

Az ítéletek közötti viszonyok vizsgálata matematikai logikai módszerekkel

G. HAVAS KATALIN

Ma már közismert, hogy matematikai módszerek alkalmazásával a modern formális logika olyan új eredményeket ért el, amelyekhez viszonyítva a hagyományos logika csak embrionális fejlettségi fokon állt. Legvilágosabban kimutatható ez a következtetések elméleténél: a hagyományos formális logikában tárgyalt valamennyi következtetési eljárás a modern logika eszközeivel egzaktabb módon igazolható, és ezek csak kis töredékét képezik a modern logikában igazolható eljárásoknak. Hasonló fejlődés tapasztalható az ítéletek elemzésénél is. A hagyományos logika által tárgyalt ítéletfajták szűk kereteit a modern formális logika szétfeszíti, és az egymástól igazságértékük szempontjából különböző kijelentések rendszeres elméletének lehetőségét teremti meg.

A következtetés- és az ítéletelmélet eddig említett kérdései a hagyományos logika olyan területei, amelyeknek matematikai módszerek alkalmazásával elért fejlődésére már több tanulmány, könyv rámutatott. Jelen munka az „ítéletek közötti viszonyok” hagyományos logikai fogalmát kívánja modern logikai módszerekkel vizsgálat alá venni. Úgy gondoljuk, nem szükséges telen ez a vizsgálat. Az embrió bizonyos sajátosságai csak a fejlett szervezet ismeretében érthetők meg, ugyanakkor az embrió vizsgálata hozzásegít a fejlett szervezet alaposabb megismeréséhez is. Az első probléma, amelyet vizsgálni kívánunk a következő: *Helyesen állapította-e meg a hagyományos logika az ítéletek között lehetséges viszonyokat?*

a) Az ítéletek közötti viszonyok

Az ítéletek közötti viszonyokon az ítéletek igazságértékei közötti viszonyokat értjük. A hagyományos logika az ítéletek közötti viszonyok vizsgálatánál az ítéleteket először is két csoportra osztotta: olyan ítéletekre, amelyek függetlenségi, és olyanokra, amelyek függőségi viszonyban vannak egymással.

Függetlenségi viszony áll fenn két ítélet között, ha az egyik ítélet igazsága (illetve tévéssége) a másik ítélet igazságát (tévésségét) nem határozza meg.¹

¹ Az ítéletek közötti viszonyok definiálásánál jelen dolgozatban az extenzionális logika keretei között maradunk. Az ítéletek közötti viszonyok vizsgálatánál az ítéletek konkrét tartalmától elvonatkoztatunk, és csupán az igazságértéküket vesszük figyelembe. E logikában pl. a „Minden holló fekete” igazsága független a „Van olyan holló, amely fehér” ítélet igazságától. Függetlenségi viszony áll fenn a „Ha ma a hét első napja van, akkor holnap kedd lesz” ítélet és a „Nem igaz az, hogy ma hétfő van vagy holnapután szerda lesz” ítéletek között is. A tartalmi összefüggés, amely ezen ítéletek között fennáll, az extenzionális logika számára közömbös.

Azaz A és B ítélet akkor van függetlenségi viszonyban egymással, ha igazságértékeik között a következő kapcsolatok mindegyike lehetséges:

1. táblázat

A	B
<i>i</i>	<i>i</i>
<i>i</i>	<i>t</i>
<i>t</i>	<i>i</i>
<i>t</i>	<i>t</i>

A függőségi viszony esetei a következők:

Azonossági viszony van két ítélet között, ha az egyik igazsága esetén a másik nem lehet téves, illetve tévessége esetén a másik igaz.

Alárendeltje egy ítélet egy másikkak, ha ez utóbbi tévessége esetén az előbbi nem lehet igaz.

Fölérendeltje egy ítélet egy másikkak, ha ez utóbbi igazsága esetén az előbbi nem lehet téves.

Ellentétesek azok az ítéletek, amelyek nem lehetnek együtt igazak, de lehetnek együtt tévesek.

Ellentmondóak azok, amelyek nem lehetnek együtt igazak és nem lehetnek együtt tévesek.

Alárendelt ellentétesek azok az ítéletek, amelyek nem lehetnek egyszerre tévesek.

