Modális logikák II.

RUZSA IMRE

Cikkünk I. részében ismertettük a modalitás fogalmát, majd a kijelentéskalkulus és az osztályalgebra felhasználásra kerülő elemeit. Részletesen kifejtettük az alethikus modális logika de dicto típusát, és röviden érintettük az ezzel teljesen analóg szerkezetű alethikus de re kalkulust. Cikkünk második részében további modális elméleteket mutatunk be. A kifejtés szorosan csatlakozik az I. részhez, annak ismeretét föltételezi.

Az exisztenciális modalitás

Ez az elmélet tulajdonságok *terjedelmére* vonatkozó kijelentésekkel foglalkozik. Így de re típusú, és csakis az lehet. Viszont — az alethikus de re-modalitástól eltérően — operátorai tulajdonságokra alkalmazva nem tulajdonságokat, hanem kijelentéseket hoznak létre.

Kiindulunk ismét egy (nem üres) U univerzumból és ezen értelmezett tulajdonságokból. Nevezzünk egy tulajdonságot *általánosnak*, ha U minden eleme rendelkezik vele, *exisztenciálisnak*, ha U-nak legalább egy eleme rendelkezik vele, *különösnek*, ha van U-nak olyan eleme is, amely rendelkezik vele, és olyan eleme is, amely nem rendelkezik vele, végül *üresnek*, ha U egyetlen eleme sem rendelkezik vele. A tulajdonságok e négy tulajdonságával foglalkozik az exisztenciális modális elmélet.

Jelöljük azt a *kijelentést*, hogy a P tulajdonság *általános*, $\mathbf{A}P$-vel, azt pedig, hogy P *exisztenciális*, $\mathbf{E}P$-vel.[3] $\mathbf{A}P$ tehát így olvasható: 'U minden eleme P-tulajdonságú', $\mathbf{E}P$ pedig így: 'U-nak van (legalább egy) P-tulajdonságú eleme'. A másik két modális tulajdonságra vonatkozó kijelentést újabb operátor fölvétele nélkül, az osztályalgebra és a kijelentéskalkulus műveletei segítségével kifejezhetjük. Az a kijelentés, hogy P *üres* tulajdonság, nyilván $\neg\mathbf{E}P$-vel fejezhető ki ('nem igaz, hogy U-nak van P tulajdonságú eleme'), az pedig, hogy P *különös* tulajdonság, kifejezhető $\mathbf{E}P \wedge \mathbf{E}\llcorner P$ alakban ('U-nak van P-tulajdonságú és nem-P-tulajdonságú eleme is'). Végül $\mathbf{A}$ is kifejezhető $\mathbf{E}$-vel: az, hogy P általános, egyenértékű azzal, hogy $\llcorner P$ üres, tehát $\mathbf{A}P$ ugyanaz, mint $\neg\mathbf{E}\llcorner P$. Így a négy modalitást kifejeztük eggyel, az exisztenciálissal. De az exisztenciális helyett az általánosat is választhattuk volna, hiszen $\mathbf{E}P$ ugyanaz, mint $\neg\mathbf{A}\llcorner P$.

[3] A logikai függvénykalkulusban néha ezeket a jeleket használják föl az általános és az exisztenciális kvantor jelölésére. E jelek lényegében itt is ugyanilyen jelentésűek. A logikai függvénykalkulusban azonban használatuk köre sokkal szélesebb.

Az exisztenciális modális elmélet formális nyelvét **E**-rendszernek fogjuk nevezni. Ezt a rendszert a következőképp írhatjuk le.

Ha Γ az osztálykalkulus egy kifejezése, akkor az $\mathbf{E}(\Gamma)$ jelsorozatot az **E**-rendszer egy *prímformulájának* mondjuk; Γ-a prímformula *magja*.

(Az **A** operátort rövidítésnek tekinthetjük $\neg\,\mathbf{E}\,\llcorner$-re.)

Az **E**-rendszer *formulái* kijelentésatomokból *és* **E**-prímformulákból ugyanúgy épülnek föl, mint a kijelentéskalkulus formulái kijelentésatomokból. (Rendszerünk formuláival tehát az exisztenciális kijelentéseken kívül tetszőleges kijelentéseket is ki tudunk fejezni.)

Zárójel-elhagyási konvenciók: mint az $\mathbf{M}_1$-rendszerben.

A tautológiák kiszámításához az $(M1)$ — $(M4)$ elvek analogonjait kell elfogadnunk:

$(E1)$ *Az* **E**-*disztribució elve.* $\mathbf{E}\,(P \cup Q)$ egyenértékű $\mathbf{E}P \vee \mathbf{E}Q$-val.

$(E2)$ *Az* **E**-*extenzionalitás elve.* Ha $\Gamma \equiv \Delta$, akkor $\mathbf{E}\,\Gamma \leftrightarrow \mathbf{E}\,\Delta$.

$(E3)$ *Az univerzum általánosságának elve.* Ha $\Gamma \equiv U$, akkor $\mathbf{A}\Gamma$ igaz. (Más megfogalmazásban: ha $\Gamma \equiv \emptyset$, akkor $\mathbf{E}\Gamma$ hamis.)

$(E4)$ *Az univerzum exisztencialitásának elve.* Ha $\Gamma \equiv U$, akkor $\mathbf{E}\Gamma$ igaz.

Ezek az elvek teljesen evidensek, elfogadásuk nem szorul magyarázatra.

Egy formula értékelését a következőképpen végezzük:

Kiküszöböljük az esetleg előforduló **A**-operátorokat. Összegyűjtjük a tetszőleges osztályokat jelentő $P_1, P_2, \ldots, P_n$ betűket. Valamennyi prímformula magját pótoljuk a $P_1, \ldots, P_n$ betűk fölötti perfekt diszjunktív normálformájával, $(E2)$ alapján. Ha valamelyik ezek közül $\emptyset$-nak bizonyulna, akkor $(E3)$ alapján a szóban forgó prímformula helyébe h-t írunk. A többtagú uniókra viszont alkalmazzuk az **E**-disztribució elvét; így kapjuk az **E**-atomokat. Ezzel a preparációs eljárást befejeztük. Az értékelés során a kijelentésatomokat és a különböző **E**-atomokat egymástól függetlenül értékeljük, ugyanúgy, mint a kijelentéskalkulusban a kijelentésatomokat.

