lehet a szemantikus elmélet helyett. E felfogás „harcos" hirdetője Hintikka.

De ha nem ragaszkodunk az individuumtartományok uniformitásához, akkor egy-egy interpretációban előfordulhat, hogy valamely formulának az egyik szituációban van, egy másikban pedig nincs logikai értéke, amint az előző példában is láttuk. Így előfordulhat, hogy egy p formula *nem hamis* α egyetlen alternatívájában sem, de az mégsem teljesül, hogy p igaz α minden alternatívájában (mert egyes alternatív szituációkban egyáltalán nincs logikai értéke). Így a „mindig igaz" és a „sohasem hamis" megszűnnek egymás szinonímái lenni: ami sohasem hamis, az még nem biztos, hogy mindig igaz (néha értelmetlen is lehet).

Ezzel egyben megszűnik Lp és $\sim M \sim p$ ekvivalenciája is, hiszen Lp (az (L*) szabály szerint) azt fejezi ki, hogy p „mindig igaz", $\sim M \sim p$ pedig (az (M*) szabály és a negáció értelme szerint) azt jelenti, hogy p „sohasem hamis". Hintikka, nem akarván feladni Lp és $\sim M \sim p$ ekvivalenciáját, az (L*) szabályt így gyöngíti:

(L^0) Lp akkor és csak akkor igaz egy α szituációban, ha p igaz α-ban, és nem hamis α egyetlen alternatívájában sem.

E módosítással már Lp nem azt jelenti, hogy p „mindig igaz", hanem csak azt, hogy p „sohasem hamis" (igaz minden olyan szituációban, amelyben értelmes). E módosítás után nem lesz érvényes az alábbi formula sem (itt „(Ex)" az x változóra vonatkozó egzisztenciális kvantor jele):

$$(Ex)\, Lp \supset L\, (Ex)\, p,$$

noha ez is bizonyíthatónak számít az **M** rendszerrel kombinált deduktív predikátumkalkulusban. Ez éppoly paradox jellegű, mint az (1) alatti, hiszen szavakban kifejezve ezt mondja: ha van olyan dolog, amely szükségszerűen-p-tulajdonságú, akkor szükségszerűen létezik p-tulajdonságú dolog. Hintikka a következő ellenpéldával cáfolja e formulát. „Föltehetjük, az érvelés kedvéért, hogy minden kerék szükségszerűen-kerek. Ám ennek alapján mégsem fogunk úgy következtetni, hogy mivel történetesen léteznek kerekek, a kerek tárgyak létezése a világnak szükségszerű és elkerülhetetlen sajátsága."[23]

[23] I. m. 61—62.

Lássunk egy másik paradoxont. Az **S5** rendszerrel kombinált deduktív predikátumkalkulusban bizonyítható a következő formula:

$$M\,(Ex)\,p \supset (Ex)\,Mp.$$

Szavakkal: Ha lehetséges, hogy létezzék p-tulajdonságú dolog, akkor van olyan dolog, amely potenciálisan-p-tulajdonságú. (Szöveges példával: Ha Amáliának lehetne gyermeke, akkor van valaki, aki potenciálisan-gyermeke Amáliának.) Ez a híres és sokat vitatott Barcan formula.[24] A „lehetséges" legtöbb értelmezése mellett ez is elfogadhatatlan. „Világos, hogy ami *létezhet*, az nem mindig létezik *ténylegesen;* a születésszabályozás nem logikai lehetetlenség", jegyzi meg szellemesen Hintikka.[25] Természetesen a Barcan formula is érvénytelen szemantikus rendszerünkben, hacsak elfogadjuk, hogy a különböző szituációk különböző individuumtartományokkal rendelkezhetnek.

4. AZ AZONOSSÁG PROBLÉMÁJA

A modális predikátumkalkulus másik nagy problémája az individuumok azonosságával kapcsolatos. Jelöljük, a hagyományos módon, „$a = b$"-vel azt, hogy a és b azonos individuumok. A kétértékű logikában általánosan elfogadott Leibniz elve az azonos individuumok *salva veritate* (igazságot megőrző) helyettesíthetőségéről:

(A*) Ha $a = b$, akkor bármely igaz állításban a-t b-vel vagy b-t a-val fölcserélve (néhány vagy minden előfordulásában), igaz állításhoz jutunk.

Ennek megfelelően a deduktív kétértékű logikai rendszerekben bizonyítható (és a megfelelő szemantikai elméletben érvényes) a következő formula:

$$(4) \qquad (\,(a = b)\,\&\,p) \supset p\,(b/a),$$

ahol p tetszőleges formula és $p\,(b/a)$ úgy keletkezik p-ből, hogy b-t teszünk a helyébe.

Hosszú és elkeseredett vitát váltott ki az a kérdés, hogy vajon ez az elv alkalmazható-e a modális logikában. A probléma érzékeltetése érdekében lássuk a következőket.

Nyilvánvaló, hogy „$a = a$" logikai igazság (deduktív rendszerekben többnyire axióma). Akkor az **M**, **B**, **S4**, **S5** rendszerek mindegyikében érvényes (RL) szabály szerint

$$(5) \qquad L\,(a = a)$$

bizonyítható formula. Elfogadva, hogy a kétértékű axiómák és szabályok a modális logikára is kiterjeszthetők, írjunk (4)-ben „p" helyére „$L\,(x = a)$"-t (ekkor „$p\,(b/a)$" helyébe „$L\,(x = b)$"-t kell írnunk):

$$(\,(a = b)\,\&\,L\,(x = a)\,) \supset L\,(x = b),$$

[24] Lásd a [11] lábjegyzetet.
[25] I. m. 66.

Ebből könnyen bizonyítható az

$$(\,(a = b)\,\&\,L\,(a = a)\,) \supset L\,(a = b)$$

formula, mely az előbbiből a határozatlan x-nek a-val való helyettesítésével keletkezik. Ez utóbbi pedig a megengedett szabályok segítségével átalakítható ebbe:

$$(6) \qquad L\,(a = a) \supset (\,(a = b) \supset L\,(a = b)).$$

A leválasztási szabályt az (5), (6) formulákra alkalmazva, kapjuk az

$$(7) \qquad (a = b) \supset L\,(a = b)$$

formulát, amely ezt mondja: *amik azonosak, azok szükségszerűen azonosak.*

Ha két individuum azonos, akkor az nem két individuum, hanem egy. Ezen az alapon (7) helyesnek tűnik. Ha a azonos b-vel, akkor (7) előtagja tulajdonképpen $a = a$, utótagja pedig $L\,(a = a)$. Ámde kijelentéseinkben (és az őket kifejező formulákban) természetesen nem maguk az individuumok szerepelnek, hanem az őket megnevező kifejezések: tulajdonnevek (pl. Duna, Jupiter) vagy terminusok (pl. „a kísérleti fizika tanszék vezetője", „a klub elnöke"), gyűjtőnéven: szinguláris terminusok. És mivel általában nincs 1—1 megfeleltetés a szinguláris terminusok és az individuális objektumok között, azért amennyiben (7)-ben a és b nem valóságos individuumok, hanem csupán individuumok nevei (szinguláris terminusok), úgy (7) elfogadhatatlan.