Foglaljuk táblázatba milyen igazságkapcsolatok *nem állhatnak fenn* az egyes függőségi viszonyok esetében:

2. táblázat

Ítéletek közötti viszony	Nem lehetséges igazságérték-kapcsolatok	
	A	B
Ellentétes	<i>i</i>	<i>i</i>
Alárendelt ellentétes	<i>t</i>	<i>t</i>
Alárendelt	<i>i</i>	<i>t</i> (alárendelt)
Fölérendelt	<i>t</i>	<i>i</i> (fölérendelt)
Azonossági	<i>i</i> <i>t</i>	<i>t</i> <i>i</i>
Ellentmondási	<i>t</i> <i>i</i>	<i>t</i> <i>i</i>

E viszonyokat természetesen definiálhatjuk az ítéletek között lehetséges igazságérték-kapcsolatok megadásával is:

3. táblázat

Ítéletek közötti viszony	Lehetséges igazságérték-kapcsolatok	
	A	B
Ellentétes	i	t
	t	i
	t	t
Alárendelt ellentétes	i	i
	i	t
	t	i
Alárendelt (B ítélet az alárendelt)	i	i
	t	i
	t	t
Fölérendelt (B ítélet a fölérendelt)	i	i
	i	t
	t	t
Azonossági	i	i
	t	t
Ellentmondási	i	t
	t	i

Ezek után tegyük fel a következő kérdést: valóban csak az említett hat viszony létezik két ítélet között, illetve indokolt-e ezeknek az ítéletviszonyoknak a kiemelése a valóban lehetséges viszonyok közül?

Bármely ítéletviszony kifejezhető valamely ítéletkalkulusbeli formulával, azaz bármelyikhez megadható olyan ítéletformula, amely akkor veszi fel az igaz értéket, amikor az ítéletviszony fennáll, akkor téves, amikor az ítéletviszony nem áll fenn.

Lássunk egy példát. A és B ítélet között ellentétes viszony van, ha a két ítélet nem lehet egyidejűleg igaz. (Lásd 2. táblázat.) Mely ítéletekből összetett ítélet az, amely csak akkor téves, amikor az öt alkotó ítéletek igazak? Az $A \wedge B$ formájú ítélet. Tehát az ellentétes viszonyt leíró ítéletformula: $A \wedge B$. Az $A \wedge B$ formula ítéletekből összetett ítélet formalizálására szolgál. Ha A, B ítéletváltozók helyébe konkrét ítéleteket helyettesítünk, az $A \wedge B$ formulából *ítélet* lesz. Ha viszont az „A ellentéteségi viszonyban van B-vel”, ítéletben helyezzünk az A és a B helyébe konkrét ítéleteket, akkor már olyan ítéletet kapunk, amely metalogikai kijelentés, *ítélet az ítéletekről*. A változók helyébe állandók helyettesítésével létrejött — két különböző nyelvi szintű — ítélet között a kapcsolat a következő: Ha igaz az „A ellentéteségi viszonyban van B-vel” ítélet, akkor igaz az $A \wedge B$ ítélet is. De nem bármely $A \wedge B$ alakú ítélet igazságából következik, hogy „A ellentéteségi viszonyban van B-vel”. Így pl. a „Nem igaz az, hogy december nyári hónap és a rókák a madarak csoportjába tartoznak” ítélet igaz ítélet, ezzel szemben a „'December nyári hónap' ítélet ellentéteségi viszonyban van a 'rókák a madarak csoportjába tartoznak' ítélettel” már nem igaz ítélet. E között a két ítélet között függetlenségi viszony áll fenn, hiszen az egyik igazságának (vagy tévességének) ismeretéből nem állapítható meg a másik igazságértéke.