Az alethikus modalitás értékelési utasításában szereplő (c) korlátozásra itt nincs szükség, hiszen a prímformulák magjaiban $p, q, r, \ldots$ betűk nem szerepelhetnek (mint az $\mathbf{M}_1$-rendszerben), csak tulajdonságokat jelentő $P, Q, R, \ldots$ betűk. Itt is be kell azonban tartani a következő korlátozást: Ha az **E**-atomok magjainak uniója azonos az univerzummal, akkor minden értékelésben legalább egy **E**-atomot i-re kell értékelni.

Modális operátorok iterációjára itt nincs lehetőség, hiszen **E** és **A** csak tulajdonságokra értelmes, kijelentésekre nem. $\mathbf{EE}P$ vagy $\mathbf{AE}P$ értelmetlen, hiszen $\mathbf{E}P$ már nem tulajdonság, hanem kijelentés; nem alkalmazható rá **E** vagy **A**. Így a redukciós elvek analogonjai sem jöhetnek figyelembe.

Elméletünkben kényelmesen tárgyalhatók pl. a szillogisztikus következtetések. Ez elsősorban azon múlik, hogy a szillogisztikus következtetésekben szereplő ún. kategorikus kijelentések rendszerünkben szimbolizálhatók.

Az ún. **a**-típusú kategorikus kiejelentés iskolapéldája: 'Minden ember halandó'. Általános alakja: 'Minden P (tulajdonságú dolog) egyben Q (tulajdonságú) is', ami azt jelenti, hogy a P tulajdonság része a Q tulajdonságnak, azaz hogy $P \supset Q \equiv U$, mint az osztályalgebráról szóló részben megjegyeztük. Ez a kijelentés pedig rendszerünkben $\mathbf{A}\,(P \supset Q)$ alakban szimbolizálható.

Az ún. **e**-típusú kategorikus kijelentés egy példája: 'Egyetlen vizsgázó sem bukott', vagy kissé mesterkéltebben: 'Minden vizsgázó nem-bukott'. Általános alakban: 'minden P nem-Q'. Ez nyilván azt jelenti, hogy P része $\llcorner Q$-nak, így rendszerünkben $\mathbf{A}\,(P \supset \llcorner Q)$ alakban fejezhető ki.

Az ún. **i**-típusra példa: 'Némely fém jó vezető'. Általánosan: 'Némely P (tulajdonságú dolog) egyben Q (tulajdonságú) is'. Ez azt jelenti, hogy a $P \cap Q$ tulajdonság nem üres (van olyan dolog, ami P is meg Q is), így rendszerünkben $\mathbf{E}(P \cap Q)$-val fejezhető ki.

Végül az ún. **o**-típusú kategórikus kijelentés 'némely P nem-Q' alakú, pl. 'Némely négyszög nem trapéz'. Ez azt fejezi ki, hogy P és $\llcorner Q$ metszete nem üres, tehát rendszerünkben $\mathbf{E}(P \cap \llcorner Q)$-val szimbolizálható.

Illusztrációként nem tiszta szillogisztikus következtetést mutatunk be, hanem egy kissé bonyolultabb példát, amelyben modális és nem-modális komponensek is szerepelnek.

Tekintsük az alábbi következtetést:

Premisszák: Ha a darab megbukik, akkor a rendezés felszínes és a színészek egyike sem áll hivatása magaslatán. Ha a rendezés felszínes, akkor némely színész vagy hivatása magaslatán áll, vagy elfogult a szerzővel szemben.

Konkluzió: Ha a darab megbukik, akkor a szerzővel szemben elfogultak némelyike nem áll hivatása magaslatán.

E következtetés helyességének megvizsgálásához mindenekelőtt állapítsuk meg a szereplő kijelentések szerkezetét az **E**-rendszer segítségével. Vezessük be a következő jelöléseket:

p: 'A darab megbukik'.
q: 'A rendezés felszínes'.
P: 'színész',
Q: 'hivatása magaslatán áll',
R: 'elfogult a szerzővel szemben'.

Ezekkel és a **E**-rendszer szimbólumaival következtetésünk szerkezetét így fejezhetjük ki:

$$\frac{p \to (q \wedge \mathbf{A}(P \supset \llcorner Q)); \; q \to \mathbf{E}(P \cap (Q \cup R))}{p \to \mathbf{E}(R \cap \llcorner Q)}$$

Ez akkor helyes, ha a premisszák konjunkciója implikálja a konkluziót, vagyis ha a

$$\{[p \to (q \wedge \mathbf{A}(P \supset \llcorner Q))] \wedge [q \to \mathbf{E}(P \cap (Q \cup R))]\} \to \{p \to \mathbf{E}(R \cap \llcorner Q)\}$$

formula tautológia. Az ellenőrzést értékeléssel végezzük. Kezdjük a preparációs eljárással.

Kiküszöböljük az egyetlen **A**-operátort:

$$\{[p \to (q \wedge \neg \mathbf{E} \llcorner (P \subset \llcorner Q))] \wedge [q \to \mathbf{E}(P \cap (Q \cup R))]\} \to \{p \to \mathbf{E}(R \cap \llcorner Q)\}.$$

Most a szereplő három prímformula magját perfekt diszjunktív normálformára hozzuk a bennük előforduló P, Q, R betűk fölött (ennek részletezését itt mellőzzük):

$$\llcorner (P \supset \llcorner Q) \equiv (P \cap Q \cap R) \cup (P \cap Q \cap \llcorner R).$$

$$P \cap (Q \cup R) \equiv (P \cap Q \cap R) \cup (P \cap Q \cap \llcorner R) \cup (P \cap \llcorner Q \cap R).$$

$$R \cap \llcorner Q \equiv (P \cap \llcorner Q \cap R) \cup (\llcorner P \cap \llcorner Q \cap R).$$

A normálformákat a magok helyére téve, disztribuáljuk az **E**-operátort. Megkapjuk a formula **E**-atomjait. Ezek, előfordulásuk sorrendjében, a következők (a többször előfordulókat csak első előfordulásukkor tüntetjük föl):

$$\mathbf{E}(P \cap Q \cap R),\ \mathbf{E}(P \cap Q \cap \llcorner R),\ \mathbf{E}(P \cap \llcorner Q \cap R),\ \mathbf{E}(\llcorner P \cap \llcorner Q \cap R).$$