Lássunk egy sokat idézett példát. Jelentse a Nap-rendszerünk bolygóinak számát, b pedig a „9" természetes számot. Ezen interpretáció mellett (7) ezt mondja: „Ha a bolygók száma 9, akkor szükségszerű, hogy a bolygók száma 9." Mivel a bolygók száma valóban kilenc, ezek szerint a bolygók száma nem is lehetne más, mint kilenc. Ez a konklúzió azonban logikailag is, fizikailag is tarthatatlan.

Ezek szerint (4) elfogadhatatlan a modális logikában. A 3. pontban bevezetett modális szemantika szerint sem érvényes ez a formula. Figyeljük meg ugyanis a (C) kirovást. E szerint *minden egyes szituációra* alkalmaznunk kell (többek között) a kétértékű predikátumkalkulusra vonatkozó (c) előírást. Ez azt jelenti, hogy a formulánkban szereplő szabad individuumváltozókat (pl. a (4)-beli a-t és b-t) minden szituációban azonosítani kell a szituáció individuumtartományának bizonyos elemeivel. Mivel egyéb megszorítás nincs, megtehetjük azt, hogy az α szituációban a-t is, b-t is egy I_α-beli u-val azonosítjuk, egy másik β szituációban viszont a-t u-val, b-t pedig egy ettől különböző v-vel azonosítjuk. Így

$$|\,a = b\,|_\alpha = i, \qquad \text{de} \qquad |\,a = b\,|_\beta = h$$

lesz (ahol h a *hamis* logikai érték jele). Ha történetesen β egy alternatívája α-nak, akkor ezen interpretáció mellett

$$|\,L\,(a = b)\,|_\alpha = h$$

lesz, tehát pl. (7) értéke *hamis* lesz α-ban. Ennyi elég is annak illusztrálására, hogy szemantikánk szerint (4) nem érvényes.

Egy példa arra, hogy (4) az episztemikus logikában sem érvényes. Ha (4) érvényes volna, akkor helyes lenne az alábbi következtetés.

Premisszák: { *A város peremén* szerzője = a *Magad emésztő* . . . szerzője.
B. tudja, hogy *A város peremén* szerzője József Attila.

Konklúzió: B. tudja, hogy a *Magad emésztő* . . . szerzője József Attila.

Világos, hogy a premisszák igazságából nem következik a konklúzió igazsága. A premisszák igazságaival az is összefér, ha *B.* hírét sem hallotta a *Magad emésztő* . . . c. versnek.

Egészen általánosan: abból, hogy két terminus egy adott α szituációban ugyanarra az individuumra utal, egyáltalán nem következik, hogy a szóban forgó terminusok α egy alternatívájában is egyazon individuumra utalnak. Abból, hogy jelen szituációnkban

az Egyesült Államok elnöke = R. M. Nixon,

(szerencsére) nem következik, hogy e tényigazságnak más, alternatív szituációkban is fönn kell állnia.

Az itt bemutatott egyszerű szemantikai elvek helyett Hintikka eléggé bonyolult szemi-szemantikai feltételezésekkel szabályozza azt, hogy az azonosak milyen esetekben helyettesíthetők egymással. E feltételek persze mind következményei a korábban említett szemantikai elveknek. Hintikka bonyolult megfogalmazásai talán azt célozzák, hogy a szemantikai eredetű elveket közelebb hozza a formális-deduktív fölépítés metodikájához. Körülményes és sok magyarázatot igénylő megfogalmazásaik miatt Hintikka feltételeinek ismertetésétől eltekintünk.

5. EGZISZTENCIÁLIS ÉS UNICITÁSI ELŐFÖLTEVÉSEK

A kétértékű predikátumkalkulus deduktív rendszerében axióma vagy bizonyítható az alábbi formula:

(8) $$p\,(a/x) \supset (Ex)\,p.$$

Szavakban: ha p igaz a-ra, akkor van olyan individuum, amelyre p igaz. Hintikka szerint e formula a modális logikában nem érvényes. Ellenpéldája: Tegyük „p" helyébe a modális „$L\,(x = a)$" formulát. (Ekkor „$p\,(a/x)$" helyére „$L\,(a = a)$"-t kell írnunk.) A kapott formula:

9) $$L\,(a = a) \supset (Ex)\,L\,(x = a).$$

Tegyük föl, hogy az itt szereplő a jelentése: „az Egyesült Államok legközelebbi elnöke". Ekkor (9) előtagja azt mondja, hogy szükségképp a legközelebbi elnök azonos a legközelebbi elnökkel. „Az utótag azt mondja, hogy van valaki, aki szükségképp a legközelebbi elnök, vagyis akinek a megválasztása elkerülhetetlen. Ez pedig, a szükségszerűség bármely értelmes interpretációja mellett, hamis."[26] Hintikka egy másik interpretációt is említ (9)-re. Jelentse a a bolygók számát. Ezzel (9) így hangzik: Ha szükségszerű, hogy a bolygók száma azonos önmagával, akkor van olyan szám, amely szükségszerűen a bolygók száma.[27]

[26] Hintikka, 117.
[27] I. m. 118.

Még világosabb lesz, ha az (5) szerint érvényes előtagot leválasztjuk (9)-ből. A kapott $(Ex)\ L\ (x = a)$ formula, az iménti interpretáció szerint, lényegében azt mondja, hogy a bolygók száma determinált, s ez persze hamis.

Vegyük most (9) helyett a következő gyöngébb formulát:

$$(10) \qquad (a = a) \supset (Ex)\ (x = a).$$

Ez nem-modális, következésképp a kétértékű logikában érvényes ((8) alapján). De ha a helyébe „a jelenlegi francia király" terminust írjuk, abszurd eredményt kapunk. Az abszurditás még szembetűnőbb, ha leválasztjuk az érvényes „$(a = a)$" előtagot. A kapott (érvényes) „$(Ex)\ (x = a)$" formula, a mondott interpretáció mellett, azt állítja, hogy „létezik a jelenlegi francia király". Ez azonban ellentmond a tényeknek. Hogyan kerülhet egy logikai igazság összeütközésbe a tényekkel?

Hintikka külön cikket szentel a kérdésnek.[28] Megvilágítása szerint a kétértékű logikában van egy (többnyire elhallgatott) *egzisztenciális előföltevés*, amely szerint mindaz, amiről beszélünk, létezik. Pontosabban: a formuláinkban szereplő szabad individuumváltozók mindig létező objektumokra utalnak. E föltevés mellett sem (10), sem a belőle leválasztással keletkező „$(Ex)\ (x = a)$" nem lehet hamis, hiszen a egy létező individuumot jelent. (Ehhez igazodik szemantikánk (c) pontja is, amely szerint a-t azonosítanunk kell az individuumtartomány valamely elemével.) Ezek szerint a helyébe nem tehetünk olyan terminust, amelynek nincs referenciája, amely semmit sem nevez meg.