Az ítéletviszonyokat kifejező ítéletformulák a következők

4. táblázat

Ítéletviszony	Megfelelő ítéletformula
Ellentétes	$A \wedge B$
Alárendelt ellentétes	$A \vee B$
Alárendelt	$A \rightarrow B$
Fölérendelt	$B \rightarrow A$
Azonossági	$A \leftrightarrow B$
Ellentmondási	$A \leftrightarrow B$

Mint tudjuk, a kijelentéslogikában a két ítéletből logikai művelettel képezhető — különböző igazságmegoszlású — ítéletek száma tizenhat. Ezek közül valóban csak hat ír le „ítéletek közötti viszonyt”-t? Ha pedig nem, akkor miért csak az ezzel a hat ítélettel ábrázolható viszonyt emelte ki a hagyományos logika? A többi tíz ítéletformula vajon nem kifejezője-e a hagyományos logika által feltáratlan ítéletek közötti viszonyoknak?

Amikor az ítéletek közötti viszonyokat abból a szempontból definiáltuk, hogy a viszony fennállása esetén milyen igazságkapcsolat *nem lehetséges* közöttük, akkor találkoztunk olyan viszonyokkal, amelyek fennállása *egy* igazságkapcsolat (pl. A igaz és B igaz) lehetőségét zárja ki, és találkoztunk olyan viszonyokkal, ahol két igazságkapcsolat nem lehetséges (pl. A igaz és B igaz, A téves és B téves). Az egy hiányzó igazságérték-kapcsolat összes lehetséges variációi megtalálhatók a hagyományos logikában:

5. táblázat

Nem lehetséges igazság- érték-kapcsolatok	Ítéletek közötti viszony
$i - i$	Ellentétes
$t - t$	Alárendelt ellentétes
$i - t$	Alárendelt
$t - i$	Fölérendelt

Olyan viszonyt, amikor a négy lehetséges igazságkapcsolat közül kettő hiányzik, csak a következőket említettük:

6. táblázat

Nem lehetséges igazság- érték-kapcsolatok	Ítéletek közötti viszony
$i - t$ $t - i$	Azonossági
$i - i$ $t - t$	Ellentmondási

Hiányoznak tehát a következő lehetőségek:

7. táblázat

Nem lehetséges igazság- érték-kapcsolatok	Ítéletek közötti viszony
$t - i$ $t - t$	I.
$i - t$ $t - t$	II.
$i - t$ $i - i$	III.
$t - i$ $i - i$	IV.

Ezenkívül nem tárgyal a hagyományos logika egyetlen olyan ítéletviszonyt sem, amikor a négy lehetséges kapcsolat közül három hiányzik.

E tények magyarázatához közelebb kerülünk, ha a fenti, római számokkal jelzett viszonyokat leírjuk annak a megadásával is, hogy milyen igazságkapcsolatok állhatnak fenn közöttük:

8. táblázat

Lehetsége igazságérték- kapcsolatok	Ítéletek közötti viszony
$i - t$ $i - i$	I.
$t - i$ $i - i$	II.
$t - i$ $t - t$	III.
$i - t$ $t - t$	IV.

Ha végignézzük ezeket az eseteket, szembe tűnik, hogy itt az egyik ítélet mindig-igaz (azonosan igaz) vagy mindig-téves (azonosan téves). Ha mármost összehasonlítjuk ezeket a viszonyokat a hagyományos logikában tárgyalt ítéletviszonyokkal (lásd a 3. táblázatot), azt látjuk, hogy ott csak olyan viszonyokról van szó, ahol a két ítélet mindegyike felveheti az igaz és felveheti a téves értéket. A hagyományos logika az I., II., III., IV. viszonyokat azért nem tárgyalta, mert csak olyan függőségi viszonyokkal foglalkozott, amelyekben a két ítélet mindegyike lehet igaz és lehet téves is.

Vizsgáljuk meg azokat az eseteket, amikor A és B ítéletek lehetséges kapcsolatából három eset hiányzik. Ezekben az esetekben fennállhat:

9. táblázat

Lehetséges igazság- érték-kapcsolatok	Ítéletek közötti viszony
$i - i$	V.
$i - t$	VI.
$t - i$	VII.
$t - t$	VIII.

Ha összehasonlítjuk ezeket az eseteket a hagyományos logika által tárgyalt ítéletviszonyokkal, könnyen látható a különbség. Itt már olyan esetekről van szó, ahol *mindkét* ítélet csak egy adott értéket vehet fel, szemben a hagyományos logikai viszonyokkal, ahol A is és B is lehet igaz is, és téves is. Ezek a viszonyok nem arra a kérdésre adnak választ, hogy hogyan függ egy ítélet igaz, illetve téves volta valamely más ítélet igaz, illetve téves voltától. Ezek a viszonyok nem két ítélet lehetséges igazságértékei közötti viszonyok.