Mivel ezeket az atomokat ugyanúgy kell értékelnünk, mint a p, q betűket (számuk kisebb, mint $2^3 = 8$, tehát korlátozás nincs), a rövidebb leírás kedvéért helyettesítsük őket fönti sorrendjüknek megfelelően rendre az a, b, c, d betűkkel. Így végül is formulánkból ez lesz:

$$\{[p \to (q \wedge \neg(a \vee b))] \wedge [q \to (a \vee b \vee c)]\} \to \{p \to (c \vee d)\}.$$

Összesen 6 betűt kell értékelni. Ez, a kombinatorika szabályai szerint, $2^6 = 64$ különböző értékelést jelent, aminek effektív elvégzése meglehetősen nagy munka. Némi ügyeskedéssel ezt a munkát alaposan lerövidíthetjük, ugyanazzal a fogással, amelyet az alethikus de dicto elmélet keretében tárgyalt példára is alkalmaztunk. Formulánk ugyanis implikáció; ez csak úgy lehet hamis, ha előtagja igaz és utótagja hamis. Az utótag ugyancsak implikáció, ennek hamisságához $\mathbf{p} = \mathbf{i}$, $c \vee d = h$ teljesülése szükséges. De a diszjunkció csak akkor hamis, ha minden tagja hamis, így $\mathbf{c} = \mathbf{h}$, $\mathbf{d} = \mathbf{h}$.

Most nézzük, hogyan lehet az előtag igaz. Mivel konjunkció, mindkét tagjának igaznak kell lennie. Első tagja implikáció, de ennek előtagjáról, p-ről már tudjuk, hogy esetünkben igaz. Így utótagjának, $q \wedge \neg(a \vee b)$-nek is igaznak kell lennie. Mivel ez konjunkció, azért $\mathbf{q} = \mathbf{i}$ és $\neg(a \vee b) = i$, azaz $a \vee b = h$, azaz $\mathbf{a} = \mathbf{h}$ és $\mathbf{b} = \mathbf{h}$. Ezzel azonban minden betűt értékeltünk (lásd a vastagbetűs egyenlőségeket). Így az előtagban levő konjunkció második tagjába, $q \to (a \vee b \vee c)$-be egyszerűen behelyettesítjük a már meghatározott értékeket, és $i \to (h \vee h \vee h)$-t kapunk, ami kiszámítva $i \to h$, azaz h, noha igaznak kellene lennie. Nincs tehát olyan értékelés, amely formulánkat hamissá teszi. Így formulánk tautológia, vizsgált következtetésünk helyes.

Az **E**-rendszer axiomatikus fölépítéséhez föl kell venni az osztályalgebra és a kijelentéskalkulus egy-egy axiómarendszerét, az axiómákat ki kell egészíteni az $\mathbf{E}(P \cup Q) \leftrightarrow (\mathbf{E}P \vee \mathbf{E}Q)$ és az $\mathbf{E}P \vee \mathbf{E}\llcorner P$ axiómával, a levezetési szabályokat pedig

$$\text{a}\quad \frac{\Gamma \equiv \Delta}{\mathbf{E}\,\Gamma \leftrightarrow \mathbf{E}\,\Delta} \qquad \text{és a} \qquad \frac{\Gamma \equiv U}{\mathbf{A}\,\Gamma}$$

következtetések helyességét kimondó szabályokkal.

Episztémikus modalitások

Az episztémikus modalitás elnevezése a görög 'episztémé' szóból származik (*ἡ ἐπιστημη*: tudás, ismeret). Modális operátorai: *bizonyított, nem cáfolt, eldöntetlen, cáfolt*. Az elsőt **V**-vel, az utolsót **F**-fel szokták jelölni, a másik kettő jelölésére ritkán vezetnek be külön szimbólumot.[4] Hasonlítsuk össze ezeket az alethikus operátorokkal:

[4] Ezek a betűk az angol 'verified' (bizonyított) és 'falsified' (cáfolt) szavak kezdőbetűi. Más jelöléseket is használnak.

Alethikus	Episztémikus
Szükségszerű (**N**)	Bizonyított (**V**)
Lehetséges (**M**)	Nem cáfolt
Véletlen	Eldöntetlen
Lehetetlen	Cáfolt (**F**)

Látható, hogy az egy sorba írt operátorok egymás megfelelői a két rendszerben.

Az episztémikus modalitás *de dicto* és *de re* típusban egyaránt értelmezhető.

Az episztémikus de dicto modális elmélet olyan kijelentésekkel foglalkozik, amelyek azt állítják, hogy bizonyos kijelentések bizonyítottak, nem cáfoltak, eldöntetlenek, vagy cáfoltak. Azt, hogy egy p kijelentés bizonyított, $\mathbf{V}p$-vel, azt, hogy p cáfolt, $\mathbf{F}p$-vel jelöljük. $\neg\mathbf{F}p$-vel kifejezhetjük azt, hogy p nem cáfolt, $\neg\mathbf{F}p \wedge \neg\mathbf{F}\neg p$-vel pedig azt, hogy p eldöntetlen (sem p, sem tagadása nincs megcáfolva). Végül **V**-t is kiküszöbölhetjük, ha elfogadjuk azt, hogy p bizonyítása egyenértékű negációjának megcáfolásával (azaz ha elfogadjuk a kizárt harmadik elvét): $\mathbf{V}p$ ugyanaz, mint $\mathbf{F}\neg p$.

Elméletünk formális leírását **V**-rendszernek nevezhetjük. Némi megfontolás mutatja, hogy a **V**-rendszer teljesen analóg az **M**-rendszerrel, ha **N**-nek **V**-t, **M**-nek pedig $\neg\mathbf{F}$-et feleltetjük meg (összhangban a fenti összehasonlító táblázattal). Az analógia belátásához elég azt megnéznünk, hogy az ($M1$)—($M4$) elvek alábbi megfelelői, jelentésük alapján, elfogadhatók-e.

