

A matematika néhány filozófiai kérdéséről

ALTRICHTER FERENC

I. Mi a matematika filozófiája

Korántsem merünk arra a feladatra vállalkozni, hogy a matematika és filozófia szerteágazó kapcsolatait, kölcsönös összefüggéseit részletesen elemezzük és bemutassuk. Dolgozatunkban e témakörnek csupán néhány, szerintünk központi jelentőségű kérdésére térünk ki.

Bevezetőül azt kívánjuk kimutatni, hogy léteznek a matematikával kapcsolatos olyan — filozófiai — kérdések, amelyek a matematika mint szaktudomány speciális módszereivel nem válaszolhatók meg (persze megoldásukhoz a matematikai módszerek és eredmények sokban hozzájárulhatnak).

A szaktudományos és a filozófiai problémák különbségét illusztráljuk egy példával a fizikából és filozófiájából. Az, hogy a testek miért és mekkora vége sebességgel esnek a földre, nyilvánvalóan szaktudományos kérdés; megválaszolásához a fizikus hivatkozni fog a tömegvonzás általános törvényére, megfigyeléseket, méréseket fog végezni stb., azaz a kérdés eldöntésének történetileg kialakult módszerét fogja használni. De az, hogy általában mi szükséges az események tudományos magyarázatához, vagy hogy általában milyen feltételei és milyen implikációi vannak a kísérletezésnek, vagy hogy — szélesebb körűen — mi a tudományos módszer, már nem a fizikai-szaktudományos, hanem a fizikai tudományra általában vonatkozó, azaz a filozófiai kérdések sorába tartozik. A filozófiai és a szaktudományos probléma hasonlóságát megtaláljuk a matematika esetében is. Arra a kérdésre például, hogy mi a nulla vagy az egy stb., a matematikus azt a teljesen kielégítő választ adja, hogy ezek természetes, racionális, valós számok. Az a kérdés azonban, hogy mik a számok, mik a matematikai objektumok, már túllépi a szaktudomány kompetenciáját; s az elfogadott filozófiai állásponttól függően — hogy csak néhány lehetőséget említsünk — a következő feleleteket kaphatjuk: a számok az anyagi valóság bizonyos tulajdonságainak igen bonyolult tudati visszatükröződései, bizonyos fogalmak tulajdonságai, a tudat öntevékenységének termékei stb. stb.

Amióta csak matematikai tudomány van, és amióta csak filozófiai reflexió tárgya, a matematika filozófiai vázát, központi problematikáját három olyan kérdés alkotja, amelyekre így vagy úgy, de a matematikával foglalkozó majdnem minden filozófia választ igyekszik adni. Ezek: a matematikai ismeretek jellegének és a matematikai megismerés sajátos módjának, a matematikai objektumok természetének, valamint a matematikai igazságnak és eldöntési módjának a kérdése. Az utóbbi problémával itt nem foglalkozunk, mivel részletes elemzése meghaladja dolgozatunk kereteit; az előbbi két kérdés enélkül is explikálható.

Első pillantásra úgy tűnik, hogy ezek a kérdések teljesen függetlenek a konkrét szaktudományos problémáktól, eredményektől, azaz vonatkozásukban a matematika szaktudományos tartalma lényegében invariáns vagy invariánssá tehető. Ez a függetlenség azonban csak viszonylagos, már csak azért is, hiszen szülőanyjuk éppen a matematika.

A matematika filozófiájának mint válaszrendszernek a matematika szaktudományos tartalmához való viszonya kettős: egyfelől a meglevő matematikát a próbakövéül használhatja, másfelől egy aktuális matematika kialakításának a programja lehet. A matematika filozófiájának a kérdései elsősorban világnézetiiek, mégpedig azért, mert megválaszolásuk — mint erre írásunk végén kitérünk majd — csakis a társadalmi összpraxis figyelembevételével lehetséges. A matematika minden filozófiájának alapját egy (többé-kevésbé jól megfogalmazott vagy csak implicit) *világnézet* alkotja, egy általános filozófiai koncepció, amelynek a matematikával kapcsolatos álláspont csupán csak része, de általában szervesen összefüggő része. Egy matematika-filozófiától tehát, éppen e — nyílt vagy burkolt — világnézeti alapja miatt megköveteljük a világnézeti elfogadhatóságot, azaz gyakorlatilag azt, hogy egy általános történelmi materialista világkép részeként adjon számot a matematika tudományáról.

Témánkat a polgári filozófia néhány tipikus koncepciója vonatkozó megoldási javaslatainak kritikai elemzése kapcsán fogjuk kifejteni, támaszkodva azokra az érvekre, amelyeket e koncepciók a filozófia története során egymás ellen felhoztak — vagy felhozhattak volna.

II. A polgári filozófia néhány megoldási javaslata

Előljáróban az ismereteknek a polgári filozófiák által bevezetett megkülönböztetéseire kell emlékeztetnünk. Az újkori racionalizmus gondolkodói az ismereteknek — a megfigyelésekhez való kétféle logikai viszonyuk alapján — két fajtáját különböztették meg (s bár hangsúlyozták, hogy ez a felosztás nem esik egybe az ismereteknek az eredetük, kialakulásuk szerinti felosztásával, a két felosztás elválaszthatatlan kapcsolata természetesen az ő rendszereikre is rányomta a bélyegét). Ismereteink egyik részének azokat a kijelentéseket tekintették, amelyeknek igazsága függ a megfigyeléseinktől, ezek kimenetelétől, eredményeitől, amelyeknek igazsága csak ezek után dönthető el — az ilyen ismeretek az a posterioriak. Ezek a kijelentések a környező valóságra, illetve egy szegmentumára vonatkoznak, vagy arra, ami a világban történik, vagy megfogalmazzák az eljövendő eseményekkel kapcsolatos várakozásainkat. Ilyen a posteriori ismereteket ad pl. a fizika, a biológia; ezek az állítások vagy szingulárisak (egyetlen vagy néhány megfigyelhető eseményt írnak le), vagy általánosak (s ekkor nagyon fontos hipotéziseket, sejtéseket fejeznek ki világunkról, s a további megfigyelésekkel vagy alátámasztjuk, vagy pedig elvetjük őket). Az ismeretek másik csoportjába azokat a kijelentéseket sorolták, amelyeknek igazsága a megfigyelésektől független; igazságuk eldöntéséhez megfigyelések, kísérletek nem szükségesek, és nem is lehetségesek. Ezek az ismeretek teljesen vagy részlegesen függetlenek minden lehetséges tapasztalattól, s igazságuk a „tisztá észből” eldönthető. Az ilyen ismereteket a prioriaknak, észigazságoknak (Leibniz) stb. nevezték, s példáikat általában a logikából és a matematikából vették.

Arra vonatkozóan, hogy az a priori kijelentések mit írnak le, vagy hogy egyáltalán leírásai-e valaminek, igen eltérő véleményekkel találkozhatunk.

A másik általános ismeretelméleti különbséget — az analitikus és a szintetikus ismeretek, kijelentések megkülönböztetését — a pszichológiába, pontosabban az ismeretpszichológiába ágyazva — Kant vezette be. Ezt a különbségtételt a filozófusok nagy része a kanti ismeretpszichológia gyors diszkreditálása után sem vetette el. Felismerve, hogy ez a különbség nem pszichológiai, hanem lingvisztikai, nyelvi síkra ültették át, s a Kantétól némiképp eltérő kritériumot adtak az analiticitás felismerésére. Mégpedig valahogy a következőképpen: egy állítás akkor és csak akkor analitikus, ha pusztán a megértése már elégséges az igazságának eldöntéséhez, pontosabban: ha igazsága következik a kijelentést reprezentáló mondat jeleinek jelentéséből. Szintetikus pedig egy állítás akkor, ha pusztán a megértése sosem elégséges az igazságának eldöntéséhez, illetve pontosabban: ha igazsága nem következik a megfelelő jelek jelentéséből, azaz ha nem analitikus. A szintetikus állítások a lingvisztikai interpretáció szerint fontos új ismereteket adnak, míg az analitikusak csak rögzítik azt a módot, ahogy az egyes szavakat vagy általában a nyelvet használjuk vagy szándékozunk használni. A szintetikus állítások mindig valamilyen extralingvisztikait foglalnak magukban, míg az analitikus állítások csak a nyelvhasználat adott módjára reflektálnak, elemzik bizonyos szavak jelentését vagy rögzítik bizonyos szimbólumok használatának és transzformációjának módját, de semmilyen nyelven kívüli tényállásra nem utalnak.¹

E kétféle felosztás formálisan négy egymástól különböző ismerettípust (analitikus a priori, analitikus a posteriori, szintetikus a priori, szintetikus a posteriori) engedne meg, egyiküket azonban az alkalmazott definíciók kizárják, mégpedig azt a kijelentést, amelynek igazsága a reprezentálására használt szimbólumok jelentéséből következne (azaz a nyelvhasználat valamilyen módjára reflektálna), de ugyanakkor csak extralingvisztikai tényezők (megfigyelések, kísérletek) bevonásával lenne eldönthető. Analitikusan a posteriori — ebben a polgári filozófia képviselői általában megegyeztek — semmit sem tudunk mondani, ilyen ismeretünk, ilyen tudásunk nincs; analitikusan csak a priori tudhatunk valamit, például azt, hogy minden csőrös emlős csőrös, vagy azt, hogy ha holnap derült lesz az ég, akkor holnap felhőtlen lesz az ég stb.²

A polgári filozófusok túlnyomó többsége azt a felfogást tette — pontosabban: teszi — magáévá, hogy a matematika — valamilyen értelemben — az emberi megismerés egy része, egy sajátos területe, hogy a matematikai kijelentések nem pseudoállítások, hanem igazak vagy hamisak lehetnek, hogy, bár nagyon sajátosan, de mégis valamilyen ismereteket, tudást közölnek. A matematikai és az egyéb tudományos kijelentések között érezhető

¹ Carnap nyomán különbséget tehetünk szintaktikai és szemantikai analiticitás között. Szintaktikailag analitikus egy kijelentés, ha igazsága következik a kijelentés reprezentálására használt mondat *logikai jeleinek* jelentéséből. Szemantikailag analitikus egy kijelentés, ha a megfelelő mondat *nem-logikai, deskriptív jeleinek* jelentéséből következik igazsága. Az analiticitás általános filozófiai diszkussziója szempontjából a kettő különbsége igen fontos. Meg kell jegyeznünk, hogy az analitikus és szintetikus különbsége nem abszolút, hanem csak relatív; egy kijelentés analitikus vagy szintetikus volta több tényezőtől függ, pl. az éppen aktuális szóhasználattól, a nyelvi rendszer történeti változásaitól stb.

² Az a priori ismeret lehetőségének problémájával a dolgozat végén foglalkozunk.

vagy világosan explikálható különbség nem az ismeret és nem-ismeret különbsége, hanem a tudás és a másféle tudás, az ismeret és a másféle ismeret differenciája. Egyesek szerint viszont a matematika semmiféle ismeretet nem tartalmazhat, nem kognitív tevékenység, hanem csupán intellektuális játék.

A továbbiakban először néhány olyan felfogást tekintünk át, amely elismeri a matematika ismeret és megismerés voltát, s attól függően, hogy milyen különbséget vél felfedezni matematika és kísérleti természettudomány között, a matematikát az említett ismerettípusok valamelyikébe sorolja be.

1. A matematikai ismeretek jellegéről

Azt, hogy a matematikai ismeretek minőségileg különböznek a tapasztalati ismeretektől, hogy a prioriak, nem pedig posterioriak, alapvetően annak kimutatásával igyekeztek bizonyítani, hogy a matematika *nem lehet* olyan tudomány, mint pl. a tapasztalatokra, a megfigyeléseink tanúbizonyságára építő fizika vagy biológia.

Az első részletes és összefüggő argumentáció Platóntól származik,³ s végighúzódik a matematika filozófiájának majdnem egész történetén. Platón szerint megfigyeléseink csak egy tökéletben világról nyújthatnak ugyancsak tökéletlen ismereteket. Így pl. csak többé-kevésbé egyeneseket, csak többé-kevésbé köröket tapasztalhatunk, nem pedig geometriai egyeneseket, köröket vagy számokat. A számok és a geometriai alakzatok ismerete — amellyel kétségen kívül rendelkezünk — tehát nem lehet tapasztalati, a posteriori, hanem csakis a tapasztalattól független, a priori.

Platón érvelése két szempontból is hibás. Először is, mint ahogy S. Barker egy ilyen szituáció elvi megrajzolásával, körülírásával kimutatta,⁴ elvileg nem lehetetlenek olyan észlelési szituációk, amelyek involválják geometriai fogalmak tiszta esetét, bár igaz, hogy ezek csak igen elemiek s csak bizonyos fajtájúak lehetnek. Továbbá, mondja Barker, abból, hogy a matematikai fogalmak adekvát „eseteit” a megfigyelhető világban nem is lehetne megtalálni, még nem következnek — *non sequitur* — a matematikai ismeretek a priori volta. Hiszen pl. a kísérleti természettudományokban, különösen a fizikában is szerepelnek olyan fogalmak — az ideális gázé, az anyagi ponté stb. —, amelyek, bár pontos eseteik szintén nem találhatók meg a megfigyeléseink során, mégsem függetlenek az aktuális megfigyelésektől; világos, hogy az ideális gázzal, az anyagi pontról szerzett minden ismeretünket megfigyelésekkel, tapasztalatokkal kaptuk,⁵ s noha e fogalmak tökéletes esetei nem találhatók meg a megfigyeléseink segítségével feltárt világban, empirikusan mégsem üresek. Ezt határozottan állíthatjuk, noha még nem tisztázódott teljesen a kísérleti természettudományok filozófiájában, hogy a hasonló — „idealizáló” — fogalmakat alkalmazó kijelentések hogyan, milyen módon tükrözik vissza „tökéletlen” világunkat.

³ Platón érvelésével és matematika-filozófiájával kapcsolatban vö. Wedberg, A.: *Plato's Philosophy of Mathematics*. Almquist and Nilsell, Stockholm 1955.

⁴ Barker, S.: *Philosophy of Mathematics*. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N. J. 1964. 27. o.

⁵ Barker úgy gondolja (id. mű 27–28. o.), hogy ennyi elégséges Platón érvének elvetéséhez. Platón azonban lehetségesnek és praktikusnak esetleg szükségesnek tart bizonyosféle megfigyelést vagy eszközökkel végzett szerkesztést, amely elősegítheti a matematikai igazságok felfedezését.

A második érv — amelyet teljes pontossággal az újkori racionalisták (főleg Descartes, Spinoza, Leibniz) dolgoztak ki — arra támaszkodik, hogy a matematikai ismeretek olyan tulajdonságokkal rendelkeznek, amilyenekkel az a posteriori szintetikus ismeretek nem rendelkezhetnek. Két fő sajátosságot emeltek ki: a matematikai tudás bizonyosságát (szükségyszerűségét) és általánosságát. Mert, mondták, míg a kísérleti természettudományok, a tapasztalattól függő ismeretek csak többé-kevésbé igazak, mindig megkérdőjelezhetők, bizonyosságuk mindig függ az aktuálisan meglévő megfigyelési evidenciától, tehát változik vagy változhat, addig a matematikai ismereteket szükségyszerűség jellemzi, legalábbis úgy tűnik, hogy nem lehet megkérdőjelezni őket. A kísérleti természettudományos ismeretek ugyanis mindig az adott mérési és megfigyelési lehetőségektől függően közelítően írják le a megfelelő valóság-szegmentumot, és mindig előfordulhat az, hogy találunk olyan eseteket, amelyekre eddig szerzett ismereteink nem vagy csak részlegesen igazak, az euklideszi geometriában viszont például minden létező vagy lehetséges háromszögről, függetlenül attól, hogy hány mérést végeztünk, vagy végeztünk-e egyáltalán mérést, tudjuk, hogy területe = alap szorozva a magasság felével. A tapasztalattól függő ismereteinknek megfigyeléseink, kísérleteink mindig csak valamilyen fokú alátámasztottságot, elhihetőséget vagy, modernebb terminológiával élve, konfirmáltsági fokot adhatnak, megfigyeléseinkből mindig csak valamilyen fokú bizonyosságot kapunk. A kísérleti természettudományos ismeretek valószínű volta — ami más összefüggésben, de már az Akadémia és a szkepticizmus filozófusai számára is bizonyos mértékig ismert volt, s amit a modern tudományfilozófia számára Ch. S. Peirce fedezett fel — kizárja azt, hogy matematikai ismereteink jellegüket tekintve megegyezzenek velük.