Milyen következtetéseket vonhatunk le az elmondottakból? A hagyományos logika megállapításai az ítéletek közötti viszonyokra vonatkozóan bizonyos definíció mellett helytállóak. *Ha az ítéletek közötti viszonyokon a két értéket egyaránt felvehető ítéletek igazságértékei közötti viszonyokat értjük, a hagyományos logika felosztása kimerítő volt, e viszonyok teljes terjedelmét feltárta.* Ha viszont az ítéletek közötti viszonyok fogalmát szélesebb terjedelemben használjuk (beleértve valamely ítélet viszonyát a mindig-igaz, illetve a mindig-téves ítéletekhez, valamint a mindig-igaz és a mindig-téves ítéletek egymás közötti viszonyait is), akkor a hagyományos logikai felosztás nem kielégítő. Fenti fejtegetések eredményeként tehát megmutatkozik az „ítéletek közötti viszonyok” fogalom szabatos definiálásának szükségessége, de egyben lehetősége is.

b) Két ítélet közötti viszony megállapításának módszere

A hagyományos logikai tankönyvek többsége az ítéletek közötti viszonyok vizsgálatát az ún. kategorikus ítéletek közötti viszonyokra redukálja. A modern logika lehetővé teszi, hogy általános módszert adjunk, mellyel ítéletekből összetett ítéletek esetében meg lehet állapítani, a közöttük fennálló viszonyt.

Többfajta eljárás lehetséges. Az egyik lehetőség táblázatos módszer alkalmazása. Induljunk ki egy példából. Arra vagyunk kíváncsiak, milyen viszony áll fenn a $p \vee q$ és a $p \rightarrow q$ ítélet között. Ennek eldöntésére először felírjuk a két ítélet igazságtáblázatát:

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow q$
i	i	i	i
i	t	i	t
t	i	i	i
t	t	t	i

Ezután megnézzük, melyek a lehetséges igazságkapcsolatok a két ítélet között. Ezek:

$$\begin{array}{l} i - i \\ i - t \\ t - i \end{array}$$

Hiányzik tehát a $t-t$ kapcsolat. Mivel egyszerre tévesek az alárendelt ellentétes ítéletek nem lehetnek, ezért kimondhatjuk: $p \vee q$ valamint $p \rightarrow q$ ítéletek között alárendelt ellentétes viszony áll fenn.

Ugyanezzel a módszerrel elvileg bármely két összetett ítélet közötti viszony megállapítható. Így pl. három ítéletből összetett ítéleteknél:

p	q	r	$(p \vee q) \rightarrow r$	$(p \leftrightarrow q) \wedge r$
i	i	i	i	i
i	i	t	t	t
i	t	i	i	t
i	t	t	t	t
t	i	i	i	t
t	i	t	t	t
t	t	i	i	i
t	t	t	i	t

A két összetett ítélet igazságértékei között lehetséges kapcsolatok:

$$\begin{array}{l} i - i \\ t - t \\ i - t \end{array}$$

Tehát a $(p \vee q) \rightarrow r$ alárendeltje a $(p \leftrightarrow q) \wedge r$ ítéletnek.
A táblázatos módszer alkalmazása a sok változót tartalmazó ítéleteknél igen nehézkes. Itt célravezetőbb, ha az ítéletformulákat teljes (kitüntetett) diszjunktív normálformára vezetjük. E formájukról leolvasható lesz az ítéletek közötti viszony.

Induljunk ki előző példáinkból:

$p \vee q$ teljes diszjunktív normálformája: $(p \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q)$

$p \rightarrow q$ teljes diszjunktív normálformája: $(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$.

E két teljes diszjunktív normálforma összehasonlításából látható, hogy a két formula együtt nem lehet téves, mivel együttesen tartalmazzák két változó mind a négy lehetséges konjunkciós kapcsolatát. De lehetnek együtt igazak, mivel $p \wedge q$, valamint $\bar{p} \wedge q$ mind a két formulában szerepel. Ezek a kritériumok szükséges és elégséges feltételei az alárendelt ellentétes viszony fennállásának.