($V1$) $\neg\mathbf{F}(\alpha \vee \beta)$ és $\neg\mathbf{F}\alpha \vee \neg\mathbf{F}\beta$ logikai értéke azonos.
($V2$) Ha α és β egyenértékűek, akkor $\neg\mathbf{F}\alpha$ és $\neg\mathbf{F}\beta$ is azok.
($V3$) Ha α tautológia, akkor $\mathbf{V}\alpha$ igaz. (Másképp: Ha α kontradikció, akkor $\neg\mathbf{F}\alpha$ hamis.)
($V4$) Ha α igaz, akkor $\neg\mathbf{F}\alpha$ is igaz.

($V1$) és ($V2$), úgy véljük, nem szorulnak magyarázatra. Ami ($V3$)-at illeti, ez azt fejezi ki, hogy ha α pusztán logikai szerkezete miatt igazság (a benne szereplő betűk helyére akár igaz, akár hamis kijelentéseket teszünk, az összetétel mindig igaz), akkor igazsága bizonyított. Ez megint nem jelenti azt, hogy csak a tautológiákat tekinthetjük bizonyítottaknak: ha α egy extralogikai úton bizonyított tétel szerkezetét kifejező formula és azt vizsgáljuk, hogy α bizonyítottsága milyen *logikai* következményekkel jár, akkor $\mathbf{V}\alpha$-t rendszerünkben igaznak föltételezhetjük.

Megjegyezzük, hogy ($V2$) és ($V3$) értelmezésében látszólag árnyalatnyi, de bizonyos esetekben nagy jelentőségű eltérések vannak. Az, hogy α és β egyenértékűek, ill. hogy α tautológia, nyilván független attól, hogy ezt tudjuk-e vagy sem. A ($V2$) és a ($V3$) elv alkalmazásakor persze ezeket *tudnunk, ismernünk* kell. Ezért e két elv megfogalmazását gyakran így szokták kezdeni: „Ha tudjuk, hogy . . .". Amíg ($V2$)-t és ($V3$)-at csak értékelési célokra használjuk, addig ez a megkötés nem mond semmit. Ezen túl azonban a megkötés már lényeges lehet; pl. ($V3$)-ban azt jelenti, hogy nem lehet olyan megfontolást

végezni, amelyben egy formuláról csupán föltételezzük, de nem tudjuk, hogy tautológia.

($V1$) azt jelenti, hogy ha egy α kijelentést igaznak értékelünk, akkor a $\neg\mathbf{F}\alpha$ kijelentést, tehát azt, hogy 'α nem cáfolt' is igaznak kell értékelnünk. Mivel ($V3$) kizárja azt, hogy ha α kontradikció, akkor $\neg\mathbf{F}\alpha$-t igazra értékeljük (hiszen ekkor $\neg\alpha$ tautológia, tehát ($V3$) szerint $\mathbf{V}\neg\alpha$ igaz, de ez ugyanaz, mint $\mathbf{F}\alpha$, ezért $\neg\mathbf{F}\alpha$ hamis), azért az elv alkalmazása formális ellentmondáshoz nem vezet és az interpretációval sem ütközik.

Így megvizsgálhatjuk, hogy a cikkünk első részének elején szereplő (3) példa logikailag helyes következtetés-e. Jelöljük p-vel azt, hogy 'a tettes nő volt', q-val pedig azt, hogy 'a tettes az áldozat szomszédja volt'. Akkor következtetésünk szerkezete a $\mathbf{V}$-rendszerben ezt az alakot ölti:

$$\frac{\neg\mathbf{F}p;\ \mathbf{V}(p \to q)}{\neg\mathbf{F}q}\ .$$

Ez a következtetés helyes, ha a

$$[\neg\,\mathbf{F}p \wedge \mathbf{V}(p \to q)] \to \neg\mathbf{F}q$$

formula tautológia; ezt értékeléssel ellenőrizzük.

Küszöböljük ki a $\mathbf{V}$ operátort $\mathbf{F}\neg$ segítségével. Mivel $\mathbf{M}$ szerepét $\neg\mathbf{F}$ játssza, az $\mathbf{M}$-atomok megfelelői itt $\neg\mathbf{F}$-atomok lesznek (a ($V4$) disztribuciós törvény $\mathbf{F}$-re nem érvényes, csak $\neg\mathbf{F}$-re). Ezért $\mathbf{V}$ helyébe $\mathbf{F}\neg$ helyett mindjárt $\neg\neg\mathbf{F}\neg$-et írunk, hogy a $\neg\mathbf{F}$-operátor látható legyen:

$$[\neg\mathbf{F}p \wedge \neg\neg\mathbf{F}\neg(p \to q)] \to \neg\mathbf{F}q.$$

Következő lépésként a p, $\neg(p \to q)$, q magokat a p, q betűk fölötti perfekt diszjunktív normálformájukkal kell pótolni. Ezek rendre:

$$\begin{aligned} &p: && (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)\\ &\neg(p \to q): && p \wedge \neg q\\ &q: && (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q). \end{aligned}$$

Ezeket behelyettesítve (megjegyezve, hogy tautológia nincs köztük), és a $\neg\mathbf{F}$ operátort, ott ahol kell, disztribuálva, ezt kapjuk:

$$[(\neg\mathbf{F}(p \wedge q) \vee \neg\mathbf{F}(p \wedge \neg q)) \wedge \neg\neg\mathbf{F}(p \wedge \neg q)] \to [\neg\mathbf{F}(p \wedge q) \vee \neg\mathbf{F}(\neg p \wedge q)].$$

A formulában modális operátor hatáskörén kívüli komponens nem fordul elő. A szereplő $\neg\mathbf{F}$-atomok: $\neg\mathbf{F}(p \wedge q)$, $\neg\mathbf{F}(p \wedge \neg q)$, $\neg\mathbf{F}(\neg p \wedge q)$. Helyettesítsük ezeket, a kiszámítás megkönnyítése érdekében, rendre az a, b, c betűkkel:

$$[(a \vee b) \wedge \neg b] \to [a \vee c]. \tag{13}$$

Ezt a már többször bemutatott fogással számítjuk ki gyorsan. Tegyük föl, hogy implikációnk előtagja igaz. Mivel az előtag konjunkció, mindkét tagjának igaznak kell lennie. Így a második tag, $\neg b$ is igaz, tehát $b = h$. De akkor az első tag, $a \vee b$, csak úgy lehet igaz, ha $a = i$. Ezzel azonban az implikáció utótagja, $a \vee c$, már c értékétől függetlenül igaz lesz (hiszen a diszjunkció

igazságához egyik tagjának igazsága elegendő). Összegezve: ha implikációnk előtagja igaz, akkor utótagja is igaz. Így ez az implikáció tautológia, ennélfogva a vizsgált következtetés helyes.