J. S. Mill argumentációja azonban megmutatta, hogy a vázolt különbség nem elégséges a matematika nem-tapasztalati jellegének, aprioritásának megállapításához. *Nem lehetetlen* ugyanis, mondja Mill, hogy a matematika bizonyos ismereteket adjon és egyben tapasztalati is legyen, *nem elgondolhatatlan*, hogy a matematikai tudás szükségyszerűsége csupáncsak látszólagos, és onnan származik, hogy kijelentéseit a tapasztalat jóval nagyobb mértékben konfirmálta, mint a többi tudományéit, azaz hogy a matematikai „hipotézisek”-nek összehasonlíthatatlanul több pozitív esetével találkozunk, mint negatívval. Az ilyen nagyfokú alátámasztottság hozta létre a szükségyszerű és a csak valószínű ismeret különbségének illúzióját, holott ilyen különbségről szó sincs; a különbség pusztán mennyiségi, és a konfirmáltsági fok fogalma segítségével precízen leírható.

A harmadik nagy érv szintén a racionalistáktól származik. Pontosabb megfogalmazását Kantnál találjuk, s logikailag precízzé a matematika filozófiájának néhány jelenkori irányzata tette — anélkül, hogy a lényegén változtatott volna. Az érvelés váza a következő: azt többé-kevésbé tudjuk, hogy legalábbis azt hisszük, hogy tudjuk, hogy a kísérleti természettudományok empírikus általánosításai, hipotézisei hogyan töltik be magyarázó és prediktív funkcióikat, s hogy a megfigyelések, kísérletek hogyan mondanak véleményt róluk, igazolva vagy cáfolva őket,⁶ Az ilyen általánosítások, hipo-

⁶ A kísérleti természettudományok filozófiájában sajnos még nem tisztázott, hogy mi a tényleges viszony megfigyelések és elméletek, tapasztalatok és tudományos hipotézisek között, hogy pl. melyek a konfirmáció logikai feltételei, illetve mikor cáfol

tézisek állandó megfigyelési, kísérleti kontrollja a tapasztalatra építő természettudománynak szükséges feltétele. Ha a matematikai ismeretek azonos jellegűek lennének az ilyen általánosításokkal, akkor a megfigyelések róluk is hasonlóképpen mondanának véleményt, s hasonlóképpen szükséges lenne az állandó megfigyelési kontroll is. A matematikai állításoknak azonban nincs megfigyelési kontrolljuk, mint Kant mondotta: lehetséges tapasztalat sem nem igazolhatja, sem nem cáfolhatja őket, tehát másféle, más fajta tudás, mint a „szisztematikus művészet vagy kísérleti doktrina” által kapható; azaz a priori ismeret.

Ahhoz, hogy egy kijelentés (bizonyos mérési pontosságon belül) kísérletileg kontrollálható legyen, az szükséges, hogy elvben ne legyen kizárva a neki ellentmondó megfigyelés lehetősége. Ahhoz, hogy egy kijelentés konfirmálható legyen, az szükséges, hogy elvben falszifikálható is legyen, ellenkező esetben ugyanis a konfirmációnak sem funkciója, sem jelentősége nincs. Amikor egy általános kijelentést, hipotézist kísérletileg akarunk vizsgálni, akkor mindig egyedi eseményekre kell konkretizálnunk, a hipotézisben kimondott tulajdonság, reláció fennállása vagy hiánya ugyanis csak egyedi eseteken mutatható ki. Ha most — C. G. Hempel nyomán⁷ — vesszünk egy matematikai kijelentést, konkretizáljuk, és ezen keresztül összevetjük a megfigyelésekkel, akkor az a furcsa kép tárul elénk, hogy a megfigyelések nem relevánsak vele kapcsolatban. Reprezentálja a vizsgálandó kijelentést pl. a következő mondat: $3 + 2 = 5$. Konkretizáljuk pl. úgy, hogy először három, majd melléje két mikrobát teszünk egy mikroszkóp tárgylemezére. Majd megfigyeljük, hány mikróba van összesen — tegyük fel, hogy hatot találunk. Ha kísérleti feltételeinket reprodukálva és ellenőrizve az eset megismétlődik, akkor erre reagálhatunk úgy, hogy vagy azt mondjuk, a megfigyelést végző személy nem tud számolni — ez a legtermészetesebb reakálási mód, vagy azt, hogy a mikrobák időközben osztódtak, vagy azt, hogy egy észrevétlenül megbujt a mikroszkópban, de úgy nem, hogy a $3 + 2 = 5$ igazságát vagy alkalmazhatósági körét kétségbevonjuk. A kudarc okát a megfigyelésekben, az aktuális körülményekben keressük, nem pedig aritmetikai állításunkban. Arról a megfigyelésünkről tehát, amelyről először azt hittük, hogy ítéletet mond aritmetikai állításunkról, hogy falszifikálhatja, kiderült, hogy ebben a vonatkozásban nem releváns, ugyanis függetlenül attól, hogy mit találunk a mikrobáknál, meg vagyunk győződve arról, hogy $3 + 2 = 5$. S mivel lehetséges megfigyelés nem cáfolhatja, ezért nem is igazolhatja aritmetikai állításunkat.

Ezt az érvet komolyan kell vennünk, hiszen a matematika vonatkozásában valóban nincs megfigyelési kontroll. De a matematika aprioritásának megállapításához ez nem elégséges, lehetséges ugyanis, hogy a matematika sui generis módon viszonyul a tapasztalatokhoz, és a megfigyelési kontroll lehe-

meg egy megfigyelés egy hipotézist. A konfirmáció ún. paradoxonai arra engednek következtetni, hogy extrémálisan nehéz, majdnem lehetetlen a konfirmáció egzakt feltételeit megfogalmazni. Nem tisztázott még az sem, hogy ténylegesen minden esetben össze lehet-e hasonlítani az egyedi állításokat a megfigyelésekkel; mint ismeretes, P. Duhem és W. V. O. Quine tagadják ennek lehetőségét. Csak annyit tudunk tehát, hogy a megfigyelések *valamilyen értelemben* lényegeseek a hipotézisek számára, de hogy *milyen értelemben*, azt pontosan nem tudjuk.

⁷ Hempel, C. G.: *On the Nature of Mathematical Truth. A Readings in the Philosophy of Science* c. kötetben. Ed. Feigl, H. — Brodbeck, M. New York 1953. 149. o.

tetlensége csupán azt bizonyítja, hogy van valami különbség a matematika tapasztalathoz való viszonya és a kísérleti természettudományok tapasztalathoz való viszonya között, csak annyit jelent, hogy a matematikai megismerés sajátos, a kísérleti természettudományossal nem azonosítható megismerésmód. A megfigyelési kontroll lehetetlensége tehát nem bizonyíthatja a matematika aprioritását.

Az áttekintett érvekről meg lehet állapítani, hogy a matematika aprioritásának bizonyításához nem elégségesek — a matematika a priori ismeretként való felfogása csupán előzetes filozófiai-világnézeti interpretáció. Most pedig tekintsük át részletesen a különböző konkrét megoldási javaslatokat és az ellenük szóló érveket.

a) *A matematika mint analitikus a priori*

A matematikai megismerés és ismeretek specifikumának értelmezésére irányuló egyik legnagyobb szabású koncepció a *logicizmus*, a *matematika logicista filozófiája*. Alapköveit Leibniz rakta le az általa észigazságoknak nevezett kijelentések értelmezésére tett kísérletében. Az észigazságok — Leibniz szerint — azért szükségszerűek, azért szükségképpen igazak, azaz igazak az összes lehetséges világokban, mert az ellentmondás elvén alapulnak: logikai tagadásuk önellentmondás. Vannak közöttük olyanok, amelyeknek az ellentmondás elvére alapozottságát minden további elemzés nélkül fel lehet ismerni; ilyen például a „minden kopasz ember kopasz” mondattal reprezentált kijelentés, hiszen olyan kopasz ember nem létezhet, aki nem kopasz — legalábbis, ha a szavakát a köznyelvben használt és elfogadott jelentésükben használjuk. Leibniz szerint, aki olyasmit mond, hogy néhány kopasz ember nem kopasz, az olyat mond, ami minden lehetséges világban hamis, az ész-„hamisság”-ot mond. Az észigazságok második csoportját azok a kijelentések alkotják, amelyeknek az ellentmondás elvére alapozottsága csak rövidebb-hosszabb elemzéssel, úgy mutatható ki, hogy a kijelentésben szereplő „eszméket” egyszerűbbekre, primitívebbekre bontjuk le. Az ilyen észigazság példájául a következő mondattal reprezentált kijelentés szolgálhat: „minden piros labda színes”. Azt, hogy ez a kijelentés is minden lehetséges világban igaz, csak úgy tudjuk megmutatni, ha elemezzük a „piros labda” és a „színes” kifejezések elfogadott jelentését, aminek segítségével és eredményeként látható lesz, hogy burkolt formában ugyan, de ennek a kijelentésnek az igazságát is garantálja az ellentmondás elve.

Leibniz szerint a matematikai állítások — ilyen burkolt formában — szintén az ellentmondás logikai elvére épülnek, s ezért igazságuk szükségszerű, megkérdőjelezhetetlen. A matematikai ismeretek igazak lévén minden lehetséges világban, nem függnek a mi világunkban megfigyelhető „tények”-től.

A Leibniz utáni logicizmus — amelynek fő képviselői G. Frege, B. Russell, R. Carnap, C. G. Hempel — elsősorban nem Leibniz intencióit változtatta meg, hanem kidolgozott — és felhasznált a matematika és a logika Leibniz utáni fejlődéséből készen kapott — bizonyos elemzési módszereket, amelyek segítségével — mint ahogy azt S. Körner⁸ kimutatta — világosabbá

⁸ Körner, S.: *The Philosophy of Mathematics. An Introduction*. Harper, New York 1960. 33. o.

lehetett tenni a centrális filozófiai és logikai fogalmakat, s hozzá lehetett kezdeni a matematikai állítások analitikus (azaz észigazság) voltának behatárolásához.

Elsősorban az észigazságok fogalmának pontosabb definíciójára volt szükségük, hiszen a leibnizi meghatározás, amely szerint azok az ellentmondás elvén alapulnak, még túl határozatlan. Bár az új definíciók, az analitikus állítások felismerésére adott új kritériumok is hagynak maguk után kívánni valót, mégis némiképp hozzásegítettek a problémakör jobb megértéséhez. Kiderült ugyanis, hogy a szükségképpen igaz vagy hamis állítások logikai értéke *megalkotásuk módjából*, azaz — egy később, főleg L. Wittgenstein hatására elterjedt, de már Russell által is használt kifejezéssel élve — a *kijelentések logikai formájából*⁹ következik. Analitikusak azok a kijelentések, amelyeknek a logikai formái a változóik bármilyen behelyettesítése esetén igaz állítást eredményeznek; e logikai formák a megtestesítő *logikai törvények* nevet kapták.

A logicizmus szerint tehát a matematikai kijelentések igazsága vagy hamissága is megalkotásuk módjából — pontosabban szólva: logikai formájukból — következik. Bár a bizonyításra irányuló próbálkozások, főleg a relációs kijelentések felfedezésével, jóval bonyolultabb folyamatnak bizonyultak, mint ahogy Leibniz elképzelte, a logicisták szerint azonban véges számú lépésben — definíciók és logikai törvények segítségével — mégis csak ki lehet mutatni, hogy a matematika bármilyen állítása, szóljon akár a differenciálegyenletek megoldásának létezéséről, akár komplex számok közötti összefüggésről, végső soron analitikus, logikai formája miatt igaz. Bárhogyan is állapítsuk azonban meg az analiticitást, ha sikerül visszavezetni a matematikai ismereteket logikaiakra, akkor „megoldódnak” — vagy, pontosabban, transzformálódnak és emiatt oldódnak meg — a matematikával kapcsolatos filozófiai problémák. Ha ugyanis nem kell elismerni semmilyen speciális matematikai megismerésmódot és ismereteket, ha nem kell elismerni egy önálló matematikát, akkor nem kell elismerni semmilyen matematika-filozófiát sem, illetve a matematika filozófiája arra redukálódik, hogy kimutassa a matematika és logika lényegi azonosságát.

Frege és Russell még abban a kényelmes hitben ringatták magukat, hogy az egész matematika, minden matematikai állítás — alkalmasan megválasztott definíciók segítségével — visszavezethető néhány axiómára, az ún. Peano-féle axiómákra, s a filozófusnak csak annyi a feladata, hogy kimutassa vagy megkonstruálja azokat a definíciókat és logikai törvényeket, amelyekből ezek az axiómák levezethetők. Ha aritmetikai fogalmak rejtett felhasználása nélkül sikerül megadni a definíciókat, és következetesen levezetni az axiómákat, akkor a logicista filozófia igazolást nyer — feltételezve azt, hogy a jövőben sem lehetnek olyan matematikai diszciplínák, amelyek nem vezethetők vissza Peano axiómáira, vagy ha ilyenek lehetségesek, akkor ezek logikai voltát is ki lehet mutatni. Peano axiómáinak primitív terminusai:

⁹ A *logikai forma* közelítő definíciója Black nyomán (Black, M.: *The Nature of Mathematics*. Littlefield, Pat. N. J. 1959. 41. o.): egy kijelentés logikai formája az, ami közös mindazon kijelentésekben, amelyek alkotórészei egyértelmű megfeleltetési viszonyba lehet hozni egymással.

„0”, „természetes szám” és „rákövetkező”. Frege és Russell¹⁰ ezeknek adja meg a definícióit, csak logikai fogalmak és törvények felhasználásával. A definícióknál még nem lépett fel semmi elvi nehézség, az axiómák lefordításánál azonban már igen. Először is Frege dedukciója hibás volt,¹¹ Russellnak pedig olyan állítást kellett használnia, amely nem nyilvánvalóan logikai és eddig nem is sikerült róla kimutatni, hogy logikai. Ez az állítás — az ún. végtelenségi axióma¹² — azt mondja ki, hogy a világban végtelenül sok egyedi tárgy létezik — ha ugyanis nem így lenne, akkor aritmetikánkról azt kellene feltételeznünk, hogy minden lehetséges világban hamis, azaz logikailag hamis. A végtelenségi axióma igen nagy viták tárgya volt; a logikai volta igazolására irányuló néhány sikertelen kísérlet¹³ után ma már majd-

¹⁰ Ahelyett, hogy Frege és Russell definícióit idéznénk, egy példán megmutatjuk a számok logicista értelmezését, kiindulóló logikai fogalomnak tekintve az osztály fogalmát. Frege és Russell feltételezte, hogy az osztályok *hasonlóságot* meg lehet állapítani a számfogalom előzetes felhasználása nélkül. Két osztályt akkor nevezhetünk hasonlónak, ha kölcsönösen egyértelmű viszonyt lehet közöttük felállítani, azaz ha az egyik osztály minden tagjának egyetlen tag feleltethető meg a másikkól és viszont. Továbbá: ha egy osztály elemeinek számát megállapítjuk, pl. azt mondjuk, hogy a Jupiter holdjai 12-ten vannak, akkor nem az egyes holdaknak (pl. a Callistónak, a Ganymednek stb.) tulajdonítunk egy saját-ságot, hanem a szobában levő emberek osztályának. Ezek a saját-ságok, a 12, a 4 stb. — tehát az egyes természetes számok — nem tárgyak tulajdonságai, nem tárgyakhoz tartoznak, mint pl. a *színes* vagy a *nehéz* tulajdonság, hanem a tárgyak bizonyos osztályaihoz. A logikai osztályt azonosnak véve a fogalommal a számok tehát fogalmak tulajdonságai. A számokat is mint tulajdonságokat szintén osztályoknak foghatjuk fel. A 12 mint tulajdonság mindazon osztályokról állítható, amelyek a Jupiter holdjainak osztályához hasonlítanak, azaz a 12 az összes tizenkét-elemű osztály osztálya, a 4 pedig az összes négyelemű osztály osztálya, a 0 pedig az összes olyan tárgyak osztályainak osztálya, amelyek nem azonosak önmagukkal, azaz az összes üres osztályok osztálya, mert olyan tárgyak nincsenek, amelyek ne lennének azonosak önmagukkal. Az extenzionalitás értelmében üres osztály csak egy van, ezért az 0 az üres osztály osztálya.

Így tehát elvben az összes természetes szám definiálható, a természetes számok osztályán pedig az összes természetes szám alkotta osztályt mint egészet kell érteni. (Vö.: Quine, W. V. O.: *Mathematical Logic*. Harper, New York 1962. 237 — 243. o.)