Állapítsuk meg teljes diszjunktív normálformára vezetéssel a már emlí-

tett, három elemi ítéletből álló $(p \vee q) \rightarrow r$ és $(p \leftrightarrow q) \wedge r$ ítéletpár közötti viszonyt.

$$(p \vee q) \rightarrow r$$

$$(\overline{p \vee q}) \vee r$$

$$(\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee r$$

$$(p \vee q \vee r) \vee (p \wedge \overline{q} \wedge r) \vee (\overline{p} \wedge q \wedge r) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge r) \vee (p \wedge \overline{q} \wedge \overline{r})$$

$$(p \leftrightarrow q) \wedge r$$

$$(\overline{p} \vee q) \wedge (\overline{q} \vee p) \wedge r$$

$$(\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge r) \vee (\overline{p} \wedge p \wedge r) \vee (q \wedge \overline{q} \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge r)$$

A két ítélet diszjunktív normálalakjáról leolvashatók a következők:

A $(p \vee q) \rightarrow r$ teljes diszjunktív normálformájának öt diszjunktíós tagja van. Ezekből kettő képezi a $(p \leftrightarrow q) \wedge r$ teljes diszjunktív normálformáját. Tehát a $(p \leftrightarrow q) \wedge r$ igazsága esetén igaz a $(p \wedge q) \rightarrow r$ is. Ha téves a $(p \vee q) \rightarrow r$, akkor nem lehet igaz a $(p \leftrightarrow q) \wedge r$ sem. Így tehát $(p \leftrightarrow q) \wedge r$ fölérendeltje a $(p \vee q) \rightarrow r$ formulának.

Abban az esetben, ha olyan ítéletek viszonyát akarjuk megállapítani, amelyek nem egyenlő számú változót tartalmaznak, arra van szükség, hogy a kevesebb számú változót tartalmazó formulába bevigyük a hiányzó változókat. Erre a $p \vee (q \wedge \overline{q}) = p$ azonosság alkalmazásával mindig megvan a lehetőség. Vizsgáljunk meg egy ilyen esetet.

Pl. Milyen viszony van a $p \vee q$ és a $(p \vee q) \rightarrow r$ ítélet között? Először is alakítsuk át a $p \vee q$ ítéletet vele egyenértékű olyan ítéletté, amelynek alkotórésze az r ítélet is: $(p \vee q) = (p \vee q) \vee (r \wedge \overline{r})$. Most már megvizsgálhatjuk táblázatos formában a két ítélet közötti viszonyt.

p	q	r	$(p \vee q) \vee (r \wedge \overline{r})$	$(p \vee q) \rightarrow r$
i	i	i	i	i
i	i	t	i	t
i	t	i	i	i
i	t	t	i	t
t	i	i	i	i
t	i	t	i	t
t	t	i	t	i
t	t	t	t	i

A két ítélet igazságértékei között a következő kapcsolatokat találjuk:

$$i - i$$

$$i - t$$

$$t - i$$

Tehát a $p \vee q$ és a $(p \vee q) \rightarrow r$ ítélet között alarendelt ellentétes viszony áll fenn.

Ugyanez teljes diszjunktív normálformára vezetéssel:

$$(p \vee q) \rightarrow r$$

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \bar{q} \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge q \vee r) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{r})$$

$$(p \vee q) \vee (r \wedge \bar{r})$$

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \bar{r}) \vee (p \wedge \bar{q} \wedge r) \vee (p \wedge \bar{q} \wedge \bar{r}) \vee (\bar{p} \wedge q \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge q \wedge \bar{r})$$

Mivel a két formula tartalmazza három változó összes lehetséges kapcsolatait, és mivel tartalmaznak mind megegyező, mind különböző tagokat is, alarendelt ellentétes viszonyban állnak.

A példákon való bemutatás után kíséreljük meg összefoglalóan ismertetni, hogyan lehet az A és a B ítéletről² – amely ítéleteket olyan teljes diszjunktív normálformában fejeztük ki, amelyek tartalmazzák A és B összes változóit – megállapítani, hogy milyen viszonyban állnak egymással.