A **V**-rendszerben a modális operátorok iterációja is ugyanúgy megy, mint az **M**-rendszerben. Képezhetjük tehát — az $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$, . . . rendszerekkel szoros analógiában — a $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$, . . . rendszereket.

Viszont a **V**-rendszerben nem látszik elfogadhatónak a magasabbrendű modalitásokat kiküszöbölő eljárás (ez, mint említettük, az alethikus elméletben sem problémamentes). A redukciós elveket kifejező (*M*5)—(*M*6) szabályok episztemikus megfelelői ugyanis a következők lennének:

(*V*5) Ha egy kijelentés nemcáfoltsága nem cáfolt, akkor az a kijelentés nem cáfolt.

(*V*6) Ami nem cáfolt, az bizonyítottan nem cáfolt.

Ezeknek az elveknek az elfogadása elmosná a különbséget a bizonyítottság és a bizonyítottság bizonyított volta, a nemcáfoltság és a nemcáfoltság nem cáfolt volta stb. között.

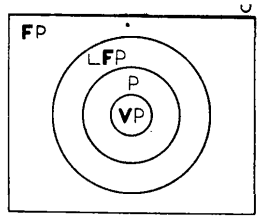
Az episztémikus de dicto elmélet alkalmazásra talál formális rendszerek *meta-elméletének*[5] (részleges vagy teljes) formalizálásában. A metaelméletek egyik fontos feladata ugyanis olyan tételek bizonyítása, amelyek arról szólnak, hogy a formális rendszer ilyen és ilyen formulái (a formális rendszerben) *levezethetők*. Ha *p* jelenti a formális rendszer egy formuláját, akkor az a *metatétel*, hogy *p* levezethető, a metaelméletben **V***p* alakban formalizálható (a formális levezethetőséget azonosítva itt a 'bizonyított' tulajdonsággal). A metaelmélet ilyen formalizálása nem föltétlenül pedantéria. Előfordulhat, hogy a metaelmélet tud eljárást adni bizonyos formulák levezethetőségének eldöntésére, de az eljárás alkalmazása bizonyos esetekben hosszú hónapok munkáját venné igénybe. Ilyenkor segíthet az elektronikus számológép. De a gép csak akkor alkalmazható, ha a feladat gépies: az eljárás gépbe programozásának előfeltétele az eljárás formalizálása. Így az episztémikus elmélet akár gyakorlati feladatok megoldásában is hasznosnak bizonyulhat.

Az alethikus és az episztémikus de dicto elméletek szintaxisa, formális rendszere azonos. Önként fölvetődik a kérdés: van-e különbség szemantikájukban? Vajon a különböző szavak mögött nem ugyanazon tartalom rejtőzik-e? Van-e különbség a között, hogy egy kijelentés szükségszerűen igaz, és aközött, hogy egy kijelentés bizonyított?

Erre a kérdésre megtámadhatatlan *elvi* választ keresni meddő feladatnak tűnik. Célravezetőbb a probléma *gyakorlati* megragadása. A gyakorlatban mindenesetre előfordulhat olyan szituáció, amelyben a kijelentések igazságára vonatkozó információink alapján hasznos megkülönböztetni bizonyítottan igaz és szükségszerűen igaz kijelentéseket. Pl. bizonyítottan igaznak tekinthetünk olyan tételeket, amelyeket egy, alapjaiban a gyakorlatban is kipróbált elméletből logikai következtetéssel nyertünk, de amelyek érvényességét még nem támasztja alá kellő mennyiségű kísérleti-tapasztalati adat; viszont szükségszerűen igaznak tekinthetjük azokat a tételeket, amelyek, azonkívül hogy az elmélettel teljes összhangban vannak, elegendő számú kísérleti-tapasztalati eredménnyel is megerősítettek. Természetesen más megfontolások is megalapozhatnak egy ilyenfajta megkülönböztetést.

[5] A metaelméletek teljesen formalizált rendszereket tanulmányoznak. A metaelmélet egy tétele általában nem tétele a formalizált rendszernek, hanem a formalizált rendszer*ről* szóló tétel.

Végül néhány szó *az episztémikus de re elméletről*. Ez teljesen analóg az alethikus de re elmélettel. Operátorai tulajdonságokra alkalmazva tulajdonságokat hoznak létre. Ha P egy tulajdonság, akkor $\mathbf{V}P$ az a tulajdonság, amelylyel univerzumunk azon és csak azon elemei rendelkeznek, amelyek bizonyítottan P-tulajdonságúak. Az $\mathbf{F}P$ tulajdonság terjedelmébe azok a dolgok tartoznak, amelyek bizonyítottan nem-P-tulajdonságúak, tehát $\mathbf{F}P \equiv \mathbf{V} \llcorner P$. A $\llcorner \mathbf{F}P$ tulajdonság terjedelmébe tartozó dolgokról nincs megcáfolva, hogy P-tulajdonságúak. Így világos, hogy $\mathbf{V}P$, P, $\llcorner \mathbf{F}P$ és $\mathbf{F}P$ között az 5. ábrán



5. ábra

látható összefüggések állnak fenn: $\mathbf{V}P$ része P-nek, P része $\llcorner \mathbf{F}P$-nek. Eltérően az alethikus de re modalitásra vonatkozó nézetektől, itt általánosan elfogadott, hogy a $\emptyset$, $\mathbf{V}P$, P, $\llcorner \mathbf{F}P$, U tulajdonságok terjedelme mind különböző lehet; tehát egyidőben fönnállhat, hogy $\mathbf{V}P$ nem üres és valódi része P-nek, P valódi része $\llcorner \mathbf{F}P$-nek, és $\llcorner \mathbf{F}P$ nem az egész univerzum. A formális és materiális tulajdonságokra való felosztásnak nincs olyan megfelelője, amely — elfogadása esetén — eleve kizárná az említett lehetőségek mindegyikének egyidejű fennállását.