¹¹ Vö.: Beth, E. W.: *The Foundations of Mathematics*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam 1959. 356. o.

¹² Ha a „rákövetkező” terminust r betűvel jelöljük (az angol nyelvű irodalomban a „successor” szó rövidítéseként általában s betűt használnak rá), és megállapodunk abban, hogy $r0 = 1$, $rr0 = 2$, $rrr0 = 3$ stb., továbbá, hogy a és b két tetszőleges természetes szám, amelyeket r szukcesszív alkalmazásával 0-ból kiindulva kaphatunk, akkor Peano öt axiómáját a következőképpen írhatjuk le:

P1: A 0 természetes szám.

P2: Ha a természetes szám, akkor ra is természetes szám.

P3: Ha $ra = rb$, akkor $a = b$.

P4: Nincs olyan a természetes szám, hogy $ra = 0$.

P5: Ha 0 rendelkezik valamilyen A tulajdonsággal, és ha mindannyiszor, amikor a rendelkezik A -val, ra is rendelkezik vele, akkor minden természetes szám rendelkezik A tulajdonsággal.

Lényegében a P2 axióma — amely az állandó továbbbszámlálás lehetőségét állítja — hívta életre a végtelenségi axiómát. Ugyanis ha csak véges számú tárgy lenne, akkor a továbbbszámlálás — a számok definíciója miatt — valahol elakadna. Mivel a számok osztályok osztályai, ezért lenne egy olyan osztály, amely elemeinek száma már nem lenne növelhető. P2 azonban azt állítja, hogy a továbbbszámlálás nem akad meg sehol sem, tehát végtelen sok tárgynak kell léteznie.

¹³ Carnap például megpróbálta kimutatni a végtelenségi axióma analiticitását. Vö.: *The Philosophy of Rudolf Carnap*. Ed. Schilpp, P. A., Open Court, La Salle, Ill. 1963. 47 — 48. o.

nem egyhangú az a vélemény, hogy nem logikai állítás, hanem inkább valamilyen kozmikus hipotézis.

Nyilvánvaló azonban, hogy a matematika analiticitását nem-logikai kijelentés segítségével nem lehet bizonyítani. Ha viszont — mint minden eddigi próbálkozás eredménytelensége igazolja — nem lehet bebizonyítani a matematika analiticitását, nem lehet kimutatni, hogy a matematika maradék nélkül visszavezethető a logikára, akkor ezt annak alátámasztására foghatjuk fel, hogy a matematika és a logika valójában nem azonosak, hogy van valamilyen sajátos matematikai megismerésmód, hogy vannak speciálisan matematikai ismereteink.

A logicizmus — amikor a matematikai megismerés „végső alapvetését” a logikaiban látja, amikor a matematikát a logikával azonosnak fogja fel — a logika egyféle, de korántsem az egyetlen lehetséges ismeretelméleti értelmezéséből indult ki. Ennek az értelmezésnek centrális része, hogy világos vagy jól explikálható különbség létezik logikai és nem-logikai állítások között, ez azonban a logicizmuson belüli viták eredményeként ma már korántsem általánosan elfogadott.

A logika logicista értelmezése szerint — s ez jelentősen közrejátszott a logicista filozófia népszerűségében — a logikai kijelentések, törvények rendelkeznek olyan tulajdonsággal, amely a dedukció során mintegy átöröklődve a matematikaiakra, magyarázatot ad a matematikai tudás bizonyosságára, szükségszerűségére — ez a tulajdonság a logikai szükségszerűség. Ha tehát egy matematikai kijelentés igaz, akkor logikailag, szükségképpen igaz, ha hamis, akkor ismét szükségszerűen hamis. Nincs tehát semmi *sui generis* matematikai bizonyosság, a matematikai kijelentések szükségszerűsége *logikai szükségszerűség*.

A logikai állítások funkciójából következően — bár ebben a kérdésben a jelentős logicisták véleménye korántsem teljesen explicit vagy egyöntetű — a fentiek szerint értelmezett matematika sem esik megfigyelési kontroll alá. Hiszen a logikai állítások, törvények — legalábbis Carnap és Hempel szerint — nem a valóságra, hanem az adott nyelvre vonatkoznak, nem a valóság leírásai, nem faktuálisak, hanem azt mutatják meg, hogy faktuális állításokat hogyan alakítsunk át egymásba; lingvisztikai transzformációs szabályok, *a nyelv használatának általános szabályai*. A matematika, e koncepció szerint, a tudományos nyelv használatának speciális szabályrendszere. A megfigyelések állandóan kontrollálják a tudományos nyelv segítségével kifejezett faktuális állításokat, az egymásba való átalakításuk módját azonban nem. A matematika nem ad faktuális ismereteket, s ezért megfigyelésekkel sem nem igazolható, sem nem cáfolható: a matematika tehát analitikus és a priori, illetve, Carnap szerint, analitikus és konvenció.

A logicizmus látszólagos magyarázatot tudott adni a matematika alkalmazhatóságára és alkalmazására. A logicizmus szerint, ha a matematikát kísérleti, megfigyelési szituációkra alkalmazzuk, akkor nem csinálunk többet (de kevesebbet sem), mint hogy a logikai változóknak a kísérleti helyzet által megszabott jelentést adunk, s e jelentéssel ellátott, interpretált formulák (amelyek — és csak ezek — már reprezentálnak kísérletileg vizsgálható állításokat) és a nyelv használati szabályai újabb, megfigyelési kontrollnak alávethető állítások levezetéséhez juttatnak el.

Miután kiderült, hogy a matematika analiticitása nem bizonyítható be, természetesen plauzibilisebb feltételezni, hogy van valamilyen speciális

matematikai megismerés, vannak irreducibilis matematikai ismeretek. A matematikai ismeretek jellegére vonatkozó másik két koncepció ebből indul ki. Az első azt állítja, hogy visszavezethetetlen matematikai ismereteink nem analitikusak, hanem szintetikusak, és nem a posterioriak, hanem a prioriak; ezt a nézetet vallja Kant és az újabb keletű intuicionizmus.

b) *A matematika mint szintetikus a priori*

Azok, akik — mint Kant is — a matematika szintetikusságát állítják, mint Barker kimutatta,¹⁴ sokkal nehezebb kiinduló helyzetben vannak, mint a logicisták. A matematika analiticitásának bizonyítására ugyanis elégséges kimutatni, hogy a számokról, differenciálhányadosokról stb. szóló minden kijelentés definíciókból és logikai törvényekből levezethető. A konkrét levezetés hiányát egy logicista logikai és matematikai ismereteink fogyatékoságának is betudhatja, s remélheti, hogy a bizonyítás valamikor a jövőben lehetséges lesz. A szintetikusság koncepcióját vallónak azonban be kell bizonyítania, hogy ilyen bizonyítás elvben lehetetlen.

Bár ilyen bizonyítást még senki sem produkált — s figyelembe véve az analitikus és szintetikus megkülönböztetésének relatív voltát, nem is bizonyos, hogy ez lehetséges vagy szükséges —, elvben nem lehetetlen a matematika szintetikusságának elismerése, hiszen az analitikusság állítása, mint mondtuk, lényegesen függ a logika egy előzetes ismeretelméleti interpretációjától. Kant és az intuicionisták szerint az, aki csinálja a matematikát, tudja, hogy a matematika a logikán túl előfeltételez valamit, valamilyen extrelingvisztikait, amely nem vezethető vissza logikára. Szerintük a matematikai kijelentések logikai formája még nem garantálja az igazságukat vagy a hamisságukat. Mivel a matematika kísérletileg ellenőrizhetetlen, azaz a priori, ezért szintetikusságát nem biztosíthatja vagy szintetikusságáról nem győzhet meg a megfigyelés, a tapasztalat, hanem csakis az intuíció — azaz matematikai tudás csak úgy lehet szintetikus, ha intuitív, vagyis a matematika előfeltételez egy intuíción.

Kant szerint egy szintetikus a priori kijelentés általános és szükségszerű, de az analitikustól eltérően nem tartalmatlan. A matematikai kijelentések ismerettartalmának, lényeges és új ismereteket adó voltának elismerése azonban Kantnál elfogadhatatlan episztemológiai előfeltételezésekre épül. Mivel nem célunk az állítólagos diszkurzív szintetikus a priori kijelentésekkel foglalkozni, ezért csak a *Transzcendentális esztétika* néhány megállapításának elemzésére szorítkozunk. Kant meggyőződése szerint a priori és szintetikus a matematika csak úgy lehet, ha a térről és az időről vagy a tér- és időbeli konstrukciókról szól. De a tér és az idő nem az emberi tudattól függetlenül létező reláció vagy sajátosság, hanem a tudat változatlan és változatlan matricái, amelyek segítségével az észleletek kaotikus világát rendezzük. A tér és az idő Kant szerint lehetővé teszik a külső észleletek térbeli egymás mellé és a belső észleletek időbeli egymás után rendezését: nem erednek a tapasztalatból, hanem vonatkoznak rá, nem függenek tőle, nem alakulnak át, nem változnak a hatására, hanem lehetővé teszik, s így minden lehetséges tapasztalatnak a logikai előfeltételei, egyben szük-

¹⁴ Barker, S.: Id. mű. 29. o.

ségszerű határai és korlátozásai. Tér és idő egy sajátos tudati közegben megadott, pontosabban: meglevő konkrét tárgyak, partikulák.

Kant szerint a következőképpen jutunk el hozzájuk: ha eltekintünk a tapasztalatok tartalmától, azaz elhagyjuk mindazt, ami az adott tapasztalati szituációra jellemző, akkor megmarad valami, a tapasztalatok formája ez a tér és idő. A matematika ezeknek az érzéki tartalomtól mentes partikuláknak és a bennük végrehajtott konstrukcióknak a tudománya (ha például, mintegy „gondolatban”, a teret két féltérre bontjuk, vagy két pont között egy egyenest húzunk, akkor ilyen konstrukciókat hajtunk végre). Hasonlóan ahhoz, ahogy egy üveggolyó többfelé esik szét bizonyos manipuláció hatására, ugyanígy a térben és időben is intuitív konstrukciók segítségével több térrészt tudunk elkülöníteni, különböző időbeli elhatárolásokkal tudunk létrehozni. Az intuitív konstrukció megteremti a matematikai ítélet, kijelentés lehetőségét — Kant szavaival: egy matematikai fogalom a priori objektumokra való alkalmazása egyfajta teremtő aktus. A matematikusok megvizsgálják ezeket a konstrukciókat, újabbakat hoznak létre, és a priori szintetikus állításokat reprezentáló mondatok segítségével leírják őket. Az intuitív konstrukció a praktikus konstrukciónak is előfeltétele, hiszen mindannyiszor; amikor nem lehetséges a matematikai fogalom a priori objektumokra való alkalmazása, akkor nem lehetséges a megfelelő empirikus konstrukció sem. A priori és szintetikus matematika csak egy lehet, hiszen ellenkező esetben általánosan és szükségszerűen több különböző dolgot tudnánk, s így egyet sem tudnánk általánosan és szükségszerűen. A priori és szintetikus csak az euklideszi geometria és a Peano-féle aritmetika lehet.¹⁵

A modern intuicionista filozófia kialakulásának előzményeire és körülményeire nem térhetünk ki. Pusztán annyit szeretnénk megjegyezni, hogy L. E. J. Brouwer, az irányzat megalapítója előtt főleg H. Poincaré hangoztatott az intuicionizmushoz hasonló eszméket; az iskola másik nagy alakja A. Heyting. Az intuicionizmus nemcsak a matematika filozófiai kérdéseire adandó válaszként alakult ki, pontosabban szólva nemcsak filozófiai irányzat, hanem szaktudományos iskola is. Mivel a matematika filozófiájának nem célja és feladata szaktudományos kérdésekben való állásfoglalás, ezért az intuicionizmust a következőben is csak annyiban érintjük, amennyiben a matematika filozófiai kérdéseire adott világnézeti válasz; mindig mint filozófiai iskoláról lesz szó róla, és a matematikai megismeréssel és ismeretekkel kapcsolatban is csak azokra a nézeteire fogunk szorítkozni, amelyek eltérnek Kant koncepciójától.

Az első különbség bizonyos mértékig csak hangsúlyeltolódás. Mert bár Kant is alapvető differenciát lát egy intuitív tudati aktus és szintetikus a priori ítéletekkel történő leírása között, bár a korrekt leírásnak szerinte is előfeltétele az intuitív konstrukció, nála a konstrukció és leírása mintegy kéz a kézben halad. Az intuicionizmus viszont a legélesebben elválasztja a kettőt, s a konstrukciónak a nyelv segítségével történő leírását lényegtelennek, csupán segédeszköznek tartja. A matematika lényege — Brouwer és Heyting szerint — a tiszta tudati tevékenység, ez a matematika. Az intuitív konstrukciók létrehozásához nem szükséges egyetlen nyelv sem, leírásuk,

¹⁵ Persze Kant nem tudhatta, hogy az általa ismert aritmetika később a Peano-féle lesz.

kommunikációjuk egy matematikus számára csak lehetséges, de nem szükséges, hiszen ennek szabályait a matematikai tevékenységhez képest külsődleges feltételek szabják meg. A matematikai konstrukció autonóm, nem függhet a nyelvtől és funkciótól, szabályaitól.

A „tudati konstrukció” kifejezés jelentését az intuicionisták pontosan nem definiálják, általában csak negatíve nyilatkoznak róla, kijelentik, hogy nem azonos például a misztikusok intuíciójával stb. Azt tartják, hogy jelentése csak elvégzett konstrukciók, csak matematikai tevékenység után válik világossá, ezután pedig már nincs szükség a definíciójára. A matematikai konstrukció nem nyelvi jellegű vagy nyelvi tevékenységgel kísért tudati tevékenység, hiszen a nyelv külső a matematikához mint szabad és független tudati tevékenységhez képest. A matematikai tevékenység azonban nemcsak a nyelvtől, hanem minden lehetséges tapasztalattól is független, hiszen a tapasztalat is külsődleges a matematikai konstrukciókhoz képest, vagy ahogy Brouwer mondja: „a matematika a tapasztalattól független, szabad kreáció, amely egyetlen primitív a priori intuícióból alakul ki...”¹⁶

Kanttól eltérően és Poincarével egyetértésben Brouwer szerint sincs a térre vonatkozó intuíció, csak a tiszta időfolyást lehet az intuícióban megragadni, az időfolyásnak ez az intuíciója az, amelyről Brouwer mint „primitív a priori intuíció”-ról beszél. Brouwer nem azért mondott le a térre vonatkozó intuícióról, mert felismerte volna a nem-euklideszi geometriák létezéséből következő általában hangoztatott — bár nem teljesen megalapozott — ellenérvet az euklideszi geometria a priori és szintetikus volta ellen, hanem azért, mert a térre mint a külső észleletek formájára vonatkozó intuíció sohasem lehet biztos; a térben végzett konstrukció nem lehet olyan közvetlen, és eredménye nem lehet olyan világos, hogy külső megalapozásra ne szoruljon. Viszont mindaz, ami a tudat számára külső vagy külsővel kapcsolatos, az korrigibilis, bizonytalan. A tudat matematikai tevékenysége tehát különböző elhatárolások létrehozása a tiszta időben. S így a matematika tulajdonképpen nem is megismerés, hanem cselekvés, tett.

A matematika mint elvont szellemi tett, cselekvés független a nyelvtől, de a nyelv nem független a tudati konstrukcióktól. A konstrukciókból elindulhatunk a nyelv felé, de fordítva nem, a „verbális épületek” semmit sem mondanak a matematikáról. A matematikai nyelv semmi más, mint tetteink leírásának és kommunikációjának eszköze. Egy jól megfogalmazott matematikai nyelvi mondat leírja bizonyos konstrukciók eredményét, sikerességét. Heyting szerint például a „ $2 + 2 = 3 + 1$ ” formulát úgy kell értenünk, mint egy közlést bizonyos konstrukciók befejezéséről, mégpedig a „ $2 + 2$ ” és a „ $3 + 1$ ” kifejezésekkel jelölt konstrukciók végrehajtásáról, és arról, hogy ezek azonos eredményre vezettek.¹⁷ A matematikai nyelvi mondatok egy extralingvisztikai territórium leírásai, s így felvilágosítást nyújtanak valamikről, új ismereteket adnak, azaz szintetikusak, de megfigyelésekkel sem nem igazolhatók, sem nem cáfolhatók, ezért a prioriak.