Hintikka elégedetlen ezzel az állapottal. Elfogadja azt az általános elvet, hogy a *kötött* individuumváltozók értékei csak létező (létezőnek elismert) individuumok lehetnek (vagyis hogy az individuumtartomány elemei mindig létező objektumok), de nem fogadja el azt, hogy a szabad változóknak is feltétlenül létező objektumokra kell vonatkozniok (tehát nem fogadja el azt a szemantikai elvet, hogy minden szabad változót azonosítanunk kell a tárgyalási univerzum valamely elemével). Másszóval: Hintikka szükségesnek tartja „üres" (referencia nélküli) szinguláris terminusok megengedését is formuláinkban (mint pl. „a jelenlegi francia király" előbbi példánkban). Természetesen ez azzal a körülménnyel jár együtt, hogy meg kell különböztetnünk az üres és a nem üres szinguláris terminusokat. Hintikka javasolja az „x létezik" predikátum bevezetését e célra. Ha az említett predikátumot $Q(x)$-szel jelöljük, akkor (8) helyett az alábbi formulát kell érvényesnek elismernünk:

$$(8^*) \qquad (p\ (a/x)\ \&\ Q\ (a)\ ) \supset (Ex)\ p.$$

Szavakban: ha p igaz a-ra, és a létezik, akkor van olyan individuum, amelyre p igaz. E korlátozó feltétellel már (9) és (10) nem lesznek érvényesek, s így a hamis egzisztenciális konklúziók elkerülhetők.

Ezután Hintikka megvizsgálja, hogy a $Q\ (x)$ létezési predikátumnak milyen szemantikai tulajdonságokkal kell rendelkeznie, s hogy szemantikai alapelveinket hogyan kell módosítani ahhoz, hogy az egzisztenciális előföltevéseket kiküszöböljük. Ennek során kimutatja, hogy minden szükséges szemantikai szempontból $Q\ (a)$ egyenértékű a $(Ex)\ (x = a)$ [vagy $(Ex)\ (a = x)$] formulával. Tehát nincs szükség külön létezési predikátumra, mert a mondott formula

[28] „Existential presuppositions and their elimination"; i. m. 23—44.

minden releváns vonatkozásban képes azt helyettesíteni. Így (8*) helyett végül is a következő érvényes formulát kapjuk:

$$(8^{**}) \qquad (p\,(a/x)\ \&\ (Ex)\,(x = a)\,) \supset (Ex)\,p.$$

Megfelelőleg az univerzális kvantorra vonatkozó szokásos $(Ux)\,p \supset p\,(a/x)$ axiómát a következő szigorúbb axiómával kell helyettesíteni:

$$(\,(Ux)\,p\ \&\ (Ex)\,(x = a)\,) \supset p\,(a/x).$$

Az egzisztenciális előföltevések kiküszöbölésére vonatkozó szemantikai módosítások[29] nem túlságosan komplikáltak. De kevésnek bizonyulnak *modális* célokra. Így a (9) alatti példa kijavításához nem lenne elegendő „$(Ex)\,(x = a)$" hozzáfűzése az előtaghoz, hiszen

$$(11) \qquad (L\,(a = a)\ \&\ (Ex)\,(x = a)\,) \supset (Ex)\,L\,(x = a)$$

is hamis, ha pl. a az USA legközelebbi elnökét jelenti. A szükséges kiegészítés most „$(Ex)\,(x = a)$" helyett „$(Ex)\,L\,(x = a)$" (ami az adott példát természetesen trivializálja). Bonyolultabb modális komponensek esetén még bonyolultabb kiegészítő feltételek szükségesek. Hintikka pontosan megfogalmazza őket,[30] de itt nem térünk ki a technikai részletekre. A Hintikka-féle feltételek rendszere olyan, hogy egyúttal a 4. pontban említett paradoxon-típusok elkerülését is biztosítja. Mint láttuk, azok a paradoxonok lényegében abból az előföltevésből fakadtak, hogy az individuumnevek referenciája, szituációktól függetlenül, egyértelmű. Az *egzisztenciális* előföltevés mint ezen *unicitási* föltevés speciális esete mutatkozik, legalábbis a Hintikka-féle beállításban.

A 3. pontban bemutatott modális szemantika, mint láttuk, unicitási előföltevést nem tartalmaz, de egzisztenciális előföltevést igen. E szemantika szerint sem (9), sem (11) nem érvényes, viszont az analóg szerkezetű *nem-modális* (10) formula érvényes. Ezekből az észrevételekből úgy tűnik, hogy az egzisztenciára vonatkozó előföltevés talán mégsem tekinthető úgy, mint az unicitási előföltevés speciális esete.

Ez a kérdés persze lényegtelen. Ami lényeges, az a következő: mit nyerünk és mit veszítünk az egzisztenciális előföltevés kiküszöbölésével?

A probléma kissé átfogóbb tárgyalása érdekében térjünk vissza az interpretáció (klasszikus-kétértékű) fogalmához. Egy formula egy interpretációja végül is nem jelent mást, mint (az I individuumtartomány megadása után) megadni a formulában levő összes szabad változó referenciáját (I-re vonatkoztatva). Ha, Hintikka útmutatása nyomán, megengedünk olyan interpretációkat is, amelyekben egyes szabad individuumváltozóknak nincs referenciájuk, akkor miért ne engedhetnénk meg olyan interpretációkat is, amelyekben egyes predikátumváltozóknak nincs referenciájuk?

[29] Nem adjuk itt a szükséges módosítások precíz megfogalmazását, mert azokhoz pontosan ismertetni kellene Hintikka szemi-szemantikai módszerét, s ez terjedelmes kitérőt jelentene. E helyett mindenütt arra törekszünk, hogy Hintikka eszméit lefordítsuk a cikkünkben kifejtett szemantikai koncepció nyelvére.

[30] „Existential presuppositions and uniqueness presuppositions"; i. m. 112—147. Lásd főleg 121—124.

Mit jelentene ez gyakorlatilag? Jelöljön F egy egyargumentumú predikátumváltozót. F referenciája nem más, mint I azon u elemeinek halmaza, amelyekre Fu igaz. Ez a halmaz lehet üres is, ekkor $(Ex)\ Fx$ értéke h. Ez tehát nem jelentheti F referenciájának hiányát. Így azt kell mondanunk, hogy F referenciájának hiánya nem jelenthet mást, mint azt, hogy $(Ex)\ Fx$ se nem igaz, se nem hamis. Azaz: F-nek akkor és csak akkor nincs referenciája, ha $(Ex)Fx$-nek *nincs logikai értéke.* (Vagy, ha úgy tetszik, egy *harmadik* logikai értéke van, amelyet talán „értelmetlen"-nek nevezhetnénk.) Hasonló feltételt kaphatunk többargumentumú predikátumváltozókra és kijelentésváltozókra is.