A modális elméletek és a szigorú logika

Mint említettük, az **M**-rendszerben az $\mathbf{N}(p \rightarrow q)$ formulát szokás *'szigorú implikáció'*-nak nevezni (és így olvasni: *'p* szigorúan implikálja *q*-t'). A **V**-rendszerben a $\mathbf{V}(p \rightarrow q)$ formulát ugyancsak lehet (episztémikusan) szigorú implikációnak tekinteni. Az a törekvés, hogy a formalizált logikában a hagyományos implikáción kívül egy erősebb, ún. szigorú implikációt is szerepeltessenek, a hagyományos implikáció szemantikai interpretációjához fűződő nehézségekkel kapcsolatos.

Formálisan tekintve a $p \rightarrow q$ implikáció a kijelentéskalkulus egy *művelete*, amelyet egyszerűen úgy definiálunk, hogy hamis, ha előtagja igaz és utótagja hamis, minden más esetben igaz. Hasonlóan adjuk meg más műveletek (negáció, konjunkció, diszjunkció) szabatos definícióit is. De míg egyéb műveletek eléggé egyértelműen interpretálhatók nyelvi alakban, az implikáció lefordítása az élő nyelvre problematikus. Az igaz, hogy az élő nyelv 'ha *p*, akkor *q*' alakú kijelentéseinek szerkezetét (föltéve, hogy *p* és *q* kijelentőmódbeli és változót nem tartalmazó mondatok) mindig leírhatjuk $p \rightarrow q$-val, az azonban már vitatható, hogy az implikáció jelét tartalmazó formulák a bennük szereplő betűk bármiféle interpretációjával értelmesen fordíthatók le a köznapi nyelvre oly módon, hogy $p \rightarrow q$-t 'ha *p*, akkor *q*' alakban fordítjuk. Csak egy példával illusztráljuk az interpretáció nehézségét. A $(p \rightarrow q) \vee (\neg p \rightarrow q)$ formula a kijelentéskalkulus szerint *tautológia*, tehát igaz, bármit jelent is *p*

és q. De a „józan ész" aligha érzi igazságnak e formula egy ilyen interpretációját: 'Ha a Marson van élet, akkor a Lánchíd növényevő; vagy ha a Marson nincs élet, akkor a Lánchíd növényevő'. Valóban, $p \to q$ általánosan csak a 'nem p vagy q' alakban, vagy még inkább a 'nem igaz, hogy p és nem q' alakban interpretálható, hacsak eleve meg nem egyezünk abban, hogy a 'ha . . . akkor' kötőszavak jelentését módosítjuk.

A szigorú implikáció bevezetése kísérlet olyan logikai művelet megalkotására, amelynek interpretációja közelebb áll a 'ha . . . akkor' alakú mondatösszetétel köznapi jelentéséhez. A kísérlet bizonyos eredményét tanúsítja, hogy pl. az $\mathbf{N}(p \to q) \vee \mathbf{N}(\neg p \to q)$ formula már nem tautológia (az **M**-rendszerben).

A modális elméletekben a szigorú implikáció (és a szigorú ekvivalencia is) a modális operátorok segítségével definiált, tehát *származtatott* fogalmak. Történetileg először azonban olyan elméletet dolgoztak ki, amelyben a szigorú implikáció *alapfogalom*, s amelyben a *szükségszerű* és a *véletlen* modalitások épp a szigorú implikáció segítségével definiálhatók, tehát származtatott fogalmak. Ez az elmélet az ún. *szigorú kijelentéskalkulus*.

A *szigorú kijelentéskalkulus* az ún. *nem-alternáló* logikai elméletek körébe tartozik. Alternáló vagy kétértékű logikának nevezünk minden olyan logikai elméletet, amelynek formulái két logikai érték ('igaz' és 'hamis') segítségével interpretálhatók. Nem-alternáló logikák azok, amelyekre ilyen kétértékű interpretáció nem lehetséges. Közéjük tartoznak az ún. többértékű logikák, *de nem csak ezek*, hanem olyan elméletek is, amelyekre semmiféle értékelési eljárás nem lehetséges. Utóbbiak közé tartozik pl. az ún. *derivatív* logika, az *intuicionista* logika és maga a *szigorú* logika is. A szigorú kijelentéskalkulus formulái semmiféle (véges) értékeléssel nem interpretálhatók értelmes módon (ti. úgy, hogy értékelési eljárással a formulák közül azok, amelyek logikai igazságokat fejeznek ki, kiválaszthatók lennének).[6]

A szigorú kijelentéskalkulusnak ily módon csak axiomatikus fölépítése lehetséges. A 'tautológia' fogalmát ebben a rendszerben a 'levezethető formula' fogalma pótolja, amelyet hasonlóan definiálnak, mint más axiomatikusan fölépített logikai rendszerekben.

A szigorú logika *alapoperátorai:* a negáció ($\neg$), a konjunkció ($\wedge$) és a szigorú implikáció; utóbbit a '$\Rightarrow$' szimbólummal jelöljük. *Formulái* a tetszőleges kijelentéseket reprezentáló p, q, r, . . . betűkből (kijelentésatomokból) és az említett operátorokból hasonlóan épülnek föl, mint az alternáló kijelentéskalkulus formulái. A formulák tehát a p, q, r, . . . atomokon kívül $\neg p$, $p \wedge q$, $p \Rightarrow q$, továbbá mindazok, amelyek ezekből úgy keletkeznek, hogy az atomok helyére már meglevő formulákat teszünk. A szokásos zárójelzési konvenciókat fenntartjuk.

További operátorokat rövidítésként vezetünk be. Az $(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$ alakú formulákat $\alpha \Leftrightarrow \beta$-val rövidítjük; ezt a műveletet *szigorú ekvivalenciának*

[6] Pontosabban a következőről van szó: Nem lehetséges véges sok érték bevezetése úgy, hogy a kijelentésatomok egymástól függetlenül bármelyik értéket fölvehetik, a formulák értéke a bennük szereplő kijelentésatomok értékeinek megadásával egyértelműen meghatározott, s a logikai igazságnak tekintett formulák értéke atomjaik bármely értékelésére az 'igaz'-nak megfelelő kitüntetett érték (vagy ha több ilyen kitüntetett érték van, ezek valamelyike). A most körvonalazott értelemben az ismertetett modális kalkulusok sem értékelő rendszerek, hiszen a modális komponensek értékeit pusztán a kijelentésatomok értékei nem határozzák meg. Mint tudjuk, a modális komponenseket külön kell értékelni.