¹⁶ Idézi Beth, E. W.: *Mathematical Thought*. D. Reidel Publishing Co. Dordrecht 1965. 76. o. — a továbbiakban Beth, E. W. 2.

¹⁷ Heyting, A.: *Intuitionism. An Introduction*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam 1956. Itt és a továbbiakban is az 1965-ös orosz nyelvű (Изд. «Мир», Москва) kiadás szerint idézünk. A hivatkozott rész lelőhelye: 17. o.

Az intuicionizmus álláspontja tehát a matematikai ismeretekkel, a matematika megismerésbeli pretenziójával kapcsolatban kétoldalú: egyrészt nem tartja a matematikát megismerésnek, ha a „matematika” szón az intuitív konstrukciók megalkotását, egyfajta elvont tudati tevékenységet értünk, másrészt megismerésnek, éspedig szintetikus a priori megismerésnek tartja, ha a „matematika” szón a konstrukciók leírását értjük. (Az intuicionista filozófiával, valamint a szintetikus a priori problémájával kapcsolatos kritikai megjegyzéseinket a későbbiekben tesszük majd meg.)

Most pedig térjünk át a filozófia történetében legritkább koncepcióra, arra, amely szerint a matematikai ismeretek szintetikusak, de nem a prioriak, hanem a posterioriak.

c) *A matematika mint szintetikus a posteriori*

Igen nehéz helyzetben lennénk, ha e koncepció híveit részletesen fel akarnánk sorolni — hiszen talán Mill volt az egyetlen jelentős olyan filozófus, aki következetesen azt vallotta, hogy a matematika lényegében nem különbözik a többi természettudománytól, hogy a matematikai kijelentések ugyanolyan általánosítások, mint például a fizikai vagy biológiai kijelentések. Ez a felfogás azonban, amelyet matematikai empirizmus néven is szokás emlegetni, nem tartható. Bár a racionalizmus érvei nem lehetnek elégségesek a matematika aprioritásának megállapítására, annak kimutatására azonban igen, hogy a matematika nem azonos a kísérleti természettudományokkal, hogy a matematika speciális megismerésmód, hogy nem vezethető vissza ezekre a tudományokra, de — s ezt már most meg kell mondani — nélkülük nem is érthető meg speciális helye az emberi megismerés egészében.

Bár a matematikai empirizmus nem tud számot adni a matematikai megismeréssajátosságairól, mégis kiemeli egy olyan oldalát, amely minden apriorisztikus matematika-felfogásból szükségképpen hiányzik, vagy csak nagyon különös és talán csak ad hoc feltevésekkel inkorporálható az ilyen rendszerbe. Az apriorisztikus elméletek, amelyek szerint a matematika végső soron az emberi gondolkodásban gyökerezik, nem tudják megmagyarázni azt, hogy miért alkalmazható a matematika az anyagi világra, ezt csak istenre vagy egy eleve elrendelt harmóniára való hivatkozással tudják „magyarázni” — ezt a mentőövet azonban világnézetileg elfogadhatatlan, idealista ismeretelméleti hajóból dobták. A matematikai empirizmus, bár nem veszi észre, hogy a matematika nem úgy tükrözi vissza az anyagi valóságot, mint a fizika vagy a biológia, de hangsúlyoz és kiemel egy kapcsolatot az anyagi világ és a matematika, a számolás s mérés gyakorlata és a matematikai tudomány között. S filozófiatörténeti jelentősége — úgy véljük — ebben van.

A következő matematika-filozófiai álláspont már nem sorolható be az ismeretek mondott felosztásának valamely címszava alá. Mégpedig azon egyszerű okból, mert a matematikát nem tartja megismerésnek, tagadja azt, hogy léteznék valamiféle matematikai tudás, matematikai ismeret, s így a matematikai ismeretek jellegére vonatkozó minden kérdést értelmetlennek tart.

d) *A matematika mint intellektuális játék*

Azt az álláspontot, hogy a matematika nem megismerés, nem tudás, hanem egyféle hasznos intellektuális játék, a matematika formalista filozófiájának képviselői vallják. Ezt a filozófiai koncepciót két lépésben szeretnénk ismertetni, előbb azt mutatjuk meg, hogy ez a formalista elképzelés hogyan kapcsolódik a matematika bizonyos aspektusához, azután pedig magát az elképzelést vázoljuk fel.

A formalista filozófia a matematikának egy jóval „matematikaibb” oldalára támaszkodik, mint a logicizmus és az intuicionizmus. Kiindulópontja a matematika deduktív, pontosabban szólva axiomatikus felépítésű rendszerekbe foglalhatósága, ill. foglalása. Az ilyen elméletek prototípusa Eukleidész *Elemek* c. munkája, amely bizonyos posztulátumokat vett fel logikai kiindulópontul, konjunkcióban bizonyos axiómákkal és definíciókkal. Eukleidész axiómái nagyon általánosak, némelyikük, például az egyenlőség tranzitivitásának kikötése, már inkább logikai, mint geometriai. Eukleidész posztulátumai tartalmazzák a speciálisan geometriai feltevéseket, bár ezek között is van olyan, amely — jellegét, általánosabb voltát tekintve — inkább axióma lenne, mint például az összes derékszögek egyenlőségének kikötése. Az eukleidészi procedura, az axiomatikus rendszer működésének lényege és elve abban foglalható össze, hogy igaznak feltételezett posztulátumokból és az axiómákból (a modern axiomatikus felfogás posztulátumokon vagy axiómákon a speciálisan geometriai, aritmetikai stb. feltételezéseket érti, de nem veszi be közéjük a rendszerben felhasznált jóval általánosabban érvényes logikai összefüggéseket) kiindulva logikailag bebizonyíthatók, más állítások a rendszer tételei. Általában mind Eukleidész, mind pedig az utána következő matematikusok vagy filozófusok jelentős többsége feltételezte, hogy az axiómák és tételek kijelentések, azaz — valamilyen értelemben — igazak vagy hamisak lehetnek.

A nem-euklideszi geometriák kialakulása és az euklideszi geometriával való összehasonlításaik körül kialakult vita bizonyos mértékig új fényt vetett az axiómarendszerekre, és a vita középpontjába az axiómarendszerek egy bizonyos szükséges tulajdonságát állította. Kiderült ugyanis, hogy egy axiómarendszerben valamilyen bizonyítás formális logikai érvényességének megvizsgálásához nem kell feltételezni az axiómák igaz voltát, hanem elégséges az axiómák és levezetett tételek formális logikai viszonyait összehasonlítani. Sőt kissé később kiderült, azt sem kell feltételezni, hogy az axiómákat reprezentáló mondatok nem-logikai terminusai rendelkezzenek definit jelentéssel. Az axiómák és a tételek a bizonyítások formális logikai érvényességének megállapításához felfoghatók *logikai formákként* is, amelyek önmagukban sem nem igazak, sem nem hamisak. Ezek egyszerűen logikai formák, amelyekben változók és logikai terminusok szerepelnek. Ha a primitív terminusoknak az axiómákban nincs definit jelentésük, vagy pedig eltekintünk a jelentésüktől, akkor az axiómákat és a levezethető logikai formákat tiszta vagy interpretálatlan matematikának vagy matematikai rendszernek nevezzük. A logikai formákban a logikai szavak jelentése természetesen változatlan és definit marad. Világos azonban, hogy a tiszta matematika sem nem igaz, sem nem hamis, hiszen az igaz vagy a hamis fogalma nincs értelmezve logikai formákra. Értelmetlen tehát azt kérdezni, hogy igaz-e az az axiómánk, hogy „minden x -re van olyan y , hogy x valamilyen R viszonyban van y -nal”,

mivel a kérdés figyelmen kívül hagyja azt, hogy a tiszta matematika nem állítások, hanem csak logikai formák rendszere, s igaz vagy hamis csak bizonyos interpretációk esetében lehet, de önmagában nem. Egy axiómarendszert vagy a tiszta matematika egy rendszerét akkor interpretáljuk, ha egy meta-nyelv segítségével speciális jelentést tulajdonítunk a primitív terminusoknak, amivel az eredeti logikai formák átalakulnak állításokká, azaz olyasvalamikké, amelyek már igazak vagy hamisak lehetnek. Például ha a fenti „axiómánk”-ban megadjuk az x -eket, az y -okat és R -t, pl. úgy, hogy „kutyák”, „macskák” és „megharapja”, akkor az axióma átalakul azzá az állítássá, hogy minden kutya legalább egy macskát megharap. A kapott állítások igazsága vagy hamissága mindig az interpretációtól függ. Az interpretált matematika már megfigyelésekkel kontrollálható, cáfolható vagy igazolható, azaz kísérleti természettudomány. A tiszta matematika egy-egy rendszere igen sokféleképpen interpretálható, s az is kimutatható, hogy nem minden interpretáció mellett lesznek az axiómák igazak, néhányuk hamis állításokká fordíthatja axiómáinkat (pl. a fenti axióma megadott interpretációja hamis állítást eredményezett). De ami a lényeges és fontos, az annak felismerése, hogy a tiszta matematika önmagában sem nem igaz, sem nem hamis; igaz vagy hamis mindig csak egy adott interpretációban lehet. Emiatt az alternatív geometriák közötti az a vita, hogy melyik igaz és melyik nem, bizonyos fókig félrecsúszott. Önmagukban ugyanis sem az euklideszi geometria, sem a nem-euklideszi geometriák nem lehetnek igazak vagy hamisak, hanem néhány interpretáció mellett igaz az euklideszi és néhány mellett hamis, néhány mellett igazak a nem-euklideszi geometriák és néhány mellett nem igazak. Minden attól függ, hogy milyen speciális jelentéseket tulajdonítunk az axiómarendszer primitív terminusai helyett szereplő változóknak, azaz hogyan interpretáljuk geometriai axiómarendszereinket, milyen interpretációs szabályokat adunk meg egy metanyelvben.

A nagy igyekezet annak kimutatására, hogy a másik geometriája nem a geometria, az axiómarendszerek egy nagyon lényeges tulajdonságának felfedezéséhez és megvizsgálásának a módszereihez vezetett. Kiderült ugyanis, hogy a tiszta matematika ahhoz, hogy bizonyos interpretáció mellett egyáltalán igaz lehessen, nem tartalmazhat logikai ellentmondásokat. Az axiómarendszernek legalább konzisztensnek kell lenni ahhoz, hogy interpretálható legyen. Egy rendszer ellentmondásossága, inkonzisztenciája legegyszerűbben úgy lenne eldönthető, ha az axiómákból legalább egy olyan logikai formát le tudnánk vezetni, amely a változók bármilyen interpretációja mellett hamis, azaz ki tudnánk mutatni, hogy az axiómák ellentmondásra vezettek. A konzisztencia igazolásához sohasem elégséges, ha véges számú lépésben nem tudunk felmutatni ellentmondást, mert elvben mindig lehetséges, hogy az ellentmondás a megvizsgált esetek után jelentkezik. S mivel csak véges számú dedukciót tudunk elvégezni, ezért a rendszer ellentmondásmentességének eldöntéséhez más eszközökhöz kell folyamodnunk. A matematikában kialakult gyakorlat szerint csak relatíve bizonyítjuk a konzisztenciát: egy matematikai rendszerről eleve feltételezzük, hogy konzisztens, majd egy másik matematikai rendszer konzisztenciáját azzal bizonyítjuk, hogy párhuzamba állítjuk vele. Így bizonyította be például Beltrami, hogy néhány nem-euklideszi geometria ellentmondásmentes, feltéve, hogy az euklideszi az, vagy pl. Hilbert a múlt század utolsó évében azt, hogy az euklideszi geometria ellentmondásmentes, feltéve, hogy a valós számok elmélete is az.

A Cantor-féle „naiv”, paradoxonokkal terhelt halmazelmélet¹⁸ — amely mind a logizmus, mind a formalista filozófiának matematikai kiindulópontja volt, és az intuicionizmus kialakulásával is kapcsolatban állt (bár nem olyan szorosan, mint a másik két iskola esetében) — axiomatikus felépítéssel történő rekonstruálása után (aminek során a különböző axiómarendszerek, például Zermelo-Fraenkel, Neumann, Bernays és Gödel axiómarendszerei, elég erőseknek bizonyultak ahhoz, hogy a klasszikus matematika legnagyobb részét megmentsék, de nem voltak olyan erősek, hogy Cantor elméletéhez hasonló nyilvánvaló módon vezessenek paradoxonokra) e rendszerek

¹⁸ A múlt század második felében, 1870 körül G. Cantor megalkotta a matematika egy új ágát, amely mind a véges, mind a végtelen halmazok általános elméletének számított. A század vége felé már igen jelentős alkalmazásai is voltak. Felismerték például, hogy a matematika különböző ágait halmazelméleti fogalmak és törvények segítségével fel lehet építeni. Cantor maga az elmélet leglényegesebb részének a végtelen halmazok elméletét tartotta.

A végtelen halmazokkal kapcsolatban megjegyezzük, hogy mind a filozófia, mind a matematika történetében kétféle végtelen között tettek különbséget. Az egyik a potenciális végtelen, amely csak abban az értelemben végtelen, hogy a végesen adottból mindig tovább lehet lépni a végtelen felé, de úgy elérni, mint a végesen adottat, nem lehet. Ha pl. a természetes számok halmazát úgy fogjuk fel, hogy bár mindig csak véges számon tudunk „átlépni”, de mindig tovább tudunk lépni legalább eggyel, azaz ha a természetes számok halmazát az állandó továbbszámlálás lehetősége értelmében tartjuk végtelennek, akkor egy potenciálisan végtelen halmaz többé-kevésbé világos esetét kaptuk. Cantor elmélete szerint azonban nemcsak ilyen végtelen létezik, hanem lehetségesek aktuális végtelenek is. Ha például a természetes számok halmazát — az „aktuális végtelenek intuícója” (Cantor) segítségével — mint valami adott egészet fogjuk fel, akkor egy ilyen végtelen többé-kevésbé világos esetét kaptuk. A halmazelmélet — eredeti formájában — különböző típusú és szerkezetű aktuális végtelenek között tett különbséget. A századforduló körül azonban kiderült, hogy Cantor elméletéből igen komoly antinómiák származtathatók le — az elmélettel valami baj van. Mivel pedig az egyes matematikai diszciplínákat halmazelméleti fogalmak segítségével fel lehetett építeni, úgy vélték, hogy az egész matematikai „épület” az alapjaiban rendül meg. Az egyik legismertebb antinómia az ún. Zermelo — Russell-féle, arra vezethető vissza, hogy Cantor elméletében lehetséges olyan halmazok képzése, amelyek önmagukat elemként tartalmazzák, természetesen olyan halmazoké is, amelyek önmagukat elemként nem tartalmazzák. Az előbbieket tartalmazkodó, az utóbbiakat nem-tartalmazkodó halmaznak szokás nevezni. Például az összes halmazok halmaza maga is halmaz, tehát tartalmazkodó, addig pl. a tengeri sünök halmaza maga nem tengeri sün, tehát nem-tartalmazkodó. Ha most megalkotjuk az összes nem-tartalmazkodó halmazok (a_1, a_2, a_3 stb.) halmazát (A -t), és megkérdezzük, hogy tartalmazkodó-e vagy sem, akkor furcsa kép tárul elénk. Mert — a definíciók értelmében — ha A tartalmazkodó, akkor egyenlőnek kell lennie valamelyik a -val (azaz nem-tartalmazkodó halmaznak kell lennie, hiszen megállapodtunk abban, hogy a nem-tartalmazkodó halmazok halmazát alkotjuk meg). Tehát A akkor tartalmazkodó, ha nem tartalmazkodó. Ha azonban A nem-tartalmazkodó, akkor egyenlőnek kell lennie valamelyik a -val, s ezért tartalmazkodó. Tehát A akkor nem-tartalmazkodó, ha tartalmazkodó.