Összegezve, e sorok írójának véleménye szerint a referenciahiány általános logikai karakterizálójának a logikai érték hiányát (ill. az „értelmetlen" érték föllépését) kell tekinteni. Ebből adódik, hogy referenciátlan individuális terminust tartalmazó formulának soha sincs logikai értéke. Tehát, ha pl. a-nak nincs referenciája, akkor „$a=a$" *nem igaz,* hanem értelmetlen, és „$(Ex)\ (x=a)$" *nem hamis* (mint Hintikka javasolja), hanem ugyancsak értelmetlen.

Egy ilyen szemantika — amelynek eszméje a néhai A. N. Priortól[31] származik — egységes keretet nyújtana a referenciátlan változók logikai státuszának tárgyalására. Ha e szemantikában *logikailag igaz* formulákat keresünk (tehát olyanokat, amelyek *sohasem hamisak és sohasem értelmetlenek),* akkor csupán olyan formulákra gondolhatunk, amelyekben egyáltalán nincsenek szabad változók (hiszen egy szabad változó értelmetlenné teszi a formulát, mihelyst nincs referenciája). Így pl. logikai igazság lesz az, hogy '$(Ex)\ (x = x) \supset (Ex)\ (x = x)$', és ehhez hasonlókkal be is kell érnünk. De ha bevezetjük a *cáfolhatatlan* formula fogalmát — ezen értve azokat a formulákat, amelyeket nem lehet hamisra interpretálni —, akkor visszakapjuk a kétértékű logika *érvényes* formuláinak osztályát.[32] Ebből az eszmefuttatásból legalább annyi tanulságot levonhatunk, hogy a kétértékű logikában *érvényesnek* nevezett formulákat helyesebb volna szerényen csak *cáfolhatatlan* formuláknak nevezni.

Nézetem szerint egyéb tanulság is adódik. Nevezetesen az, hogy az egzisztenciális előföltevések kiküszöbölése fölösleges. Fölösleges, mert helyettesíthető azzal az — *amúgy is elengedhetetlen* — megállapítással, hogy egy szabad változót tartalmazó formula nem lehet igaz, ha valamely változójának nincs referenciája. Az egyetlen tényleges nyereség a Hintikka javasolta szemantikában az, hogy benne kifejezhető az individuumnevek referenciájának megléte ('$(Ex)\ (x = a)$' segítségével), ill. hiánya (az előbbi negációjával). A veszteség viszont az elmélet nehézkessége.

Az egzisztenciális előföltevések problémája egyébként megkerülhető, ha csak zárt formulákra korlátozódunk, vagyis olyanokra, amelyek szabad individuumváltozókat nem tartalmaznak. E korlátozással természetesen az unicitási probléma is elesik. Egyes szerzők (pl. Kripke is) ezt a radikális fogást alkalmazzák a modális logikában.

A zárt formulák különben komoly gondot okoznak Hintikka „előföltevésmentes" szemantikájában. Nevezetesen, nem lehet tagadni olyan formulák érvényességét, mint pl. (4) univerzális lezártja:

$$(4^*) \qquad (Ux)(Uy)\ (((x = y)\ \&\ p) \supset p(y/x)).$$

[31] Lásd pl. A. N. Prior, *Time and Modality,* Oxford 1957, Ch. V.

[32] Ha üres univerzumot is megengedünk, akkor annyi eltérés lesz, hogy '$(Ex)\ (x = x)$' nem lesz *cáfolhatatlan,* noha a klasszikus kétértékű logikában (ahol az üres univerzum esete kizárt) *érvényes.*

A cikkünkben bemutatott modális szemantika szerint e formula érvényessége szinte ránézésre belátható (bármilyen bonyolult modális műveletek szerepeljenek is p-ben), hiszen x és y helyébe, bármely α szituációban, csak I_α elemeit szabad helyettesíteni (neveket, terminusokat, amelyek változtatják referenciájukat, itt nem kell figyelembe venni). Hintikka szemantikájában, a bonyolultan fogalmazott feltételek miatt, a bizonyítás igen terjedelmes.[33]

A csatlakozó kérdés elvi jelentőségű. W. O. Quine érvelése szerint[34] az azonos individuumok helyettesíthetőségének leibnizi elvét nem lehet tagadni, mert ez a döntő próbaköve annak, hogy helyes fogalmunk van-e *az individuumról*. Quine a leibnizi elvet mindig a zárt (4*) alakban fogalmazta meg. Hintikka korábbi cikkeiben elutasította nemcsak (4)-et, de (4*)-ot is. Később, a kritika hatására, úgy módosította szemantikáját, hogy (4*) már érvényesnek számít. Jelen könyvében Hintikka elvileg helyesen oldja meg a problémát: a *valódi individuumokra* fenntartás nélkül érvényes a leibnizi elv, szinguláris terminusokra azonban csak nem-modális kontextusokban áll korlátlanul.Ez így helyes. Amit bírálni lehet, az az, hogy ez nem a szemantika kiindulópontja, hanem csupán bebizonyítható, hogy a javított szemantikával nem ellenkezik.

Még egyszer visszatérve az individuális terminusok referenciájának problémájára, hadd említsük meg azt az ismert fogást, amellyel a probléma méregfoga kihúzható. E fogás az individuális terminusok teljes kiküszöbölése ún. leíró predikátumok segítségével. E szerint konstruálni kell olyan egyargumentumú predikátumot, melynek terjedelmébe legföljebb egy individuum tartozik, és amely tartalmazza a kiküszöbölendő szinguláris terminus referenciáját (ha van neki). Ezután bármilyen állítást a szóban forgó individuális terminusról úgy formalizálunk, mint amely igaz arra az egyetlen individuumra, amelyre leíró predikátumunk igaz. Egy példával illusztrálva, formalizáljuk „a jelenlegi francia király kopasz" kijelentést. Vezessük be az F leíró predikátumot az

Fx: x a jelenlegi francia király

jelentéssel, és a K predikátumot a

Kx: x kopasz

jelentéssel. Azt, hogy „létezik a jelenlegi francia király", most „$(Ex)(x = a)$" helyett (ahol „a" az „a jelenlegi francia király" szinguláris terminus helyett áll) a

$$(Ex)(Fx \ \& \ (Uy)(Fy \supset (y = x)))$$

formulával fejezhetnénk ki, amely egyben azt is tartalmazza, hogy *csak egy* F tulajdonságú individuum, azaz csak egy francia király van. Természetesen ez a formula (kielégíthető, de) nem érvényes, és így máris elesik a nem-létező individuumok létezése bizonyithatóságának vádja. Példánkat befejezve, „a jelenlegi francia király kopasz" mondatot így formalizálhatjuk:

$$(Ex) \ (Fx \ \& \ Kx \ \& \ (Uy) \ (Fy \supset \ (y = x))).$$

Ha olyan interpretációt szerkesztünk, amelyben F az univerzum minden elemére hamis (annak megfelelően, hogy eredeti jelentése szerint F csak a jelenlegi francia királyra lehetne igaz, de ilyen nem létezik), akkor ez a formula is, az előbbi is, hamis lesz. — Analóg eljárással bármely összetett kijelentésből (lehet modális is) bármely szinguláris terminust kiküszöbölhetünk.[35]

[33] I. m. 130—132.