nevezzük. A $\neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ alakú formulák rövidítésére bevezetjük az $\alpha \vee \beta$ *diszjunkciót.* (Az alternáló logikában $\neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ és $\alpha \vee \beta$ egyenértékű formulák; a diszjunkció itteni definíciója tehát nem mesterkélt.) $\neg\alpha \vee \beta$ rövidítésére bevezetjük az $\alpha \rightarrow \beta$ *alternáló implikációt.* ($\neg\alpha \vee \beta$ és $\alpha \rightarrow \beta$ is egyenértékűek az alternáló logikában.) E rendszerben tehát két implikációt: szigorút ($\Rightarrow$) és alternálót ($\rightarrow$) különböztetünk meg; az első definiálatlan alapfogalom, a második definiált fogalom. Jegyezzük meg, hogy $\alpha \Rightarrow \beta$ nem fejezhető ki $\alpha \rightarrow \beta$ segítségével. Végül bevezetjük az *alternáló ekvivalenciát* is, $\alpha \leftrightarrow \beta$ jelöléssel, az $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$ formula rövidítésére.

A rendszer *axiómái* az alábbi formulák:

1. $(p \wedge q) \Rightarrow (q \wedge p)$,
2. $[(p \wedge q) \wedge r] \Rightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$,
3. $(p \wedge q) \Rightarrow p$,
4. $p \Rightarrow (p \wedge p)$,
5. $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$,
6. $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [p \Rightarrow r]$,
7. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$,
8. $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Rightarrow [(p \wedge \neg r) \Rightarrow \neg q]$,
9. $p \Rightarrow \neg\neg p$,
10. $\neg\neg p \Rightarrow p$,
11. $[p \Rightarrow (q \wedge r)] \Rightarrow [p \Rightarrow q]$.

Ha e formulákban $\Rightarrow$ helyére mindenütt $\rightarrow$-at teszünk, akkor a közönséges logika tautológiáihoz jutunk.

A rendszer *levezetési szabályai:*

1. Helyettesítés: mint az alternáló logikában.

2. Leválasztás: mint az alternáló logikában.

3. Összekapcsolás: az α és β formulákból az $\alpha \wedge \beta$ formula előállítása. (Az alternáló logikában az ennek megfelelő $\dfrac{\alpha\ ;\ \beta}{\alpha \wedge \beta}$ következtetés helyessége már az axiómákból és a leválasztási szabályból folyik; itt nem, ezért kell külön kimondani.)

4. Pótlás: egy formula valamely részformulájának kicserélése egy vele *szigorúan* ekvivalens formulával. (Az alternáló logikában a közönségesen ekvivalens formulák ugyancsak pótolhatók egymással; ennek jogossága ott a helyettesítés és a leválasztás jogosságának következménye. Itt a pótlás nem vezethető vissza a másik három levezetési szabályra.)

A rendszerben *levezethető formuláknak* mondjuk az axiómákat, továbbá azokat a formulákat, amelyek az axiómákból a levezetési szabályok véges sokszori alkalmazásával előállíthatók.

Ha α a szigorú kijelentéskalkulus egy olyan formulája, amelyben szigorú implikáció és ekvivalencia nem fordul elő, úgy α *akkor és csak akkor levezethető, ha tautológia* (az alternáló kijelentéskalkulus értelmében). Rendszerünk tehát részként tartalmazza az alternáló kijelentéskalkulust. És persze *valódi* részként, hiszen pl. az axiómák olyan formulák, amelyek az alternáló logikában nemcsak hogy nem tautológiák, de még csak nem is formulák (hiszen a szigorú implikáció $\Rightarrow$ jele is szerepel bennük).

Legyen α a szigorú logika egy formulája. Nevezzük α *alternáló képének* azt a formulát, amely α-ból a benne esetleg előforduló $\Rightarrow$ és $\Leftrightarrow$ jelek $\rightarrow$-lal, ill. $\leftrightarrow$-lal való fölcserélésével (tehát a szigorú implikáció és ekvivalencia alternálóval való helyettesítésével) keletkezik. (Ha α-ban $\Rightarrow$ és $\Leftrightarrow$ nem szerepel, akkor alternáló képe önmaga.) Mármost belátható, hogy *ha* α *a szigorú logikában levezethető, akkor alternáló képe tautológia.* Ez trivialitás, hiszen bármely

axióma alternáló képe tautológia, és bármely levezetési szabály alternáló megfelelője az alternáló logika helyes következtetési szabálya.

Viszont figyelemre méltó, hogy e tétel megfordítása nem igaz: ha α alternáló képe tautológia, akkor α a szigorú logikában nem feltétlenül levezethető. Pl. $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ nem levezethető, noha alternáló képe: $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ tautológia. Ez nevezetes példa, nemcsak azért, mert tanúsítja a szigorú logika 'szigorú' karakterét (az, hogy $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ tautológia, a 'ha . . . akkor' interpretációval ugyancsak problematikus), hanem azért is, mert $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$-t hozzávéve az axiómákhoz, a bővített rendszerben már egy formula akkor és csak akkor lesz levezethető, ha alternáló képe tautológia. Vagyis ezzel a bővítéssel a szigorú implikáció (és ekvivalencia) azonossá válnék az alternálóval, a szigorú rendszer átmenne az alternálóba. Következésképp az, hogy ez a formula nem levezethető, a szigorú logika karakterisztikus tulajdonsága.

A kétfajta implikáció közti összefüggés a következő: a szigorú implikáció szigorúan implikálja az alternálót: a $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \rightarrow q)$ formula levezethető.

A modális operátorokat így értelmezzük: a $\neg\alpha \Rightarrow \alpha$ formula rövidítésére bevezetjük az $\mathbf{N}\alpha$, $\neg(\alpha \Rightarrow \neg\alpha)$ rövidítésére pedig az $\mathbf{M}\alpha$ szimbólumot. $\mathbf{N}\alpha$-t mint az 'α szükségszerű', $\mathbf{M}\alpha$-t mint az 'α lehetséges' kijelentést interpretálva, adódik: egy kijelentés szükségszerűsége azt jelenti, hogy saját tagadása szigorúan implikálja; egy kijelentés lehetséges volta pedig annak tagadását jelenti, hogy saját tagadását szigorúan implikálja.