Az ilyen és ehhez hasonló antinómiák elkerülésére Cantor elméletében nincs mód. Megoldásuknak — pontosabban: elkerülésüknek — három alapvető módja ismeretes: első a korántsem általánosan elfogadott Russell-féle típuselmélet, amely bizonyos logikai feltételek kikötésével korlátozza a halmazok megalkotását, a második a halmazelmélet axiomatikus felépítése (elsősorban Zermelo — Fraenkel, Neumann módszerei), és a harmadik az ismét nem általánosan elfogadott intuicionizmus, amely majdnem egészében elveti Cantor elméletét. A logizmus és a formalizmus — mint a matematika filozófiai értelmezése is — szoros kapcsolatban állt az antinómiák kiküszöbölésének vagy kiküszöbölhetőségének problémájával. Az antinómiákra vonatkozóan l. részletesen: Fraenkel, A. — Bar-Hillel, Y.: *Foundations of Set Theory*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam 1958. Az 1966-os orosz nyelvű kiadás szerint idézzük, vagy hivatkozunk rá (Изд. «Мир», Moszkva); 11 — 30. o.

ellentmondásmentességének bizonyítása vagy bizonyíthatósága került napirendre, hiszen az, hogy nyilvánvaló módon nem vezetnek paradoxonokhoz, nem jelenti azt, hogy ellentmondásmentesek is. A konzisztencia problémájának eldöntésére D. Hilbert javasolt egy új módszert, amely a Hilbert-féle abszolút konzisztencia-bizonyításként ismeretes, mert nem feltételezi más rendszer konzisztenciáját. Hilbert általánosabb célt, az egész klasszikus matematika ellentmondásmentességének igazolását tartotta szem előtt. Tegyük fel — mondta —, hogy jól kiválasztott axiómák segítségével lényegében az egész klasszikus matematikát axiomatizálni tudjuk, azaz meg tudjuk adni azokat az állításokat, amelyekből a matematikában használt összes többi állítás levezethető (a dolog lényegét természetesen nem befolyásolja az, ha a matematika egyes diszciplínáira külön kell megalkotni az axiómarendszert. Bár a kívánatos az lenne, ha az egész matematikát egyetlen rendszerbe lehetne belefoglalni). Természetesen a klasszikus matematikának ez az axiómarendszere is felfogható — bizonyos említett célokra — logikai formák összességének. Ha most nemcsak a primitív terminusok speciális jelentéseitől tekintünk el, hanem eltekintünk a logikai terminusok vagy a rövidítésükre bevezetett jelek jelentésétől is, akkor egy értelem nélküli, de nem értelmetlen jelrendszert kapunk: az axiómarendszer egyetlen jelének vagy jelsorozatának sem lesz semmilyen speciális jelentése sem. Egy ilyen formális rendszert, tehát azt a rendszert, amely értelem nélküli, leírt vagy leírható, megkonstruált vagy megkonstruálható jelekből állítható össze, a következőképpen építhetünk fel. Először is kiválasztjuk a primitív szimbólumokat, jeleket (ezek változók, konstansok és segédszimbólumok — például zárójel, vessző, stb. — lehetnek), majd megállapodunk abban, hogy milyen jelkombinációkat tekintünk terminusoknak és milyen terminuskombinációkat formuláknak, utána megalkotjuk vagy felsoroljuk azokat a formulákat, amelyeket axiómáknak tekintünk, végül pedig megadjuk a következtetési szabályokat. Azt, hogy a primitív szimbólumokból hogyan képezzünk terminusokat és ezekből formulákat, a rendszer képzési szabályai mutatják meg. S ezután megindulhat az egyes formulák formális bizonyítása, aminek során kimutatjuk, hogy bizonyos jelsorozat végén található formulához csak axiómákat vagy/és a sorozatban az utolsót megelőző formulákat kell használni — feltéve azt, hogy ezekhez is csak axiómákat vagy/és az őket megelőző formulákat kell felhasználni.

Erről az oldaláról nézve egy formális rendszer — például a sakkhöz hasonlítható — játék a szimbólumokkal. Hilbert számára — aki arra törekedett, hogy megfogalmazza a formális rendszerek ellentmondásmentességének kritériumait és feltételeit — egy formális rendszer még *formalizált elmélet*; hiszen célja az volt, hogy bizonyíthatóan ellentmondásmentes és teljes rendszerek felépítésével — vagy a meglevő elméletek teljes formalizálásával — lényegében az egész klasszikus matematikát biztosítsa az antinómiák ellen. Természetesen ahhoz, hogy egy formális rendszerről eldönthető legyen, hogy ellentmondásmentes-e vagy sem, a rendszert vizsgálat tárgyává kell tenni (az ilyen típusú vizsgálatokat szokás metamatematikaiaknak nevezni), amihez semmi más nem kell, csak bizonyos észlelhető szituációk, például két szimbólum azonosságának, különbségének stb. leírása. Ezek a metamatematikai állítások leírják a formális rendszer szerkezetét, felépítését, az egyes lépések formális helyességét, a „játék” szabályaival való konformitásukat stb. A metamatematikai vizsgálatok tárgyának adva kell lennie, vagy létre kell hozni, s így a leírást

egy konstrukció előzi meg — ahogy Hilbert egyik tanítványa, J. Herbrand mondta: „...sohasem állítjuk egy objektum létezését anélkül, hogy meg ne mutattánk a megkonstruálásának módját...”¹⁹

Ez a konstrukció azonban nem a priori, tudati konstrukció, hanem „empirikus”, és szigorúan véges módszereket használ a szimbólumok sorozatainak létrehozásakor és metamatematikai megvizsgálásánál, hiszen végtelen jelsorozat nem konstruálható meg és nem is írható le.

Hilbert valószínűleg azt gondolta, hogy ha a formális rendszer leírásain keresztül megtaláljuk a rendszer ellentmondásmentességének bizonyítását, akkor ezt a *formalizált elmélet konzisztenciájának* foghatjuk fel. A formális rendszer leírásaiban így megtalálhatjuk a klasszikus matematika „alapjait”, azokat a kijelentéseket, amelyeknek bizonyossága kétségtelen, amelyek — éppen a formalizált elmélet irányában betöltött funkcióikon keresztül — vitathatatlanra teszik számunkra a klasszikus matematikát. A formális rendszer leírásai megkérdőjelezhetetlen bizonyosságú észlelési állítások: ha ezek bizonyosak, ha ezekben nem kételkedhetünk vagy nem kételkedünk, akkor a matematikai épület felső emeletei biztonságban vannak, nem kell összeomlásuktól félnünk, sőt tovább is építhetünk. A matematikai megismerés alapjai Hilbert számára — úgy tűnik — bizonyos nagyon egyszerű és kétségbevonhatatlan észlelési kijelentések, mintegy „megfigyelési tételek” (például: ha azt mondjuk, hogy az „ x ” jel az „ E ” jeltől jobbra van bizonyos formulában, akkor ilyen észlelési állítást mondunk), amelyek bizonyosságát elfogadva és amelyek bizonyosságára építve a klasszikus matematika biztosítható az antinómiák fellejtése ellen.

Amíg tehát Hilbert számára a formális rendszerek formalizált elméletek, s a jelek jelentésétől csak bizonyos célokra és bizonyos vonatkozásban tekintett el, addig a *matematika formalista filozófus* szerint a matematikai kifejezésekben szereplő jelek valójában és ténylegesen nem rendelkeznek semmiféle jelentéssel. A matematikai kifejezések nemcsak egy adott céltól függően (például ellentmondásmentesség bizonyítására) foghatók fel értelem nélküli jelsorozatoknak, hanem valójában is értelem nélküliek. Az a kifejezés például, hogy „ $5 + 2 = 7$ ”, nem reprezentál semmiféle valódi állítást, amely igaz a számokról — legalábbis olyan értelemben, amilyenben téves az ellenkezője —, nem írja le a számok — bármiféle létezők is legyenek — bizonyos tulajdonságait, hanem csak értelem nélküli jelek szabályosan felépített sorozata. Másféle példaként az elemi aritmetika kommutativitási, asszociativitási és disztributivitási törvényeit említhetjük, amelyek a formalista filozófia szerint nem a számokkal végezhető alapműveletek általános strukturális tulajdonságait írják le, hanem csupán bizonyos jelekkel végezhető „játék” szabályai, s mint ilyenek megint sem nem igazak, sem nem hamisak. S ezért nyilvánvalóan értelmetlen minden olyan filozófiai kérdés, amely a matematikai ismeretek természetére, a matematikai megismerés sajátosságaira vonatkozik, hiszen a matematika nem ismeret, nem megismerés, s ezért nem lehet semmilyen episztemológiai természete, sajátossága.

A matematika formalista filozófusa (például H. B. Curry, J. Neumann és bizonyos mértékig R. L. Goodstein)²⁰ annak deklarálásával próbálja meg-

¹⁹ Vö.: Fraenkel, A. — Bar-Hillel, Y.: *Id. mű.* 321. o.

²⁰ Curry, H. B.: *Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam 1951., Goodstein, R. L.: *Constructive Formalism. Essays on the Foundations of Mathematics*. University College Leicester, 1951., Neumann, J.:

oldani a matematikai megismeréssel kapcsolatos filozófiai kérdéseket, hogy nincsen matematikai megismerés. A matematika — a formalista filozófia szerint — bonyolult intellektuális játék a szimbólumokkal, amelynek semmilyen megismerésbeli pretenziója sincs. Ezt Neumann a legvilágosabban kimondja, amikor a matematika formalista alapjairól tartott előadásában azt állítja, hogy az egész klasszikus matematikát a primitív szimbólumokkal játszott kombinatorikus játéknak kell felfogni.²¹

Az, hogy a jelek, a szimbólumok milyen ontológiai természetű tárgyak, a formalista felfogás számára természetesen teljesen lényegtelen: „...egyszerűen azt mondhatjuk — állítja például Curry —, hogy a jelekről mint valamilyen típusú objektumokról gondolkodunk...”²² „A matematika lényege ezért nem valamilyen típusú speciális formális rendszer, hanem a formális szerkezet mint olyan.”²³ Ez nem jelenti azt, hogy a formális szerkezet valamiféle absztrakt entitás lenne, hanem csak azt, hogy különböző típusú jeleknek vagy jelrendszereknek lehet vagy van azonos formális szerkezetük.

Összefoglalva tehát: a formalista filozófia képviselői szerint a matematikai megismerés specifikumairól, a matematikai ismeretek jellegéről feltett filozófiai kérdések megválaszolhatatlan pszeudoproblémák, mert a kérdező a kérdésben olyat feltételez, ami nincs. A matematika filozófiai diszkussziójának azt kell kimutatnia, hogy a matematika nem más, mint a szimbólumokkal végzett vagy végezhető manipuláció.

De — s ebben Curry véleménye megegyezik Hilbertével — a szimbólumokkal végzett manipulációt és eredményeit le lehet írni. Ezek az állítások (a fentebb metamatematikaiaknak nevezett kijelentések) bizonyos nagyon egyszerű észlelhető szituációk rögzítései, a szimbólumok egybeesésének vagy különbségének leírásai, egyszerűen a formális rendszerről szólnak, s így nem „lépések” a formális rendszeren belül. A formális rendszer leírásai észlelési állítások. Funkciójukat illetően Curry véleménye erősen eltér Hilbertétől, hiszen segítségükkel nem igazolni és megalapozni akar egy létező tudományt, a klasszikus matematikát, mint Hilbert, hanem a formális rendszerek egyszerű leírásainak tekinti őket. A metamatematikai állítások nem megismerésbeli „alapjai” a matematikának, nincs kitüntetett ismeretelméleti helyük, hanem csak leírások, amelyeket — Curry kifejezését használva — *demonstratio ad oculos* igazolhatunk, igaznak vagy hamisnak találva őket. Egy formális rendszer létoka valamilyen alkalmazása, s így nem szükséges feltétele az ellentmondásmentesség. Ha egy ilyen rendszer alkalmazható, attól, hogy a későbbiek során kiderül, hogy valahol ellentmondásokat tartalmaz, még továbbra is alkalmazható lesz. A formális rendszerek megítélésénél nem az ellentmondásmentesség a döntő, hanem az, hogy mire és mennyire lehet felhasználni őket. Ha felhasználhatók pl. a fizikai állítások kezelésére, manipulálására (mint pl. a klasszikus analízis a fizikában), akkor az ellentmondásmentesség már másodlagos; a használhatóságon és a felhasználáson

The Formalist Foundations of Mathematics, a Philosophy of Mathematics c. kötetben, ed. Benacerraf, P. — Putnam, H., Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N. J. 1964. (A kötetet a továbbiakban *B. P.* — *P. M.* jellel rövidítjük.)

²¹ Neumann, J.: *B. P.* — *P. M.* 51. o.

²² Curry H. B.: *Id. mű* 31. o.

²³ Uo. 56. o.

nem fog változtatni a konzisztencia-bizonyítás eredménye. A szimbólumokkal, a jelekkel végzett játék ezért nem pejoratív értelemben vett játék, hanem nagyon hasznos, vagy nagyon hasznos lehet, mert segítségével a tudományok állításait lehet kezelni. Világos az is, hogy nem kell, nincs szükség a különböző játékok valamelyikének preferálására, mindegyiket ott és akkor játsszuk, ahol és amikor lehet.

Kritikai megjegyzéseink első része főleg Hilbert matematika-felfogására irányul, pontosabban, azt célozza kimutatni, hogy Hilbert elgondolása a klasszikus matematika „megmentésére” nem vihető végig. Mint említettük, Hilbert úgy vélte, hogy az egész matematika axiomatizálható, vagy úgy hogy egy, vagy úgy, hogy több axiómacsoportot veszünk fel e célból, és axiómáinkból a következtetési szabályok segítségével minden igaz állítás levezethető. Például Peano axiómáiból a számokról szóló minden igaz tétel bebizonyítható. 1931-ben azonban K. Gödel bebizonyította, hogy bizonyos matematikai rendszerekben — feltéve, hogy ragaszkodunk az ellentmondásmentességükhöz — nem lehet minden állítást bebizonyítani.²⁴ Ha az axiómarendszer elég gazdag és a következtetési szabályok elég erősek, akkor mindig létezik olyan kijelentés, amely — bár a rendszerbe tartozik abban az értelemben, hogy a rendszer kiinduló, alapfogalmai segítségével, pontosabban szólva, csak ezek felhasználásával megalkotható — mégsem vezethető le az axiómákból, noha igaz. Ez azt jelenti, hogy egyetlen ilyen axiómarendszer sem írja le teljesen a megfelelő matematikai objektumok tulajdonságait, viszonyait. Képletesen szólva: mindig vannak olyan kijelentések, amelyek bár igazak, mégis az axiómák és tételek „mellett”, rajtuk kívül helyezkednek el. Ez az eredmény végzetes csapás volt Hilbert koncepciójára, hiszen a formális rendszert leíró „észlelési” kijelentések — a klasszikus matematika Hilbert-féle ismeretelméleti alapjai és megalapozásai — semmit sem mondanak a bizonyíthatóan létező, de a formális rendszeren belül fel nem építhető jelsorozatokra vonatkozóan, ezek tekintetében nem relevánsak. Az intuicionista számára a Gödel-tétel csak jelzése annak, hogy a matematika axiomatikus felfogása, a „verbális épületek” vizsgálata nem mond semmit a matema-

²⁴ Gödel kimutatta, hogy egy formális rendszer minden primitív szimbólumának, formulának, bizonyításának tulajdonítható egy szám (az ún. Gödel-szám). A primitív szimbólumok között — mint mondtuk — vannak állandók, változók és segédszimbólumok. Ha a tagadást $\sim$, a diszjunkciót $\vee$, az implikációt $\supset$, az egzisztenciális kvantort $\exists$, az egyenlőséget $=$, a nullát 0 , a rákövetkezőt r jellel jelöljük, amelyek mind állandók, és 1-től 7-ig számokat tulajdonítunk nekik, akkor megkapjuk a szimbólumok Gödel-számaikat. A változók számozása nem ilyen egyszerű, a változókon belül — attól függően, hogy milyen változócsoporthoz van szó — 10-nél nagyobb prímek vagy növekvő hatványaik játsszák a Gödel-számok szerepét. Egy formula a primitív jelekből felépíthető; pl. $a = 0$ formula a 0 és a „ $=$ ” jelekből, a bevezetett Gödel-számozással a formula felírható számjegyek sorozataként: 6, 5, 6. Ha azonban minden formulával is egyetlen számot akarunk összekapcsolni, akkor meg kell állapodni, hogy milyen módon képezzünk a 6, 5 6 számsorozatból egyetlen számot. Megállapodhatunk abban, hogy vesszük a prímetek 2-től fölfelé, mindegyiket annyiadik hatványára emeljük, amennyi a primitív szimbólum Gödel-száma — a hatványokat összeszorozzuk és ezzel megkaptuk a formula Gödel-számát. Így a $a = 0$ formula esetében vesszük az első 3 prímet — 2, 3, 5 —, képezzük a következő szorzatot: $2^6 \cdot 3^5 \cdot 5^6$ — ez a mondott formula Gödel-száma. Hasonlóképpen bármilyen formula Gödel-száma megkapható, ha minden primitív jel Gödel-száma adva van. S így a formulákról szóló (metamatematikai) állításokat helyettesíteni lehet egész számokról szóló állításokkal. Gödel — itt nem részletezhető módon — ezen állítások viszonyai megvizsgálásával jutott el tételéhez. Vö.: Nagel, E. — Newman, J. R.: *Gödel's Proof*. Routledge and Kegan Paul Ltd., London 1964. 68—97. o.