[34] Lásd pl. Quine, „Three grades of modal involvement", *Proceedings of XIth International Congress of Philosophy*, Brussels, Vol. 14, 65—81.

[35] Lásd pl. Quine, *A logika módszerei*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1968, 256—266.

De ha megtartjuk a szinguláris terminusokat, akkor sincs elég súlyos ok az egzisztenciális föltevések kiküszöbölésére. Ha mégis meg akarjuk ezt tenni, akkor viszont tegyük stílusosan, következetesen, *à la* Prior.

6. A DEONTIKUS LOGIKA SZEMANTIKÁJA

A szükségszerűség igen speciális esete a *normatív* szükségszerűség. Normák[36] valamilyen rendszere („kódexe") szerint szükségszerű az, amit a normák *kötelező* jelleggel előírnak, s lehetséges az, amit a normák *megengednek*. A „kötelező", „megengedett" fogalmakkal operáló modális logikát *deontikus* logikának nevezik.[37] A deontikus szükségszerűség és lehetőség kifejezésére rendszerint az O, P betűket használják (az aléthikus L, M helyett). Ha p egy kijelentés, akkor Op intuitív jelentése: „p-nek igaznak *kell* lennie (a normák szerint)"; Pp jelentése pedig: „*megengedett* (a normák szerint), hogy p igaz legyen". A tiltást P negációjával lehet kifejezni (hasonlóan ahhoz, ahogyan a lehetetlenség M negációjával kifejezhető). $\sim Pp$ helyett gyakran Fp-t írnak[38] (tehát F mint $\sim P$ rövidítése szerepel). O és P között nyilvánvalóan fennáll a $P = \sim O \sim$ kapcsolat ($M = \sim L \sim$ analógiájára): ami megengedett, annak negációja nem lehet kötelező.

Hintikka könyvének utolsó tanulmánya[39] foglalkozik a deontikus logikával. Megítélésünk szerint e cikk a deontikus logika számos, korábban sokat vitatott problémájára ad kielégítő megoldást.

Alkalmazható-e a modális szemantika *általános* koncepciója a deontikus logikában? Hintikka válasza határozott „igen". Az első probléma, ami ezzel kapcsolatban tisztázandó, a következő: Mit kell érteni a deontikus szemantikában egy adott szituáció egy alternatívája alatt? A választ e kérdésre már Kant megadta, a „Reich der Zwecke" fogalmának bevezetésénél. A „Reich der Zwecke" az az ideális világ, amelyben a normák mind teljesíttetnek. Megfelelőleg egy α szituáció deontikus alternatívája egy olyan β szituáció, amelyben mindaz, ami α-ban kötelezőként van előírva, megvalósult aktuális igazsággá válik. Egy ilyen β szituáció *deontikusan perfekt* (α-hoz viszonyítva).

Csak egy „apró" kiegészítés szükséges a kanti ideához. Kant szerint a deontikusan perfekt világ egyetlen entitás. A helyzet azonban az, hogy vannak morálisan közömbös aktusok is, olyanok, amelyeket a normák se nem tiltanak, se nem kötelesznek. Ha a p kijelentés egy ilyen aktus leírása, akkor egy deontikusan perfekt világban p lehet igaz is, hamis is. Következésképp a deontikusan perfekt világ unicitása nincs biztosítva. Ennélfogva egy α szituációnak több deontikus alternatívája is lehet. Ezen alternatívák mindegyikében igaz mindaz, ami α normái szerint kötelező, egy közömbös kijelentés értéke viszont lehet az egyik alternatívában igaz, a másikban pedig hamis. Ez a felfogás bizonyára eltérést jelent a morál kanti filozófiájától. De végül is nem Kant

[36] Normákon rendszerint erkölcsi vagy jogi normákat értenek. A most következő fejtegetések azonban minden megszorítás nélkül alkalmazhatók pl. műszaki-technikai normákra is.

[37] A görög „$\delta\varepsilon\omega$" (= „kötök, szükségelek"), ill. „$\delta\varepsilon\iota\nu$" (= kell, szükséges, illő, kötelező) igéből.

[38] O, P és F rendre az angol „obligatory" (= kötelező"), „permitted" (= „megengedett"), „forbidden" (= „tilos") szavak kezdőbetűi.

[39] „Deontic logic and its philosophical morals"; i. m. 184—214.

etikájához kívánunk modellt szerkeszteni, hanem tetszőleges normatív kódexhez. A normatív kódexek pedig általában megtűrnek indifferens aktusokat is.

A deontikus alternatíva fogalmának tisztázása után meg kell vizsgálnunk, hogy hogyan karakterizálható a deontikus alternatíva-reláció (az R reláció a deontikus logikában). Az aléthikus logikában a leggyöngébb és így a legáltalánosabb követelmény R reflexivitása volt. A deontikus logikában ez azt jelentené, hogy minden szituáció deontikus alternatívája önmagának, azaz deontikusan perfekt a benne kimondott normákhoz képest. Ez csak akkor teljesülne, ha a normatív előírásokat sohasem sértenék meg. Ezek alapján világos, hogy a deontikus logikában nem lehet általánosan megkövetelni R reflexivitását. Ezzel elkerüljük, hogy az $Op \supset p$ formula („ami kötelező, azt teljesítik") *érvényes* legyen: ha Op igaz α-ban, akkor ugyan p-nek igaznak kell lennie α minden deontikus alternatívájában, de α nem feltétlenül alternatívája önmagának, így tehát p-nek nem kell szükségképp igaznak lennie α-ban.

Tegyük föl most, hogy β egy deontikus alternatívája α-nak. Ez azt jelenti, hogy β deontikusan perfekt α-hoz képest: minden, ami α-ban kötelező, az β-ban teljesül. Kérdés, vajon β perfekt-e *önmagához viszonyítva*, azaz teljesülnek-e β-ban a β-beli normák? Praktikus megfontolások alapján Hintikka válasza az, hogy β-nak önmagához viszonyítva is perfektnek kell lennie. Megfontolásait a következő példával lehetne illusztrálni. Jelentse p azt, hogy 'B. állampolgár útlevelet vált', q pedig azt, hogy 'B. állampolgár külföldre utazik', és tegyük föl, hogy az aktuális α szituáció nem tartalmazza Op-t, de tartalmazza Pq-t (azaz, hogy B. nem köteles útlevelet váltani, de szabad külföldre utaznia). Akkor van az α szituációnak egy olyan (elképzelt vagy megvalósult) β alternatívája, amelyben q igaz (azaz amelyben B. állampolgár külföldre utazik). Természetesen ez a szituáció α-nak egy perfekt alternatívája, ami elsődlegesen azt jelenti, hogy B-nek az α-beli törvényeket be kell tartania ahhoz, hogy egyáltalán ebbe a szituációba kerülhessen, azaz hogy külföldre utazhasson. Tegyük föl, hogy ez a szituáció már *tartalmazza* Op-t (ami azt jelenti hogy ha B. valóban külföldre utazik, akkor köteles útlevelet váltani). Ha p hamis lenne β-ban (azaz ha B. útlevélváltás nélkül utazna külföldre), akkor aligha volna helyes azt mondani, hogy β deontikusan perfekt alternatívája α-nak (ahogyan a joggyakorlat az adott esetben nem is tekintené B.-t törvénytisztelő polgárnak). Ez tehát az érvelés a következő szemantikai elv mellett: *Ha β egy deontikus alternatívája α-nak, akkor β deontikus alternatívája önmagának is.* Tömören: $\alpha R \beta$ maga után vonja $\beta R \beta$-t. Bár a reflexivitás nem általános követelmény, bizonyos esetekben mégis követelmény, nevezetesen olyan szituációknak *kell* önmaguk alternatíváinak lenniök, amelyek valamely más szituációnak alternatívái. Ezt a követelményt úgy szokás megfogalmazni, hogy R legyen *balról kvázireflexív*.[40]