Függetlenségi viszony áll fenn A és B ítélet között, ha vannak megegyező tagjaik, van olyan tag, amely sem A -ban, sem B -ben nem szerepel, és van olyan, amelyik csak A -ban továbbá olyan, amely csak B -ben szerepel. Pl.

A	B
$p \wedge q$	$(p \vee q) \rightarrow r$
$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \bar{r})$	$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \bar{q} \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge q \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{r})$

Megegyező tag: $(p \wedge q \wedge r)$

Sem A -ban, sem B -ben nem szerepel: $(\bar{p} \wedge q \wedge \bar{r})$, $(p \wedge \bar{q} \wedge \bar{r})$

Csak A -ban szerepel: $(p \cap q \cap \bar{r})$

Csak B -ben szerepel: $(p \wedge \bar{q} \wedge r)$, $(\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r)$, $(\bar{p} \wedge q \wedge r)$, $(\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{r})$

Ellentétes viszony áll fenn A és B ítélet között, ha nincsenek megegyező diszjunktíós tagjaik, de diszjunktíós tagjaik összessége n számú változó esetén 2^n -nél kevesebb. Pl.

A	B
$p \wedge q$	$\bar{p} \vee \bar{q}$
	$\bar{p} \wedge \bar{q}$

Fölérendeltje A ítélet B ítéletnek, ha B tartalmazza ugyanazon diszjunktíós tagokat, amelyeket A , de tartalmaz olyan diszjunktíós tagokat is, amelyeket A nem tartalmaz. Pl.

A	B
$p \wedge q$	$p \leftrightarrow q$
	$(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$

² Sem A , sem B ítélet nem azonosan-igaz, nem azonosan-téves.

Alárendeltje A ítélet B ítéletnek, ha B ítélet A ítélet diszjunkciós tagjainak egy részét alkotja. Pl.

$$\begin{array}{c|c} A & B \\ p \wedge q & p \wedge q \wedge r \\ (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \bar{r}) & \end{array}$$

Alárendelt ellentétes viszony áll fenn A és B ítélet között, ha n változó esetén A és B diszjunkciós tagjai közösen 2^n variációt tartalmaznak, és van olyan diszjunkciós tag, amely A -ban is és B -ben is előfordul, továbbá olyan is, amely csak A -ban, illetve csak B -ben található meg. Pl.

$$\begin{array}{c|c} A & B \\ p \leftrightarrow q & \overline{p \wedge q} \\ (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) & (\bar{p} \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) \end{array}$$

Azonossági viszony áll fenn A és B ítélet között, ha minden diszjunkciós tagjuk megegyezik. Pl.

$$\begin{array}{c|c} A & B \\ p \leftrightarrow q & (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p) \\ (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) & (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) \end{array}$$

Ellentmondási viszony van A és B ítélet között, ha nem tartalmaznak közös diszjunkciós tagot, és diszjunkciós tagjaik összege n változó esetén egyenlő 2^n -nel. Pl.

$$\begin{array}{c|c} A & B \\ p \wedge q & \bar{p} \vee \bar{q} \\ & (\bar{p} \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) \end{array}$$

c) *Egy ítélethez más, vele különböző viszonyban álló ítéletek képzése*

A modern logika nemcsak arra ad lehetőséget, hogy matematikai számításokhoz hasonlóan kiszámításuk két ítélet viszonyát, hanem arra is, hogy egy ítélethez megkeressük a vele különböző logikai viszonyban levő ugyanazon változókból álló ítéleteket. Nézzük hogyan történhet ez.

Keressük meg pl. a $p \leftrightarrow q$ ítélettel különböző logikai viszonyban levő p, q változókból összetett ítéleteket:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & p \leftrightarrow q \\ & (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q) \end{array} \quad \text{ellentétes:}$$

1. $p \wedge \bar{q}$
2. $\bar{p} \wedge q$

(Ugyanis $(\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q)$, valamint $p \wedge \bar{q}$ nem lehetnek együtt igazak, de lehetnek egyszerre tévesek. Továbbá $(\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q)$ és $\bar{p} \wedge q$ nem lehet együtt igaz, de lehet együtt téves.)