tika lényegéről. Az intuicionista rendszerek inkorporálni tudják a Gödel-tétel minden következményét, hiszen számukra az axiomatizálás csak másodlagos, lehetséges attitűd az intuitív konstrukciók leírásai vonatkozásában. Ez, ahogyan E. Nagel és J. R. Newman világosan kimutatta, természetesen nem jelenti azt, hogy a Gödel-tétel és filozófiai következményei csak az intuicionizmussal egyeztethetők össze.²⁵

Amíg az első kritikai megjegyzés nem kritikai Curry felfogása vonatkozásában, addig a második bizonyos mértékig a formalista filozófia ellen is irányítható. Ezt már Brouwer is felismerte, amikor kifejti, hogy bármennyire is konzisztens egy axiómarendszer, ez még nem jelenti azt, hogy található matematikai interpretációja. „Tegyük fel”, írja, „hogy valamilyen módon, de matematikai interpretációkban való gondolkodás nélkül, bebizonyítottuk, hogy bizonyos verbális axiómákra épült logikai rendszer konzisztens, azaz, hogy a rendszer kifejtésének egyetlen pillanatában sem lép fel két ellentmondó tétel; ha azután később megtaláljuk az axiómák matematikai interpretációját (ami természetesen azt követeli meg, hogy megalkossunk egy matematikai struktúrát bizonyos adott matematikai viszonyokat kielégítő elemekkel), akkor vajon a logikai rendszer ellentmondásmentességéből következik-e, hogy egy ilyen matematikai struktúra *létezik?*”²⁶ Később A. Tarski bebizonyította, hogy egy axiómarendszer ellentmondásmentességéből nem következik az interpretáció lehetősége, azaz, hogy egy formális rendszer matematikai interpretációjának csak szükséges, de nem elégséges feltétele az ellentmondásmentesség. Az intuicionisták, és élete második felében Hilbert is, aki először száműzni igyekezett az intuiciót, a matematikából, de később elsősorban H. Poincaré kritikájának hatására rehabilitálta,²⁷ az interpretációhoz szükséges pluszt az extralogikai és extralingvisztikai matematika objektumok intuíciójában²⁸ véltek felfedezni.

A Curry-féle formalista filozófia részletes kritikáját itt nem adhatjuk meg, azt azonban meg kell jegyeznünk, hogy az egész klasszikus matematika megismerésbeli pretenziójának elvetése, bár elvben nem lehetetlen, mégis nagyon kevésbé valószínű. Továbbá: Currynek meg kellene magyaráznia, hogy miért és hogyan lép fel a matematikai megismerés „látszata”, mert enélkül jó alapunk van kételkedni a formalista filozófia helyességében.

Harmadszor pedig nyilvánvaló, hogy a formális rendszerek legnagyobb-részt történetileg kialakult és meghatározott társadalmi funkciót betöltő elméletek formalizálásai. Sőt még azokat a formális rendszereket is, amelyek nem formalizálásai létező elméleteknek, általában valamilyen elmélethez kötik. Úgy látszik tehát, hogy a formális rendszer nem valami önmagáért létező, hanem csak segédeszköz szerepét tölti be a matematikai gondolkodásban.

²⁵ Uo. 101. o.

²⁶ idézi Beth, *E. W.* 2. 70–71. o.

²⁷ Bunge, M.: *Intuition and Science*. Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs. N. J. 1962. 40. o.

²⁸ Az intuíció-probléma marxista elemzéséhez l.: Vajda Mihály: *Az evidencia problémája*. Magyar Filozófiai Szemle 1964/2. sz. Асмыс, В. Ф.: Проблема интуиции в философии и математике, Изд. «Мысль», Москва 1965.

2. A matematikai objektumok természetéről

A következő központi jelentőségű filozófiai kérdés ontológiai. Röviden úgy fogalmazhatjuk meg: ha a matematika ismeretek rendszere, akkor — pl. a számokról, a geometriai alakzatokról, az absztrakt csoportokról stb. tett — kijelentései miről szólnak; azaz: minek leírásai a matematikai elméletek?

Maga a probléma, ahogy erre Quine, Bar-Hillel, Fraenkel, Barker²⁹ utalnak, nagyon sokban hasonlít az univerzáliai régi kérdéséhez. A problémát elsőnek és talán legtalálóbban Szókratész fogalmazta meg: embert látok, lovat látok, emberséget, lóságot azonban nem — azaz: egyes embereket, lovakat lehet térben és időben lokalizálni, az univerzáliaiakat azonban nem. De akkor milyen létezők az univerzáliaiak? A kérdésnek három egymástól lényegesen különböző típusú megoldását produkálta a filozófiatörténet. Az első válasz az volt, hogy az univerzáliaiak ugyanolyan reális létezők, mint az egyes tárgyak — ha ugyan nem reálisabbak (Platón) —, mivel azonban térben és időben nem lokalizálhatók, feltételezhetően más realitás-szférába tartoznak. Az univerzáliaiak eszerint a platonista vagy realista felfogás szerint valamiféle absztrakt entitások, az embertől és az egyes tárgyaktól függetlenül léteznek. Definit és megismerhető tulajdonságokkal rendelkeznek, függetlenül attól, hogy ezeket megismerjük vagy megismertük-e.

A nominalizmus szerint ezzel szemben nincsenek ilyen absztrakt létezők, az egyedi tárgyakon túl vagy mellettük semmiféle absztrakt realitás-szféra sincs. Azaz — logikailag szólva — az osztályok, fogalmak reprezentálására bevezetett jelek nem teljes értékű nyelvi jelek, önmaguk nem jelölnek semmiféle létezőt, csak az individuumok jelölésére szánt tulajdonnevekkel összekapcsolva alkotnak értelmes nyelvi egységeket.

A konceptualizmus a realizmus és a nominalizmus közötti álláspont; eszerint vannak ugyan absztrakt entitások, de önmagukban vett természetük, tulajdonságaik nincsenek, az emberi tudattól függetlenül nem léteznek, hanem a tudat teremtvényei, és a tudat ruházza fel őket a megfelelő tulajdonságokkal is.

Mivel, mint említettük, a matematika ontológiai problémája nagyon hasonlít az univerzáliaiakéra, ezért az említett szerzőkkel összhangban mi is ezzel a három névvel jelöljük a megfelelő megoldáskísérleteket. Megjegyezzük, hogy nem minden matematikus vagy filozófus vallotta egész életén keresztül ugyanazt az ontológiai koncepciót, ha tehát valakit a realisták közé sorolunk, akkor ez nem jelent mást, mint hogy volt olyan időszak, amikor ezt a felfogást vallotta.

a) A realizmus

A matematikai realizmus — amely legmodernebb formájában részben megőrizte, részben elvetette a történeti, az eredeti platonizmust, gondoljunk csak K. Gödel és A. Church³⁰ realizmus értelmezéseinek különbségére — abból

²⁹ Quine, W. V. O.: *On What There Is*. B. P.—P. M. 192. o., Fraenkel, A. — Bar-Hillel, Y.: *Id. mű* 399. o., Barker, S.: *Id. mű* 69. o.

³⁰ Gödel, K.: *What is Cantor's Continuum Problem?* B. P.—P. M., Church, A.: *The Need for Abstract Entities in Semantic Analysis* Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences, LXXX. 1951., újranyomva a *The Structure of Language* c. kötetben, ed.: Fodor, J. A.—Katz, J. J. Englewood Cliffs, 1964.

indul ki, hogy vannak olyan objektumok, mint a számok stb. Mivel rendelkeznek valamilyen definit tulajdonságokkal, meg lehet ismerni, a matematikai elméletek segítségével le lehet írni őket. A gyakorló matematikusok és a filozófusok nagy része elfogadta azt, hogy az anyagi világ egyes tárgyain túl vagy az emberi tudattól függetlenül léteznek matematikai entitások, amelyek nem változnak, nem modifikálódnak, hanem ugyanúgy *adottak számunkra*, mint az egyes fizikai tárgyak, fel lehet és fel is kell fedezni őket, ugyanúgy, ahogy — Russell közismert hasonlatát idézve — Kolumbusz felfedezte Amerikát, ugyanúgy nem mi alkotjuk meg őket a tudatunkban, ahogyan Kolumbusz sem maga konstruálta meg Amerikát és az indiánokat.

Az a tény, hogy a számokról, csoportokról stb. definit ismereteink vannak, és hogy ezen ismeretekhez csak lépésről-lépésre tudunk eljutni, és mindehhez hozzávéve azt, hogy a matematikai objektumok térben és időben nem lokalizálhatók, az alkotó matematikusok nagy többségében azt a meggyőződést váltotta ki, hogy van egy realitás-szféra, amelynek a matematikai elméletek adekvát vagy többé-kevésbé adekvát leírása. A realista szerint a matematikus is a fizikussal *lényegében hasonló* módon jár el: ugyancsak tőle független objektumokat vizsgál, leírja tulajdonságait és viszonyait, illetve — ha szükséges — vár, amíg megismerési módszerei addig fejlődnek, hogy ezt meg tudja tenni.

A jelenkori matematikai realizmusnak két nagy válfaja van, az egyik szerint sui generis matematikai objektumok léteznek (Cantor, Gödel), a másik (a logicizmuson belül főleg Frege, Russell, Church) szerint a matematikai objektumok általánosabb természetű absztrakt entitásoknak, a logikai entitásoknak a részesetei. A matematikai realizmus általában nem összontológiai koncepcióként alakult ki, hanem a gyakorló matematikusok kényelmi szempontjai diktálták.

b) A nominalizmus

A matematikai nominalizmus szerint a matematikai objektumok konkrét tárgyak, térben és időben lokalizálhatók, s így semmi szükség sincs absztrakt matematikai létezők elismerésére. Történetileg talán legelső változata (feltehetően) Püthagoraszról származik, ez a számokat (például) a számjegyekkel, a numeráliákkal azonosítja.

A formalista matematika-filozófia — mivel elveti a klasszikus matematika megismerésbeli pretenzióját, és a matematikai kutatásokat a formális rendszerek vizsgálatára szorítja vissza — szintén nominalista, mert a formális rendszer szintén térben és időben lokalizálható konkrét objektumok (jelek) sorozata. Hogy speciálisan Hilbertnek mi volt a véleménye a matematikai objektumokkal kapcsolatban, nem teljesen tisztázott. A *Die Grundlagen der Mathematik* egy — elég gyakran idézett — passzusa szerint nemcsak a metamatematikát, hanem a matematikát általában kifejezetten konkrét objektumok leírásának tartja: „A matematikát”, mondja, „az összes többi tudományhoz hasonlóan, sohasem lehet kizárólag a logikára alapozni; hanem inkább olyasvalamire, ami... a logikai következtetések alkalmazásának és a logikai operációk végrehajtásának előzetes feltételeként adva van számunkra, bizonyos extralogikai konkrét objektumokra, ... vizsgálataink tárgyát speciálisan maguk a konkrét szimbólumok képezik...”³¹ Ha ez az

³¹ Idézi Beth, *E. W.* 2. 93. o.

idézet elégséges bizonyítéknak tekinthető, akkor Hilbert nominalista volt, bár élete második felében ez keveredik nála egyféle nem-radikális konceptualizmussal.

A logicizmuson belül — főleg a halmazelmélettel kapcsolatban — is megjelent a nominalizmus egyik válfaja (főleg N. Goodman és Quine). Meg kell jegyezni, hogy osztályok nélkül felépített elméletében Russell is nominalista, vagy legalábbis nominalista tendenciák jelentkeznek nála akkor, amikor például az osztályoknak megfelelő szimbólumokat nem-teljes szimbólumoknak fogja fel, amelyek minden kontextusban teljességgel helyettesíthetők, s így az osztályokat, halmazokat érintő minden ontológiai kérdést elvben el lehet kerülni. A nem-teljes szimbólumok — amelyeket praktikus egyszerűségi okokból használunk — természetesen funkcionálhatnak úgy, mintha teljesek lennének, de ez csak pszichológiai látszat, mert valójában semmilyen létezőt sem jelölnek.

A Goodman—Quine-féle nominalizmus (megjegyezzük, hogy Quine maga nem fogadja el a nominalizmust, hanem csak azt akarta megvizsgálni, hogy meddig vihető a nominalista koncepció) — nagyobbbrészt Russell nyomdokain — azt vallva, hogy absztrakt entitásokat (például halmazokat) deszignáló bármilyen kifejezés elvileg kiküszöbölhető, egy olyan matematikai nyelv felépítésére törekszik, amelyben ilyen kifejezések nem szerepelnek. Egy nominalista nyelv felépítése járhat és járt is kezdeti sikerekkel, később azonban kiderült, hogy nincs általános módszer minden matematikai kifejezés nominalista átépítésére. Sőt — ahogy Fraenkel, Bar-Hillel és L. Henkin³² megjegyzik — minden valószínűség szerint az egész matematika nominalista módon nem is építhető fel segédhipotézisek nélkül, az egyik ilyen segédhipotézis éppen az lenne, hogy a matematika igen jelentős része semmi más, mint önmagában értelem nélküli, interpretálatlan kalkulus.

Nem várhatjuk azt, hogy a nominalizmus és a realizmus vitájában a matematika szaktudományos tartalma fog döntené. Ez ugyanis, mint Gödel a halmazelmélet esetében kimutatta,³³ mind a két interpretációval szemben invariáns. Bármelyik ontológiai értelmezést tehát csak világnézeti, filozófiai alapon lehet preferálni. Bármelyik interpretáció elfogadása bizonyos feladatok elé állítja a matematikust vagy a filozófust. Először is ki kell mutatnia, hogy interpretációja összeegyeztethető a matematikával. Hiszen található vagy lehetséges olyan nominalista vagy realista interpretáció, amely ellentmond a matematikának. A Püthagorasz-féle nominalizmus például összeegyeztethetetlen a számelmélettel, mert ez végtelen sok szám létezését köti ki, végtelen sok számjegyet azonban nem lehet leírni, Cantor platonizmusa pedig antinómiákhoz vezetett. Ha a vallott interpretáció nem egyeztethető össze a matematikával, akkor elvben két út áll a matematikus előtt: vagy elveti az ontológiai koncepció adott formáját, vagy azt állítja, hogy a matematika fejlődése az ő álláspontját fogja igazolni. Például a halmazelmélet realista értelmezésével szemben felhozott egyik ellenérv az, hogy ha a halmazok definit létezők, akkor bizonyos tulajdonsággal pedig vagy rendelkeznek vagy nem. De hogyan egyeztethető össze a realizmussal egy-

³² Fraenkel, A. — Bar-Hillel, Y.: *Id. mű* 400—401. o., Henkin, L.: *Nominalistic Analysis of Mathematical Language, a Logic, Methodology and Philosophy of Science* c. kötetben, ed. Nagel, E. — Suppes, P. — Tarski, A., Stanford Univ. Press, Stanford 1962. 193. o. (A kötetet a továbbiakban *L. M. P. S.* jellel rövidítjük.)

³³ Gödel, K.: *Id. mű.* 265. o.

részt az, hogy minden axiómarendszer vonatkozásában vannak eldönthetetlen kérdések, másrészt az, hogy nincs olyan konzisztens halmazelmélet, amely a halmazok minden matematikailag leírható tulajdonságáról számot tudna adni. Az ilyen és ehhez hasonló ellenérvek hatására kialakult egyrészt egy igen mérsékelt realizmus, amely összeegyeztethető a matematikai „tény”-ekkel. De, mint mondtuk, nem ez az egyetlen lehetséges attitűd a vitás kérdésekkel kapcsolatban. A másodikat legszebben Gödel példázza, akit bizonyos mértékig a Cantor-féle platonizmus továbbvivőjének tekinthetünk. Gödel a realizmussal szemben az eldönthetetlen kérdések létezésére — speciálisan a Cantor-sejtés eldönthetetlenségére — alapozó ellenérvre válaszolva a következőket fejti ki: „Meg kell azonban jegyeznünk, hogy az általam elfogadott nézőpont alapján semmi esetre sem oldaná meg a problémát az, ha sikerülne bizonyítani Cantor sejtésének a halmazelmélet jelenleg elfogadott axiómáiból való eldönthetetlenségét... Mert, ha a... halmazelmélet primitív terminusainak jelentéseit igaznak fogadtuk el, akkor ebből következik, hogy a halmazelméleti fogalmak és tételek valamilyen jól meghatározott realitást írnak le, amelyre vonatkozóan Cantor sejtésének igaznak vagy hamisnak kell lenni. Ezért a jelenleg feltételezett axiómákból való eldönthetetlenség pusztán annyit jelez, hogy ezek az axiómák nem írják le teljesen ezt a realitást. Mivel meg lehet mutatni azt a módot, ahogyan egy, a szokásos axiómákból eldönthetetlen kérdés mégis eldönthetővé válik, egy ilyen meggyőződés (belief) semmi esetre sem ellenkezik a valósággal.”³⁴

c) *A konceptualizmus*

A konceptualista elismeri matematikai objektumok létezését, de nem ismeri el, hogy az embertől függetlenül léteznek; ahogy ezt Barker szellemesen megjegyezte,³⁵ megőriz egyfajta realitást a számok, halmazok, függvények stb. számára, anélkül azonban, hogy bármilyen független realitást kellene feltételeznie. Leírhatóknak, „megismerhetőeknek” tartja a matematikai objektumokat, de csak azután, miután a tudat már létrehozta, megalkotta őket.