Az aléthikus szemantikában, ahol a reflexivitás kikötése általános, minden szituációnak van legalább egy alternatívája, ti. önmaga. Deontikus szemantikánkban ez nincs biztosítva. Márpedig ha egy szituációban egyáltalán vannak deontikus (normatív) igazságok, akkor kell, hogy legyen deontikus alternatívája a szóban forgó szituációnak (amelyben a normák teljesülnek). Ezért ki

[40] Ez a megfogalmazás Hintikka cikkében explicite nem szerepel. A [14] lábjegyzetben a kvázireflexivitás egy olyan esetéről van szó, amelyben $\alpha R \beta$ maga után vonja $\alpha R \alpha$-t. Ez *jobboldali* kvázireflexivitás.

kell mondanunk azt a szemantikai elvet is, hogy *minden szituációnak van deontikus alternatívája.*[41]

Legyen ismét β egy alternatívája α-nak, és γ egy alternatívája β-nak. Tegyük föl, hogy *Op* igaz α-ban. Ekkor *p*-nek igaznak kell lennie β-ban. De természetes követelmény, hogy a normáknak öröklődniök kell, azaz hogy *p*-nek nemcsak igaznak kell lennie β-ban, hanem normative kötelezőnek is, azaz hogy *Op*-nek igaznak kell lennie β-ban is. Ekkor azonban *p* igaz lesz γ-ban is, amely β-nak egy alternatívája. Ez azt jelenti, hogy α alternatíváinak alternatívái egyben α-nak is alternatívái. Következésképp a deontikus alternatíva-relációnak *tranzitívnak* kell lennie.[42]

Be lehet látni (bár itt elhagyjuk a további részleteket), hogy ennél több föltevésre nincs is szükség. Deontikus szemantikánk az általános modális szemantikának azon speciális esete, amelyben az *R* relációra a fenti három kikötés érvényes. (Az (L*), (M*) értékelési szabályok maradnak, csak *L* helyébe *O*-t, *M* helyébe pedig *P*-t kell gondolnunk.) Szemantikus elméletünkkel fölfegyverkezve, nekiláthatunk a deontika néhány problémájának elemzéséhez.

Hintikka megjegyzi, hogy a *P* operátor nem alkalmas az elidegeníthetetlen jogok kifejezésére.[43] Valóban, abból, hogy *Pp* igaz α-ban, nem következik, hogy *Pp* igaz α alternatíváiban is: a kötelezettségekkel ellentétben, a „jogok" nem öröklődnek át α-ról alternatíváira. Hintikka megoldatlanul hagyja e problémát, noha könnyű észrevenni, hogy *OPp* az adekvát kifejezője annak, hogy *p* elidegeníthetetlenül jogos. (Jelentse *p* azt, hogy „B. dolgozik". Akkor *Pp* jelentése az, hogy „B.-nek szabad dolgozni", míg *OPp* azt fejezi ki, hogy „kötelező az, hogy B.-nek szabad dolgoznia", azaz hogy B.-nek elidegeníthetetlen joga van a munkához.) Valóban, ha *OPp* igaz α-ban, akkor szemantikánk szerint *Pp* — sőt *OPp* is — igaz α minden deontikus alternatívájában.

Ebben a példában deontikus operátor hatáskörében további deontikus operátor fordult elő; a példa mutatja, hogy az ilyen formuláknak is van értelmük és jelentőségük.[44] A későbbiekben is találkozunk még ilyen példákkal.

Hintikka nagyon fontos észrevétele a *logikai és a deontikus implikáció megkülönböztetése.* Mint megmutatja, egy sor deontikus paradoxon forrása e két

[41] Hintikka ezt sem mondja ki explicite. Ez azzal függ össze, hogy az ő kvázi-szemantikai tárgyalása eléggé eltér a cikkünkben követett felépítéstől.

[42] Ez sem szerepel explicite Hintikka cikkében, noha feltételrendszeréből világosan kiolvasható.

[43] I. m. 188.

[44] A deontikus logika kiemelkedő úttörője, von Wright, kezdetben azon az álláspontón volt, hogy deontikus operátorokat csak *aktusokra* lehet alkalmazni, kijelentésekre nem. E felfogás szerint deontikus operátor hatáskörében nem szerepelhet további deontikus operátor. Von Wright felfogása első közelítésben nagyon meggyőző. Úgy gondolhatnánk, annak van értelme, hogy „dohányozni tilos", de mi értelme van annak, hogy „kötelező, hogy kétszer kettő négy"? (Ilyenféle megfontolások alapján korábbi cikkeiben e sorok írója is von Wright ezen régebbi álláspontjára helyezkedett.) Ez a beállítás azonban felületes, és a külső nyelvi forma megtévesztő voltának áldozata. *Op*-t (ahol *p* kijelentés) legföljebb a rövidség kedvéért olvashatjuk ki „kötelező, hogy p" alakban. A pontos értelmezés ez: „kötelező, hogy a *p* kijelentés leírta állapot bekövetkezzék". Pusztán aktusokkal csak olyan normákat lehet leírni, amelyek a tízparancsolatban szereplőkhöz hasonlítanak (ne ölj, ne lopj stb.). A legtöbb normatív előírás azonban nemcsak valamilyen aktusról szól, hanem személyi, tárgyi és egyéb feltételekről is, amelyeket néha csak nagyon bonyolult szerkezeti kijelentésekkel lehet leírni. A kötelezések finom szerkezetének leírásához tehát az aktusokra való szorítkozás nem elegendő. — A későbbiek során von Wright is feladta eredeti álláspontját (és, mint e cikk tanúsítja, e sorok írója is — ha szabad a két dolgot egy lapon említeni).

fogalom összekeverése. Azt, hogy p logikailag implikálja q-t, természetesen a $p \supset q$ formula fejezi ki. Azt, hogy p deontikusan implikálja q-t, Hintikka az $O(p \supset q)$ formulával definiálja.[45] A különbség érzékeltetésére lássuk a következő példát.