II.

$$p \rightarrow q$$

$$(\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q)$$

alárendeltje:

1. $(\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q})$
2. $(\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge q)$

III.

$$p \leftrightarrow q$$

$$(\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q)$$

fölrendeltje:

1. $p \wedge q$
2. $\bar{p} \wedge \bar{q}$

(Ugyanis $(\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q)$ igaz $p \wedge q$ igazsága esetén. Továbbá $(\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q)$ igaz $\bar{p} \wedge \bar{q}$ igazsága esetén.)

IV.

$$p \leftrightarrow q$$

$$(\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q)$$

alárendelt ellentétes

1. $(p \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q)$
2. $(\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q)$

(Ugyanis a $(\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q)$ és a $(p \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q)$ formula nem lehet egyszerre téves, mivel együtt tartalmazzák két változó kapcsolatának összes variációs lehetőségeit. Viszont lehetnek együtt igazak, mivel tartalmaznak megegyező diszjunkciós tagokat. Ugyanez vonatkozik a $(\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q)$ és a $(\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q)$ formulapárra is.)

V.

$$p \leftrightarrow q$$

$$(\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q)$$

ellentmondó:

$$(p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q)$$

(Ugyanis ezek nem lehetnek együtt igazak, mivel nincs megegyező diszjunkciós tagjuk. Nem lehetnek együtt tévesek sem, mivel tartalmazzák két változó kapcsolatának összes variációs lehetőségeit.)

*

Ítéletek közötti viszony megállapítására szükség lehet a legkülönbözőbb logikai problémák megoldásánál. Csak egy alkalmazási területet említünk.

Szükségszerűen igaz zárótételre csak igaz premisszákból kiinduló deduktív következtetés vezethet. A gyakorlati életben azonban legtöbbször csak valamennyire valószínűen igaz kiinduló tételeink vannak. Ezek között olyanok is előfordulhatnak, amelyek igazsága összeegyeztethetetlen. E tételek rendszerezésében, a valószínűségi sorrend megállapításában segít az ítéletek közötti viszonyok feltárása. Lássunk egy példát. Verekedés történt. A nyomozás azt igyekszik megállapítani, hogy ki a verekedés kezdeményezője. A tanúk a következő vallomásokat teszik:

1. Károly megütötte Lajost.
2. Károly megütötte Lajost, és Lajos késsel támadt Károlyra.
3. Ha Lajos késsel támadt Károlyra, akkor Károly megütötte Lajost.
4. Ha Károly megütötte Lajost, akkor Lajos nem támadt késsel Károlyra.
5. Lajos késsel támadt Károlyra, de Károly nem ütötte meg Lajost.
6. Vagy Károly ütötte meg Lajost, vagy Lajos támadt késsel Károlyra (kizáró diszjunkció értelmében).

Milyen viszony van a fenti állítások között? Vannak-e közöttük összeegyeztethetetlenek (ellentmondók, illetve ellentétesek)? Mennyire valószínű Károly, és mennyire Lajos bűnössége?

Jelöljük az ítéleteket: K = Károly megütötte Lajost
 L = Lajos késsel támadt Károlyra

Az egyes tanúvallomások:

1. K
2. $K \wedge L$
3. $L \rightarrow K$
4. $K \rightarrow \bar{L}$
5. $L \wedge \bar{K}$
6. $K \vee L$

A formulák értéktáblázata:

	K	L	1 K	2 $K \wedge L$	3 $L \rightarrow K$	4 $K \rightarrow \bar{L}$	5 $L \vee \bar{K}$	6 $K \vee L$
I.	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>t</i>	<i>i</i>	<i>t</i>
II.	<i>i</i>	<i>t</i>	<i>i</i>	<i>t</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>t</i>	<i>i</i>
III.	<i>t</i>	<i>i</i>	<i>t</i>	<i>t</i>	<i>t</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>
IV.	<i>t</i>	<i>t</i>	<i>t</i>	<i>t</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>t</i>

Látható, hogy a hat állítás összeegyeztethetetlen. Nincs K -nak és L -nek olyan értékkapcsolata, amely mellett mind a hat állítás igaz. Válasszuk ki azt az esetet, amely a legtöbb igaz ítéletet tartalmazza. Tekintsük ezek igazságát valószínűbbnek. A legtöbb „i” a II. sorban van. Kiszűrve az ebben az esetben téves ítéleteket, megmaradnak a következők:

1 K	3 $L \rightarrow K$	4 $K \rightarrow \bar{L}$	6 $K \vee L$
<i>i</i>	<i>i</i>	<i>t</i>	<i>t</i>
<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>i</i>
<i>t</i>	<i>t</i>	<i>i</i>	<i>i</i>
<i>t</i>	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>t</i>

Milyen viszony van ezen ítéletek között? A táblázatról leolvashatók a következők:

K ítéletnek alárendeltje $L \rightarrow K$

$K \vee L$ ítéletnek alárendeltje a $K \rightarrow L$

Tehát K és $K \vee L$ ítélet a két legerősebb állítás. E két ítélet között függetlenségi viszony van. Feltételezve e két ítélet igazságát a modus ponendo tollens alapján levonható zárótétel:

K

$K \uparrow \bar{L}$

Tehát: L

Így a nyomozás Károly bűnösségét és Lajos ártatlanságát ($\bar{L}$ = Nem igaz az, hogy Lajos késsel támadt Károlyra) valószínűsíti.

АНАЛИЗ ОТНОШЕНИЙ МЕЖДУ ВЫСКАЗЫВАНИЯМ МЕТОДАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Каталин Г. Хаваш

В традиционных логиках рассмотрение соотношений высказываний обычно сводится до анализа соотношения категорических высказываний, изображаемого логическим квадратом. Недостает дефиниции понятия «соотношения высказываний», раскрытия его содержания, объема.

Соотношения между высказываниями — в экстенциональной логике — соотношения между истинными значениями высказываний. В работе дается ответ, во-первых, на вопрос о том, насколько правомерно раздробление объема понятия «отношений зависимости между высказываниями» на отношения тождественности, подчиненности, подчинения, противоположности, противоречия, подчиненности-противоположности. Используя средства современной логики, автор показывает, что если под соотношением высказываний понимать соотношение между такими высказываниями, которые могут принимать и истинное и ложное значение (что означает исключение круга тождественно истинных и тождественно ложных высказываний), то деление традиционной логики можно считать исчерпывающим, вскрывающим полный объем тех отношений, которые возможны как между простыми, так и между сложными высказываниями.

Вторая часть работы показывает современные логические методы установления отношений между сложными высказываниями (метод таблиц, использование совершенной нормальной дизъюнктивной формы). В работе формулируются правила, с помощью которых с совершенной нормальной дизъюнктивной формы высказываний может быть прочитано соотношение высказываний.

В третьей части работы дается метод, с помощью которого исходя из совершенной дизъюнктивной нормальной формы какого-либо высказывания можно найти высказывания, находящиеся с ним в отношении различия и содержащие не более тождественного числа переменных.

THE STUDY OF RELATIONS BETWEEN PROPOSITIONS BY METHODS OF MATHEMATICAL LOGIC

Katalin G. Havas

In treatises of traditional logic the analysis of relations between propositions is ordinarily limited to the discussion of relations between categorical propositions likely to be described by logical squares. The definition of the concept of „relations between propositions” is missing, so is the disclosure of its contents and scope.

The relations between propositions are in the extensional logic relations between truth-values of propositions. The paper answers first the question how far it is justified to divide the range of the concept „dependence relations between propositions” to rela-

tions of equivalence, subordination, superposition, opposition, contradiction and subordinate opposition. By availing himself of the methods of modern logic, the author proves that if we understand by relations between propositions relations between such propositions which can be both true and false (i. e. we exclude the group of valid and inconsistent propositions), then the subdivision of the traditional logic was exhaustive, for it disclosed the full range of those relations which are possible both between simple and compound propositions.

The second part of the paper presents modern methods of logic to define relations between compound propositions (tabular method, use of the perfecte full disjunctive normal form). It establishes the rules by which the relation between propositions can be read pout from the perfecte disjunctive normal form of propositions.

In the third part of the paper there is a method enabling us to find, starting from the perfecte disjunctive normal form of a proposition, propositions which are in different propositional relations with it and contain variables no more than the given proposition.