Kant és az intuicionisták eredendően konceptualisták. Kantnál, mint már említettük, a matematikai megismerésben nem a tudat számára külső létezőknek, hanem a tudat saját funkcionálásának megismeréséről van szó. Szerinte a tudat a matematikai megismerés során az önmaga alkotta világba tekint bele. Az intuicionisták, hasonlóképpen, azt vallják, hogy a matematikai objektumok létoka a tudati konstrukció, amelynek nincs külső törvényszerűsége vagy meghatározottsága, hanem szabad, autonóm tevékenység. Szerintük a matematikai objektumok konstruálhatósága az egész matematika módszertani előfeltevése; és pontosan úgy, ahogy a Newton előtti természettudomány azért volt hamis, mert csak részben felelt meg a fizika módszertani előfeltevéseinek, a fizikai entitások megfigyelhetőségének, a Brouwer előtti matematika is hamis, mert bevezet olyan matematikai fogalmakat, kijelentéseket, amelyek nem tekinthetők matematikai létezők leírásainak. A matematikai objektumok konstruálhatósága mint módszertani előfeltevés alapján nem szabad feltételezni, hogy minden matematikai problémának van megoldása. Nem szabad pusztán

³⁴ Uo. 263—264. o.

³⁵ Barker, S.: *Id. mű* 72. o.

feltételezni, hogy egy természetes szám vagy egy matematikai létező vagy rendelkezik valamilyen sajátossággal, vagy nem rendelkezik. Ha ugyanis csak ennyit mondunk, de nem mondjuk meg, hogy a két lehetőség között hogyan dönthetünk, akkor állításunk pusztán lingvisztikai jellegű, de nem ír le semmiféle matematikai létezőt. Hasonlóképpen: ha csak annyit mondunk, hogy van olyan matematikai létező, például egy szám, amelyik rendelkezik valamilyen sajátossággal, de nem mondjuk meg azt a módot, ahogyan ez a szám megalkotható, akkor állításunk matematikai objektum leírásának nem tekinthető. Egy matematikai objektum — az intuicionista számára — csak akkor létezik, ha meg lehet konstruálni: az egzisztencia a konstruálással azonos. A klasszikus matematika tiszta egzisztencia-tételei (például az analízis Weierstrass-tétele, vagy a halmazelmélet kiválasztási és jólrendezhetőségi tétele stb.) lényegében sem nem igaz, sem nem hamis állítások, hanem matematikailag *üresek*. Nem állítják objektumok létezését, mert nem állítják azokat a feltételeket, amelyek segítségével ezen objektumokat meg lehet alkotni.

A tiszta egzisztencia-tételek a matematikai nyelv logikai — vagy feltételezett logikai — szerkezetéből levont pszeudomatematikai állítások (az egzisztencia indirekt bizonyítása az intuicionista számára lényegében a nyelv szerkezetéből levont ontológiai következtetés, s mint ilyen nem adekvát a matematikai létezés eldöntésére), amelyek vonatkozásában két attitűd lehetséges az intuicionista számára. Vagy megadja a konstruktív bizonyításukat, azaz megmutatja azt a módot, ahogyan az objektumokat a tudatban meg lehet alkotni, vagy pedig elveti őket. S mivel elég sok tiszta egzisztencia-tételre nem adható konstruktív bizonyítás, ezért az intuicionisták a klasszikus matematika nagy részét egészében elvetik. Egy nem teljesen érthető *horror infiniti* alapján — amely szerint a tudat az intuícióban csak a potenciális végteleneket tudja megragadni, az aktuálisakat azonban nem — így lényegében az egész Cantor-féle halmazelmélet kikerül az intuicionista matematikai rendszerekből.

A következőkben néhány kritikai megjegyzést szeretnénk tenni az intuicionizmus speciálisan filozófiai oldalával kapcsolatban.

Először is: az intuicionizmus a matematika interszubjektivitását csak ad hoc feltevésekkel igyekezhethet megmenteni. Amikor azt akarja megmagyarázni, hogy *különböző* emberek számára miért van mégis *egy* matematika, egy Kantéhoz hasonló „tudat általában” feltételezésére szorul. Ha a nyelv csak lehetséges, de nem szükséges feltétele a matematikának, és ha a matematikának a tudaton kívüli dolgokhoz semmi köze, akkor milyen alapon állítjuk, hogy a másik ember tudatában ugyanazok a konstrukciók hozhatók létre vagy alakultak ki, mint a mieinkben. Világos, hogy az a feltételezés, hogy a tudat szerkezete, funkcionálásának módja minden embernél megegyezik, nem más, mint újraállítás annak a ténynek, hogy a matematikai konstrukciók minden embernél azonosak, hanem pedig magyarázata az interszubjektivitásnak. A realizmus és a nominalizmus a matematika interszubjektivitását a matematika tárgyának objektivitásával magyarázza, azzal, hogy a függvények, halmazok vagy egyedi tárgyak a megismerő individuum számára valamilyen értelemben adottak, tőle függetlenül léteznek, s megismerésük ugyanolyan interszubjektív folyamat, mint például a fizikai tárgyak megismerése.

Másodszor — ez az ellenvetés Körner részletes argumentációjának³⁶ rövidített formája —: még ha interszubjektívek is a konstrukciók, akkor sem

³⁶ Körner, S.: *Id. mű* 136–139. o.

biztos, hogy mindenki számára egyformán kétségbevonhatatlan tudati tények. Hiszen az intuicionisták között is igen komoly viták folynak bizonyos konstrukciók elvégezhetőségéről, lehetőségéről, amit nem tekinthetünk pusztán a konstrukciók nyelvi kifejezése körüli vitáknak. Az ilyen nem nyelvi természetű nézeteltérések fennállása és állandó lehetősége azt látszik jelezni, hogy e vonatkozásban sincsenek abszolút evidens tudati tények.

Harmadszor: bizonyos ismeretpszichológiai vizsgálatok alapján igen kétséges, hogy a matematikai nyelv közvetítése nélkül el lehet-e gondolni, meg lehet-e konstruálni matematikai objektumokat.

Negyedszer — és ez a legfontosabb ellenvetésünk —: ha a matematikának nincs köze a külvilághoz, ha „a matematikai gondolkodásra az a jellemző, hogy nem fejez ki igazságot a külső világra vonatkozóan, hanem kizárólag a tudati konstrukciókkal kapcsolatos”,³⁷ akkor hogyan lehetséges az, hogy a matematika alkalmazható a megfigyelhető világra.

Ötödször: a matematikai gondolkodás nem szabad tevékenység, hanem determinált. Amellett, hogy a matematikai konstrukcióknak olyan limitációi vannak, mint az ellentmondások — például nyolccal osztható primszámok vagy négyszögletű körök — megkonstruálhatatlansága, úgy gondoljuk, hogy a döntő éppen a matematikai gondolkodás társadalmi-történelmi determináltsága. Hiszen az ellenkezőjét feltételezve — hozzávéve azt, hogy világnézeti okokból a matematikai objektumok realista interpretációját is elvetjük — lehetetlenné válnék a matematikai megismerés megállapítható történelmi trendjének figyelembe vétele. Ha a matematikai gondolkodás lényege éppen a szabadsága, a külső feltételektől való teljes függetlensége — ahogy ezt az intuicionisták mellett igen sokan mások, például Cantor is, hangsúlyozzák —, akkor egészen érthetlenné válik az, hogy a matematika fejlődésének különböző szakaszaiban miért más-más problémákról gondolkodtak — hogy például miért kísérleteztek már a görögök is az analízis megalkotásával, hogy ezek a kísérletek azért maradtak abba, mivel nem volt rá társadalmi szükséglet. És amikor ez a társadalmi szükséglet — elsősorban a fizika oldaláról — jelentkezett, akkor, bár pontatlanul és hibásan, de megalkották (Newton és Leibniz). Nagyon jó alapunk van tehát feltételezni — a matematika elvi szabadságát vallókkal szemben —, hogy a matematikai gondolkodás is determinált, végső soron társadalmilag-történelmileg meghatározott folyamat.

E rész befejezésül meg kell jegyeznünk, hogy mind a realizmussal, nominalizmussal és konceptualizmussal, mind pedig a logicizmussal, intuicionizmussal és formalizmussal kapcsolatban a mai helyzet az itt leírtnál jóval bonyolultabb. Ezek a filozófiai irányzatok — bár számos filozófiai és matematikai előddel rendelkeztek — főleg a századforduló körül alakultak ki, s azóta a viták és bírálatok nyomán és eredményeként az eredetileg éles filozófiai kontúrok elmosódtak; ma az egyes filozófusok vagy matematikusok koncepcióit inkább az átfedések, keveredések jellemzik.

III. Néhány pozitív megjegyzés

Amikor kritikailag elemezve elvetjük a polgári filozófia megoldási javaslatait, nem szabad figyelmen kívül hagynunk, hogy a marxista filozófia feladata, hogy történelmi és materialista módon felvázolja, szisztematikusan

³⁷ Heyting, A.: *Id. mű* 17. o.

elemezze s részletesen kidolgozza a matematikai megismeréssel kapcsolatos kérdések helyes, dialektikus megoldását. Az itt következők csupán a kérdések helyes felvetéséhez kívánnak hozzájárulni. Kezdjük talán a polgári filozófia módszertani kiinduló pontjainak rövid bírálatával.

Mint már említettük, a racionalisztikus, apriorisztikus ismeretelméletekben az „a priori ismeret” kifejezésnek két, egymástól élesen meg nem különböztetett és meg sem különböztethető jelentése van: egyrészt a jellege, másrészt az eredete, kialakulása szerint a priori ismeretet jelenti. Akik az a priori tudás létezését vallották, általában lehetetlennek tartották, hogy megfigyelések, tapasztalatok vezethessenek el hozzá. Bizonyos ismeretek falzifikálhatatlanságát összeegyeztethetetlennek tartották a tapasztalati kialakulásukkal. A matematikában az állandó és közvetlen megfigyelési kontroll hiányát annak jelzésül fogták fel, hogy a matematikai fogalmak aktuálisan vagy potenciálisan velünk született eszmék, hogy a megfigyelések csak alkalmat nyújthatnak a matematikai ismeretek kialakulására, a megfigyelések csak bábái lehetnek a matematikai tudásnak, de sohasem a szülők. Mint azonban már mondtuk, a megfigyelési kontroll — pontosabban szólva: a tapasztalattal való összehasonlítás kísérleti természettudományos módjának — hiánya nem elégséges a matematika aprioritásának megállapításához. A racionalisták és általában az apriorizmus képviselőinek egyik legnagyobb hibája éppen az, hogy mindig a történetileg kialakult, a kész, az adott ismeretek rendszeréből indulnak ki, s miután ebben találhatók olyan elemek, amelyeket közvetlenül, a megismerés adott szintjén már kísérletileg nem kontrollálunk, levonják azt a következtetést, hogy ezek az ismeretek semmilyen értelemben, sem genetikusan, kialakulásukon, sem közvetve, társadalmi funkcióikon keresztül nem is kapcsolhatók az emberi tapasztalatokhoz. Ez a következtetés azonban megalapozatlan, nem jogosult, hiszen a kísérlettel közvetlenül igazolható és a megfigyelésekhez közvetve kapcsolható ismeretek között nincs éles határ — az ismeretek a prioriakra és a posterioriakra való felosztása tehát hibás. Nem a priori és nem a posteriori ismeretünk van, hanem csak egyféle az ember társadalmi, történelmi gyakorlatából lezármazott emberi megismerés és ismeret van, s csak ezen belül vannak *relatív, viszonylagos* differenciák. A matematika aprioritásának illúziója a polgári filozófiában azért alakult és alakulhatott ki, mert negligálva a matematika és a gyakorlat kapcsolatát, a matematikai megismerésnek éppen ezt a társadalmi, történelmi voltát hagyta figyelmen kívül. Ahhoz, hogy a matematika reális filozófiai képét körvonalazhassuk, el kell vetni az a priori megismerés világnézetileg elfogadhatatlan előfeltételezését, s a matematika társadalmi, történelmi összefüggéseiből kell kiindulnunk. Minden olyan értelmezés, amely figyelmen kívül hagyja a matematika társadalmi, történelmi összefüggéseit, s nem helyezi el a matematikát az emberi gyakorlat megfelelő kontextusában, vagy idealizmushoz, vagy pedig a matematikai megismerés bonyolult dialektikus folyamatáról számot adni nem tudó „empirizmus”-hoz vezet. Minden olyan értelmezés, amely a matematikai megismerés sajátosságainak magyarázatakor nem a matematikának mint sajátos társadalmi objektívációnak a praxisból és a praxisban megkötött ismeretekből való kialakulására épít, nem képes kikerülni az idealista apriorizmus köréből, nem képes helyes magyarázatot adni a matematikának az emberi ismeretek rendszerében elfoglalt sajátos helyére. Hasonlóképpen: minden olyan filozófiai értelmezés, amely elvonatkoztat a matematikai tudás társadalmi funkcióitól, a matematikát végső soron csak az emberi gondolkodásra, vagy ennek szabályaira tudja

visszavezetni, s így elvben képtelen a matematika és az anyagi valóság kapcsolatának tisztázására.