> Ha kötelesek vagyunk A-t megtenni, és A elvégzése esetén kötelesek vagyunk B-t is elvégezni, akkor kötelesek vagyunk B-t is megtenni.

Úgy tűnik, mintha ez egy lapos logikai igazság lenne. A mondat formalizált kifejezése a következő:

(12) $$(Op \& (p \supset Oq)) \supset Oq.$$

Ez, külső szerkezetét tekintve, egy (logikai) implikáció, melyet a kijelentéskalkulus szabályai szerint a következő alakra hozhatunk:

(13) $$\sim Oq \supset (Op \supset p)$$

Helyettesítsük q-t „p & $\sim p$"-vel. Könnyen belátható, hogy „$\sim O(p \& \sim p)$" érvényes (ugyanis ekvivalens P ($p \vee \sim p$)-vel). Ezért ha (12) és vele együtt (13) is logikai igazság volna, akkor a (13)-ból az imént említett helyettesítés, majd az érvényes előtag leválasztása után megmaradó

(14) $$Op \supset p$$

formula is logikai igazság lenne; ami azt jelentené, hogy ami kötelező, az teljesítve is van, azaz hogy egy deontikusan perfekt világban vagyunk. Következésképp (12) nem lehet logikai igazság általában, hanem csak egy deontikusan perfekt szituációban. De ez pontosan annyit jelent, hogy nem a (12) alatti *logikai* implikáció, hanem a neki megfelelő

(12*) $$O((Op \& (p \supset Oq)) \supset Oq)$$

deontikus implikáció érvényes. Másszóval: (12) *nem logikai igazság, hanem normatív követelmény.* Logikai igazság csupán az, hogy (12) normatív követelmény; s ezt fejezi ki (12*). Ugyanezt mondhatjuk (14)-re is; természetesen ez sem érvényes, de érvényes „$O(Op \supset p)$", ami pontosan azt fejezi ki, hogy egy deontikusan perfekt szituációban minden kötelezettségnek perfektuáltnak kell lennie.

Azt, hogy (12)-nek következménye (14), már rég észrevették, de korábban nem sikerült feltárni a paradoxon magvát, ti. hogy hogyan vezethet egy nyilvánvaló igazságnak tűnő állítás egy nyilvánvaló hamissághoz.

A hagyományos erkölcsfilozófiában nagy szerepet játszik az ún. „sollenkönnen" elv, magyarul, az „amit kell, azt lehet" elve. Az elv igazsága azt jelentené, hogy csak az lehet kötelező, ami megvalósítható. Az aléthikus és a deontikus logika kombinálásával ezt az elvet az

(15) $$Op \supset Mp$$

formulával fejezhetjük ki. Anélkül, hogy a két logika kombinált szemantikáját részletesen kidolgoznánk, beláthatjuk, hogy e formula nem logikai

[45] I. m. 191. Az itt szereplő materiális implikáció helyett persze lehetne valami szigorúbb implikációt is alkalmazni (mindkét esetben).

igazság. Ugyanis ha Op igaz α-ban, akkor p igaz α minden *deontikus* alternatívájában, de nem biztos, hogy p igaz α-nak valamely *aléthikus* alternatívájában, következésképp Mp hamis lehet α-ban. Ebben az okfejtésben lényeges szerepet játszik az, hogy α nem feltétlenül deontikus alternatívája önmagának. Ha az lenne, akkor Op α-beli igazsága elég lenne ahhoz, hogy p igaz legyen α-ban, amiből rögtön következnék Mp igaz volta α-ban (hiszen α *aléthikus* alternatívája önmagának). Ebből világos, hogy (15) igaz minden deontikusan perfekt világban, tehát hogy az

(15*) $$O(Op \supset Mp)$$

deontikus implikáció érvényes. Hasonló eredményre jutottunk, mint az előbbi példában. „Ami kötelező, az lehetséges" nem logikai, hanem normatív principium. (Az, hogy (15*) szemantikánk szerint érvényes, nem azt jelenti, hogy lehetetlent nem lehet követelni, hanem csak azt, hogy logikailag lehetetlen olyan deontikusan perfekt világ, amely az ilyen követeléssel konzisztens. Ez persze trivialitás, egyszerűen annyit mond, hogy a lehetetlent nem lehet realizálni. Így ebből az eredményből szemantikánk javára csupán annyi írható, hogy kifejezi, visszatükrözi ezt a trivialitást.) — Hintikka részletesen elemzi az „Ought from Is" problémát, a „kell"-nek a „van"-ból való levezethetőségének problémáját is, de ennek ismertetésétől már eltekintünk.

A deontikus logika egy másik nevezetes problémája a feltételes kötelezéssel kapcsolatos. A kérdés az, hogyan lehet helyesen formalizálni azt, hogy valamilyen aktus elvégzése esetén egy másik aktus kötelezővé válik. Két megoldás kínálkozik:

(16) $$O(p \supset q)$$

és

(17) $$p \supset Oq.$$

„Sok tinta folyt el már annak megvitatására, hogy melyik a jobb e két ábrázolás közül. És fölöslegesen folyt, mert elkerülhetetlennek tűnik számomra az a konklúzió, hogy a kötelezés köznapi fogalma a fenti két fordítás között (és talán még egyebek között is) lényegesen ingadozik" — írja Hintikka.[46]

Tehát nem az a kérdés, hogy melyik a jobb (16) és (17) közül, hanem az, hogy mit fejez ki az egyik, és mit a másik. Hintikka szerint a két formula közötti különbség analóg a deontikus és a logikai implikáció közötti különbséggel. (16) *prima facie* (látszólagos) kötelezést, (17) pedig *aktuális* vagy *abszolút* kötelezést fejez ki. Ha $O(p \supset q)$ igaz egy α szituációban, akkor α minden olyan alternatívájában, ahol p igaz, q-nak is igaznak kell lennie. De ez nem jelenti azt, hogy ha p is, $O(p \supset q)$ is igaz α-ban, akkor Oq is igaz α-ban.[47] Vagyis (16) csak látszólag kötelez q-ra p igazsága esetén. Egy példával illusztrálva, abból hogy

(18) Kötelező, hogy ha B. moziba megy, akkor B. jegyet vált

és

(19) B. moziba megy,

[46] I. m. 200.

[47] De ha Op és $O(p \subset q)$ igazak α-ban, akkor Oq is igaz.

nem következik, hogy

(20) Kötelező, hogy B. jegyet váltson.