Ha viszont abból indulunk ki — mint ahogyan csak ebből indulhatunk ki —, hogy a matematika az emberi gyakorlatból alakult ki, és hogy a gyakorlattal — a társadalmi funkcióin keresztül — való kapcsolata, bár egyre bonyolultabb és közvetettebb lett, fejlődésének későbbi szakaszaiban sem szakadt meg, akkor szembe kell néznünk azzal az ellenvetéssel, hogy ez a magyarázat „semmiféle alapokat nem biztosít” a matematikának. Mind az ellenérv, mind pedig a válasz attól függ, hogy mit értünk a „matematika alapjain”. Ezt a kifejezést a modern irodalomban általában kétféle értelemben használják; az egyik értelme szerint a matematika alapjai a halmazelmélet, mert fogalmai és tételei segítségével lényegében véve a matematika minden ága felépíthető. Az „alap” szó használata azonban — mint ezt Gödel is hangsúlyozta — ebben az esetben zavaró, mert a halmazelmélet ebben az értelemben olyan funkciót tölt be a számelmélet, analízis stb. vonatkozásában, mint például a statisztikus mechanika a fenomenológiai termodinamika vonatkozásában, vagyis az az elmélet, amelyre redukáljuk a klasszikus matematika nagy fejezeteit s így, Gödel kifejezésével élve, inkább explanatorikus elmélete a klasszikus matematikának, semmint alapja. Az „alap” kifejezés másik értelme szerint a matematika alapjai a matematikai megismerésnek valamilyen ismeretelméleti alapvetése. A logicizmus, amikor a matematika végső alapját a logikai kijelentésekben látja, vagy Hilbert, amikor a kétségbevonhatatlan bizonyosságú észlelési kijelentésekkel köti össze a matematikát, és ezekben keresi a matematikai megismerés megingathatatlan és az antinómiák ellen egyszer s mindenkorra megvédő, szilárd oszlopát, világos, hogy ebben a második értelemben használja a „matematika alapjai” kifejezést. Ebben az értelemben a matematika „alapjai”-nak keresése egy ismeretelméleti program, olyan ismeretek megtalálását célozza, amelyek megbízhatók, abszolút bizonyosak, elvben inkorrigibilisek, amelyekre, mint alapokra felépíthető lenne az egész matematika, vagy amelyekkel mint szilárd, sohasem ingadozó oszlopokkal az antinómiák által bizonytalanná és elvben korrigibilissé tett matematikai épület alátámasztható lenne,

Egy „végső tudásalap” megkeresésére irányuló filozófiai program nemcsak a matematika modern filozófusai oldaláról felmerülő igény. Régebben például az egész megismerés „alap”-jairól szóló vita formájában merült fel, s Descartes cogito-argumentuma lényegében egy ilyen ismeretelméleti oszlop megtalálását célozta. A fizika századeleji „válsága” is felvetette — a fizikai megismerés vonatkozásában — a biztos, inkorrigibilis „alapok, oszlopok” utáni vágyat. Különböző koncepciók (pl. a Bécsi Körben Carnap, Neurath, Schlick stb.)³⁸ láttak napvilágot, de bármennyire is eltértek egymástól abban, hogy milyen ismereteket lehet bizonyosaknak tekinteni, egyben megegyeztek: oszlop vagy alap csak *ismeret* lehet, a fizikai megismerés bizonytalan, korrigibilis épületét csak inkorrigibilis *ismeretekkel* lehet alátámasztani. Nem nehéz észrevenni, hogy a matematikával, illetve az ismeretelmélet alapjaival kapcsolatos problémák esetében lényegében ugyanerről az általános filozófiai kérdésről van szó, hogy a matematika alapjainak keresése mind a logiciz-

³⁸ L. pl. Schlick, M.: *Über das Fundament der Erkenntnis*. Erkenntnis, Vol. IV. 1934. — újranyomva a *Logical Positivism* c. kötetben Ed. Ayer, A. J. The Free Press, Glencoe, Ill. 1959.

mus, mind Hilbert esetében lényegében ugyanilyen inkorrigibilis ismeretek — illetve, az intuicionizmus esetében valamilyen kétségbevonhatatlan tudati „tények” — feltárására irányul. Ezek a bizonyos ismeretek mintegy garantálnák a matematika megbízhatóságát, elfogadhatóságát; a matematika alapjainak bizonyossága elvileg veszélytelenné tenné a felsőbb emeleteken való tartózkodást, az alapok vagy oszlopok biztonsága mintegy az egész épületre átszármaznék.

Mindenesetre meg kell jegyeznünk, hogy eleve kétséges a matematikai tudásnak más ismeretekre való alapozása, hiszen ehhez fel kellene tételezni, hogy az alapozó kijelentések minimum *bizonyosabbak*, mint a matematika. Ebben az esetben viszont felmerül a megalapozó ismeretek megalapozásának a problémája is, S így vagy egy végtelen regresszushoz jutunk, vagy pedig — mint a megalapozási folyamat végpontjait, azaz az egész matematika bizonyosságának logikai kiindulópontjait — végül is abszolút bizonyos ismereteket kell feltételeznünk, amelyekben soha senki sem kételkedhet. Ha a logicizmus ezeket az ismereteket analitikusaknak tartja, akkor azt kell mondanunk, hogy egyrészt analitikus és szintetikus megkülönböztetése csak relatív, másrészt pedig volt már rá több eset, hogy logikai törvények (kizárt harmadik) igazságát is kétségbevonták. Továbbá, mint már említettük, a logicizmusnak határozott logika-konceptióval kell rendelkeznie ahhoz, hogy a matematika analiticitását kimutassa; de ha elvetjük ezt a logika-felfogást, akkor elvben nem lehetetlen az, hogy mégha sikerülne is a matematikát a logikára visszavezetni, ez nem jelentene mást, mint hogy a logikai törvények sem analitikusak — Russell ezt el is ismerte, Ezek természetesen csak elvi lehetőségek, amelyek azonban azt mutatják, hogy nem lehet a logikában keresni a matematika „alapjait”. Ha megalapozó ismereteknek nagyon egyszerű észlelési ítéleteket tartunk, mint például Hilbert, akkor ismét csak azt mondhatjuk, hogy nincs olyan észlelési ítélet, amelyben ne kételkedhetnénk.

Az intuicionisták világosan látják, hogy ismeretek ismeretekre nem alapozhatók, valahol ki kell jutni a megismerésünk köréből, s ezért egyfajta tevékenységet vesznek fel a matematika támpilléréül — *tiszta tudati* tevékenységet. „A logika nem az a talaj, amelyen én állok... — mondja Heyting. — A logika csak olyasmi megalapozására kellene, ami a matematikai elvek-nél jóval ziláltabb és kevésbé direkt elveket tartalmaz. A matematikai konstrukciónak azonban az ész számára olyan közvetleneknek és eredményüknek annyira világosaknak kell lenniök, hogy ne szoruljanak semmilyen megalapozásra.”³⁹ De tartható-e az intuicionizmus doktrínája, lehetséges-e, hogy a matematika megbízhatósága tiszta tudati tevékenységen nyugszik? Egyik újabb filozófiai jellegű cikkében Heyting maga is elismeri, hogy nem: miközben összehasonlítja az 1930-as matematika-filozófiai helyzetet az 1960-assal, megjegyzi: „Nem bizonyult intuitíve világosnak, hogy intuitíve mi világos a matematikában”, majd bevezeti az „evidencia” csökkenő fokozatú skáláját.⁴⁰

De kell-e egyáltalán a matematikai megismerés számára általános megalapozás? Megítélésünk szerint, ha ez a megalapozás speciális ismeretek kiválasztását és abszolút bizonyossággal való felruházását, vagy az intuicionista „tudati önbizonyosság”-ot jelenti, akkor nem. Ha ez a megalapozás

³⁹ Heyting, A.: *Id. mű* 14. o.

⁴⁰ Heyting, A.: *After Thirty Years, L.M.P.S.* 195. o.

azt célozza, hogy a matematikát egyszer s mindenkorra megmentse az ellentmondásoktól, akkor nemcsak hogy nem szükséges, hanem nem is lehetséges, hiszen ahogy Black megjegyzi,⁴¹ ez azt is jelentené, hogy a tudomány egyszerűen katalógussá degradálódott, hogy további valódi fejlődésre képtelen.

Ha azonban a matematika ismeretelméleti alapjai — természetesen végső soron — a társadalmi gyakorlat, akkor ez az alap, a matematikai tudás ezen *végső alapvetése*, amelyből matematikai ismereteink bizonyossága származik, és amelyhez matematikai elméleteink bonyolult közvetítéseken keresztül visszatérnek, nem biztosít, nem ad abszolút inkorrigibilitást. bizonyosságot, de nem is követel meg ilyet: csak relatív bizonyosságra van szüksége, és ezt a matematika nyújtja is.

Úgy látszik, hogy filozófiai kiindulópontunk a fent említett ellenvetéssel szemben megvédhető, s próbáltuk is körvonalmazni azt a módot, ahogyan. Észrevehető az is, hogy centrális jelentőségűnek a matematikai megismerés sajátosságainak filozófiai, történelmi és materialista elemzésekor a gyakorlathoz való viszony problémáját tartjuk. Matematika és gyakorlat viszonya nagyon sok síkon felvethető probléma: itt e viszony *egyik oldalával*, a matematika praxisból való kialakulásával kapcsolatban szeretnénk néhány megjegyzést tenni. A viszonynak ez az oldala döntő fontosságú, hiszen a „szülő vagy bába” probléma itt dönthető el. Az apriorisztikus matematika-filozófiák alapvető hibája, hogy nem tartják lehetőnek a matematika gyakorlatból való kialakulását. Ha azonban feltételezzük, hogy matematikai tudásunk szülője történetileg a gyakorlat, akkor lehetőségünk van azoknak a körülményeknek az ismeretelméleti rekonstrukciójára, amelyek kialakulásához elvezettek. Hasonlóképpen: a matematika gyakorlati eredetét vallva, kereshetjük azokat a körülményeket, amelyek a matematikai objektumok kialakulásához vezettek, megvizsgálhatjuk azokat a feltételeket, amelyek mellett egy nyelv segítségével azok az objektumok társadalmilag rögzítődtek, s nem utolsósorban materialista magyarázatát kaphatjuk a matematika alkalmazhatóságának is,

Nem vállalkozhatunk itt arra, hogy a matematika, mint sajátos társadalmi objektíváció kialakulásának ismeretelméleti rekonstrukcióját adjuk, hogy felvázoljuk azt a bonyolult, nagyszámú közvetítésen keresztül folyamatot, amely a praxisból egy viszonylag önálló tudomány, az anyagi valóság megismerésének egy nagyon sajátos módja kialakulásához vezetett. Pusztán csak egy példa elemzésén keresztül utalni szeretnénk a társadalmi praxist alapul vevő és ebből startoló ismeretelméleti rekonstrukció egyik központi problémájának lehetséges megoldására. Mint Vajda Mihály kimutatta,⁴² rendkívül fontos azoknak a körülményeknek és feltételeknek szociológiai és ismeretelméleti jellemzése, amelyek a matematikai objektumok, a matematikai „idealitások” szférájának kialakulásához vezettek. Ha az anyagi valóságnak vannak olyan sajátosságai, ha találhatók olyan relációk stb., amelyek a gyakorlatban megmutatkoznak és az emberi tudatban visszatükröződnek, akkor a matematikai objektumokat nem kell az emberiség számára eleve adottaknak feltételezni, nem kell egy platóni realitássférát posztulálni matematikai ismereteink tárgyának megmagyarázására. Ha, bár nagyon bonyolult módon, áttételeken keresztül, de a világ mondott tulajdonságai

⁴¹ Black, M.: *Id. mű* 3. o.

⁴² Vajda M.: *Zárójelbetett tudomány (A husserli fenomenológia tudományfelfogásának bírálatahoz)*. Kandidátusi értekezés, kézirat.

rögzítődnek meg „absztrakt” entitásokként (elsősorban egy nyelvben megtestesülve), akkor nem kell a matematikai objektumokat pusztán az emberi tudat termékének tartani, és a matematika interszubjektivitásának megőrzéséhez sem kell *ad hoc* feltételezéseket segítségül hívni, hanem a matematikai objektumok és az egész matematikai megismerés interszubjektivitása az anyagi világ ilyen mennyiségi tulajdonságainak objektivitásából következik.

A példa, amelyet az itt mondottak illusztrálására hozunk fel, a számok mint ilyen társadalmilag rögzítődött „absztrakt” entitások kialakulása. Ismeretes, hogy a köznapi gyakorlat már igen primitív fokon is megkövetelte a számolást mint sikeres tevékenységet, hiszen a számoláshoz gyakorlati érdekek fűződtek. A számolás, néprajzi tanúság szerint, kezdetleges formában konkrét tárgyak halmazai közötti ekvivalencia-teremtés művelete volt: egy megszámlálандó és egy standard, de változtatható számosságú halmaz (például bevágások egy fadarabban, kavicsok, számolópálcikák stb.) ekvivalenciájának megállapítása. A gyakorlat fejlődése és kiszélesedése, főleg az árucseré és a kereskedelem kialakulása, szükségessé tette egy nem emberről emberre változó, hanem egy társadalmilag általános és társadalmilag a nyelv segítségével rögzített standard kialakítását, mintegy a gyakorlat során előforduló bármilyen lehetséges halmaz „egyenértékét”, a számokat. A halmazok közötti ekvivalencia-teremtés gyakorlata során és segítségével a már nyelvi formában rögzített vagy félig-meddig rögzített standard egyes elemeit, a számokat felruházták bizonyos tulajdonságokkal és bizonyos relációkba állították, olyan tulajdonságokkal és olyan relációkba, amelyek a számolópálcákkal, kavicsokkal stb. végzett sikeres tevékenységnek voltak az eredményei. A számolás gyakorlata és e gyakorlat társadalmilag univerzálissá válása — a köznapi megismerésen belül — kialakította az „absztrakt” entitások egy osztályát, és többé-kevésbé meghatározta azokat a „tulajdonságokat”, amelyekkel ezen entitások rendelkeznek vagy rendelkezniük kell ahhoz, hogy a számolópálcákkal végzett tevékenységhez hasonlóan velük is sikeresen lehessen tevékenykedni, azaz a praktikus élet szituációiban adekvátan lehessen használni őket.

A matematika tudománya, a számok tudománya mint sajátos társadalmi objektíváció a szellemi és fizikai munka megosztása idején kezd kialakulni, s ismeretelméletileg erre a folyamatra jellemző, hogy az adott gyakorlati szükséglettől és szituációtól függetlenül — mintegy önmagukért — kezdik vizsgálni a köznapi megismerés szférájában kialakult és a nyelvben rögzítődött „absztrakt” entitásokat (ilyesmi vagy ehhez hasonló már jelentkezett a babiloni aritmetikában is). A matematika ténylegesen *dezanthropomor*f társadalmi objektívációvá akkor válik, amikor kialakul és állandósul az „absztrakt” entitások vizsgálatának és a róluk szóló állítások igazolásának specifikus módja.

Az, amit idáig mondtunk, természetesen nem ismeretelméleti rekonstrukció, hanem csak arra mutat, hogy miképpen lehetséges a matematikai megismerés specifikumait, a matematikai objektumokat például, a társadalmi gyakorlatból kiindulva történetileg értelmezni. A matematika későbbi fejlődése is csak a matematika kialakulása alapján válik majd érthetővé: a matematikai nyelv és „konceptuális séma” társadalmilag rögzítődve, majd egyik generációról a másikra öröklődve lehetőséget nyújt újabb és újabb „absztrakt” entitások megvizsgálására, illetve bevezetésére (új „absztrakt” entitások kialakítására természetesen nincs általános recept; a különböző

módok közül csak a műveletek általánosítását, az absztrakcióval való definíciót és az analógiát említjük meg mint a leggyakrabban használtakat). A matematikai ismeretek viszonya a gyakorlathoz a fejlődés során egyre közvetettebb lesz, egyre szélesebb és tágabb közvetítésrendszer segítségével kapcsolódnak a gyakorlathoz, de ezek a közvetítések léteznek, és nemcsak a matematikától a gyakorlat felé, hanem fordítva, a gyakorlattól a matematika felé is. A matematikai gondolkodás végső soron nem a matematikusok „szabad” tevékenysége, hanem hosszabb történeti távlatból tekintve társadalmilag meghatározott folyamat.

Világosan tudatában vagyunk annak, hogy ezek a befejező megjegyzések nem megoldásai a matematika filozófiai problémáinak, hanem csak kiindulópont egy ilyen megoldás felé. Megítélésünk szerint azonban a matematika filozófiai kérdéseinek társadalmi, történelmi aspektusból való megközelítése — amelyben a döntő mozzanatok a matematika gyakorlatból való kialakulása és társadalmi funkciója, más ismeretekhez, más tudományokhoz való viszonya, és ezeken a közvetítéseken keresztül a gyakorlathoz való viszonya — egy valóban materialista, a matematikai megismerés specifikumairól számot adni tudó matematika-filozófiának elengedhetetlen feltétele.

О НЕКОТОРЫХ ФИЛОСОФСКИХ ВОПРОСАХ МАТЕМАТИКИ

Ференц Алтрихтер

Автор обсуждает из философских вопросов математики, имеющих центральное значение; проблемы характера математических знаний и природы математических объектов. В первой части статьи критически анализируются *типичные* буржуазные философские концепции, возникшие из стремления ответить на поставленные вопросы: так, логицизм, понимающий математическое знание как аналитическую априорность; интуицизм, понимающий его как синтетическую априорность и т. п.: реалистические (платонические), номиналистические и концептуалистические трактовки математических объектов. Во второй части статьи говорится о том, что гносеологические и онтологические проблемы математики можно решить лишь имея в виду общественные взаимосвязи этой науки (её возникновение, отношение к практике и к другим областям знания, её развитие и т. п.).

ON SOME PHILOSOPHICAL PROBLEMS OF MATHEMATICS

by Ferenc Altrichter

Among the central questions in the philosophy of mathematics, the author deals with the problems concerning the character of mathematical knowledge, and the nature of mathematical objects. The first part of the paper gives a critical analysis of the *typical* bourgeois philosophical conceptions which attempt to answer these questions. In respect to the question of mathematical knowledge, logicism, which takes it to be analytic a priori, intuitionism, considering it as synthetic a priori, etc. are examined; concerning the nature of mathematical objects, the author surveys the realist (Platonistic), nominalist and conceptualist theories, etc. In the second part, the view is expounded, that only when taking into consideration the social connections of mathematics (its rise, its relation to practice and to other kinds of knowledge, its development, etc.) can the epistemological and ontological problems of this discipline be solved.