Másszóval: attól, hogy egy aktuális világban (19) igaz, és a (18) kifejezte norma érvényes, nem fog keletkezni a szóban forgó világban egy (20)-nak megfelelő norma. Ez nem jelenti azt, hogy B. nem sérti meg a (18) normát, ha jegy nélkül megy moziba, csupán azt, hogy maga a (20) norma nem lép életbe azért, mert B. moziba megy. Ha viszont a

(21) Ha B. moziba megy, akkor kötelező, hogy B. jegyet váltson

kijelentés igaz, akkor a (20) norma életbe lép, mihelyt B. moziba megy. Általánosan, (17) azt fejezi ki, hogy ha p igazzá válik, életbelép egy kötelezés — tehát itt valóban *abszolút* kötelezésről van szó —, míg (16) maga egy norma, mely p és $\sim q$ morális összeférhetetlenségét fejezi ki. Még élesebbé tehetjük a különbséget, ha p-hez hozzágondoljuk mindazon feltételeket, amelyek (16)-ot, ill. (17)-et *érvényes* formulává teszik. (16) érvényessége csak annyit jelent, hogy egy olyan világban, ahol betartják a törvényeket, p és $\sim q$ egyszerre nem lehetnek igazak, míg (17) érvényessége azt fejezi ki, hogy p és $\sim O\,q$ (azaz $P \sim q$) logikai ellentmondás.

Az abszolút és a látszólagos kötelezés ugyancsak ismert fogalmak az erkölcsfilozófiából, és értelmezésük körül elég sok zavar keletkezett. „Egy logikus mulatságosnak találhatja, hogy egy fontos filozófiai distinkcióról megint kiderült, hogy műveletváltáson múlik, nevezetesen két különböző logikai művelet, esetünkben O és $\supset$, sorrendjén" — jegyzi meg némi iróniával Hintikka.[48]

A feltételes kötelezés körüli vitában az egyik legsúlyosabb érv volt (16) ellen, hogy az

(22) $$Fp \supset O(p \supset q) \qquad \text{és} \qquad Op \supset O(q \supset p)$$

formulák érvényesek (itt $Fp = O\sim p = \sim Pp$). Az első ezt mondja: ha p tilos, akkor p bármilyen q-ra kötelez; a második pedig ezt: ha p kötelező, akkor bármi kötelez p-re. Különösen az elsőt interpretálták szívesen úgy, hogy ez végül is olyanokat tartalmaz, hogy „ha lopsz, akkor köteles vagy gyilkolni is" — hiszen lopni tilos, és egy tilos aktus mindenre kötelez.

Ezek az interpretációk azonban szemantikailag helytelenek. A (22) alatti formula, helyesen értelmezve, ezt mondja: ha p tilos, akkor egy deontikusan perfekt világban $p\&\sim q$ nem lehet igaz — és ez helyes, hiszen már p önmagában sem lehet igaz. A második formula pedig azt állítja, hogy ha p kötelező, akkor egy deontikusan perfekt világban $q\&\sim p$ nem lehet igaz — és ez is helyes, hiszen már $\sim p$ sem lehet igaz. Ez az értelmezés azon alapszik, hogy a $p \supset q$ (ill. $q \supset p$) materiális implikációt — szabatos szemantikai jelentése alapján — úgy kezeljük, mint $p\&\sim q$ (ill. mint $q\&\sim p$) negációját. Ezek a „paradoxonok" tehát álparadoxonok.

Hasonló „álparadoxont" fedeztek fel a feltételes kötelezés (17) változatával szemben is. Az érvényes

$$\sim p \supset (p \supset Oq)$$

formulát így értelmezték: egy el nem végzett aktus elvégzése mindenre köte-

[48] I. m. 204—205.

lez. Noha a fenti formula csupán annyit mond, hogy $\sim p$, p és Oq együtt nem lehetnek igazak; és ez természetesen vitathatatlan, hiszen már $\sim p$ és p sem lehetnek egyszerre igazak.

Persze, ezekből az álparadoxonokból azért van annyi tanulság, hogy a materiális implikáció nagyon gyönge eszköz a valódi implikáció (a releváns logikai következményfogalom) megragadására. De ez a tanulság a modális logikától függetlenül is ismert.[49]

A deontikus logika legtöbb formális rendszerében, de a most bemutatott Hintikka-féle szemantikában is, $O(p \mathrm{v} \sim p)$ logikai igazságnak számít. Egyesek ezt kritikával illetik, mondván, hogy $p \mathrm{v} \sim p$ automatikusan teljesül, és nyilvánvaló, hogy semmiféle normatív kódex nem fog olyasmit előírni, hogy kötelező, teszem azt, szavazni vagy nem-szavazni. Még egy lépéssel tovább mehetünk el ezzel kapcsolatban. Legyen α egy tetszőleges szituáció, és p egy olyan kijelentés, amelynek α-ban van logikai értéke. Akkor p-nek van értéke α minden alternatívájában. Következésképp Pp és $P \sim p$ közül legalább az egyik igaz α-ban. Másszóval, minden α-beli kijelentés normatív státusza szabályozva van α-ban. Ez két felfogást tesz lehetővé. Az egyik lehetséges felfogás szerint minden interpretáció minden szituációja egy-egy normatív kódex leírása. A másik lehetséges felfogás az, hogy a szituációk tartalmaznak ugyan egy-egy normatív kódexet, de azt kiegészítik oly módon, hogy ha egy p kijelentés normatív státuszáról a kódex nem rendelkezik (nem tiltja, nem kötelezi, de explicite nem is engedélyezi), akkor arról az interpretáció rendelkezik. Mivel egy valóságos normatív kódex aligha írja elő $p \& \sim p$ vagy $p \mathrm{v} \sim p$ normatív státuszát, interpretációink viszont mindig előírják ($F(p \& \sim p)$, ill. $O(p \mathrm{v} \sim p)$ alakban), azért bizonyára a második felfogás a helyes. Mint mondottuk, egyes logikusok elégedetlenek ezzel az állapottal, és olyan deontikus logikát kívánnak, amelyben csak kontingens (sem nem érvényes, sem nem kielégíthetetlen) kijelentések lehetnek O hatáskörében. Nyitott kérdés, hogy ilyen deontikus logika szükséges-e és lehetséges-e (úgy, hogy elég hatékony legyen). Hintikka nem foglalkozik cikkében ezzel a kérdéssel, aminthogy egy másik fontos kérdést: a deontikus predikátumlogika problémáját sem érinti.

*

Cikkünkben nem foglalkoztunk minden témakörrel, amely Hintikka könyvében szerepel. Csak azokat a témákat ragadtuk ki, amelyek megítélésünk szerint a logika jelenlegi fejlődése szempontjából a legfontosabbak. E korlátozás ellenére, reméljük, sikerült helyes benyomást keltenünk a mű érdemeiről. A könyv sok értékes gondolatot vet föl, megfontolt alapossággal, s ezért sokat lehet tanulni belőle, még azokból a fejtegetésekből is, amelyek esetleg kritikai megjegyzéseket válthatnak ki az olvasóban. Melegen ajánljuk a könyvet mindazok figyelmébe, akik a logika *mai* problémái iránt — akár szakmai, akár filozófiai szempontból — érdeklődnek.

[49] E témára vonatkozóan lásd pl. Ruzsa Imre, „Az implikáció néhány problémájáról"; Magyar Filozófiai Szemle, XIV. (1970), 113—139.