Az így bevezetett modalitásokról általában ugyanazok az összefüggések bizonyíthatók be, mint az **M**-rendszerben, egyenértékűség helyett mindenhol szigorú ekvivalenciával. Pl. levezethető, hogy $\mathbf{N}p$ és $\neg\mathbf{M}\neg p$ szigorúan ekvivalensek, továbbá hogy a szigorú implikáció szigorúan ekvivalens az alternáló implikáció szükségszerűségével: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \mathbf{N}(p \rightarrow q)$. Az is kimutatható, hogy ha α olyan levezethető formula, amelyben nem szerepel $\Rightarrow$ és $\Leftrightarrow$, akkor $\mathbf{N}\alpha$ is levezethető. A korlátozás persze azt is tartalmazza, hogy α-ban **N** és **M** sem szerepelhet, hiszen definíciójukban szerepel $\Rightarrow$. Általában tetszőleges levezethető α-ra nem igaz az, hogy $\mathbf{N}\alpha$ is levezethető. Így a szigorú logikában is felléphet a modális operátorok iterációja.

Az iterációk kiküszöbölésére az axiómarendszert bővíteni kell. Hogy milyen pótaxiómát érdemes fölvenni, az attól függ, hogy az iterációk részleges vagy teljes kiküszöbölését tűzzük-e ki célul. Az $\mathbf{M}p \Rightarrow \mathbf{NM}p$ pótaxióma fölvételével teljes redukciót érhetünk el: minden formula szigorúan ekvivalens egy olyan formulával, amelyben modális operátor hatáskörében további modális operátor már nem szerepel.

A redukciós axiómával bővített szigorú logika az eredeti karakterétől eléggé eltávolodott. Ezt az eltávolodást jelzi, hogy benne a

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \mathbf{N}(p \Rightarrow q),\ (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \mathbf{M}(p \Rightarrow q),\ \mathbf{M}(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \mathbf{N}(p \Rightarrow q)$$

formulák levezethetők. Ezek azt fejezik ki, hogy a szigorú implikáció szigorúan ekvivalens mind a saját lehetőségével, mind a saját szükségszerűségével.

„Szigorú" jellegéből azonban továbbra is megőrzött valamit. Kimutatható, hogy $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ változatlanul nem-levezethető, azaz a bővített rendszer sem azonos az alternáló logikával.

Egy logikai axiómarendszert, ha negációt tartalmaz, *ellentmondástalannak* mondunk, ha nincs olyan α formulája, hogy α is, $\neg\alpha$ is levezethető. Ha a rendszer nem az alternáló logikát állítja elő, akkor ellentmondástalansága nem

magától értetődő, bizonyításra szorul. A szigorú logika ellentmondástalansága így látható be: Ha α is és $\neg\alpha$ is levezethető volna a rendszerben, akkor mindkettő alternáló képe tautológia volna. Világos azonban, hogy a szóban forgó alternáló képek is egymás negációi, s egy formula és negáltja egyszerre nem lehet tautológia.

Nevezetes *nem levezethető* formula $p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow p)$, azaz $p \Rightarrow \mathbf{N}p$. Ez különösen azért érdekes, mert a redukciós axiómával bővített szigorú logikában *bármely* levezethető α formulával együtt már $\mathbf{N}\alpha$ is levezethető. Ezért, ha rendszerünket — mondjuk valamilyen alkalmazási céllal — kibővítjük úgy, hogy egy nem levezethető α formulát hozzáfűzünk az axiómákhoz, akkor nem biztos, hogy a bővített rendszerben $\mathbf{N}\alpha$ levezethető lesz. (Biztos, hogy nem levezethető, ha α egyetlen betű, pl. p, vagy egy új szimbólum.) Így módunkban van α és $\mathbf{N}\alpha$ között megkülönböztetést tenni.

Megjegyezzük, hogy hasonló a helyzet az **M**-rendszerben is. Ha α a kijelentéskalkulus egy tautológiája, akkor $\mathbf{N}\alpha$ tautológia az **M**-rendszerben, de $p \rightarrow \mathbf{N}p$ nem tautológia benne.

Mi az összefüggés a szigorú kijelentéskalkulus és az **M**-rendszer között? Ennek tisztázásához vegyük figyelembe, hogy a szigorú kalkulus formuláiból a $\Rightarrow$ kiküszöbölhető, ha minden $\alpha \Rightarrow \beta$ alakú formularészt a vele szigorúan ekvivalens $\mathbf{N}(\alpha \rightarrow \beta)$-val pótolunk. Ha egy formulán ilyen átalakítást hajtunk végre, az eredetivel szigorúan ekvivalens formulához jutunk. A szigorúan ekvivalens formulák levezethetőség szempontjából egyenrangúak: ha egyikük levezethető, akkor másikuk is. A $\Rightarrow$ kiküszöbölése ily módon a rendszert nem érinti.

A $\Rightarrow$ kiküszöbölésével azonban a szigorú kalkulus formulái és az **M**-rendszer formulái között semmiféle alaki különbség nem marad. Így lehetővé válik a két rendszer összehasonlítása.

Egyszerű vizsgálattal megállapítható (a részletekre itt nem térünk ki), hogy *a szigorú kalkulus egy formulája akkor és csak akkor levezethető, ha* **M**-*tautológia*. (Ha a levezetéshez a redukciós axiómát is használjuk, akkor csak az **M***-rendszerben tautológia.) Így a szigorú kijelentéskalkulus lényegében azonosnak bizonyult az **M**-rendszerrel.

Ami a szigorú logikának azt a törekvését illeti, hogy az implikáció interpretációs nehézségeit megoldja, ide vonatkozó eredményei sok tekintetben vitatottak. De ez a témakör már kívül esik cikkünk keretein.

A deóntikus modalitás

A deóntikus modalitás elnevezése a görög 'deó' igéből származik ($\delta\varepsilon\omega$: kötök, gátlok). Olyan kijelentéseket tanulmányoz, amelyek bizonyos cselekedetek, *aktusok kötelező, megengedett, közömbös* vagy *tilos* voltáról szólnak, e négy tulajdonság *morális* vagy *jogi* értelmében. Azt, hogy egy P aktus *megengedett*, jelöljük $\mathbf{P}P$-vel, hogy *kötelező*, azt $\mathbf{O}P$-vel.[7] Hogy a P aktus *tilos*, nyilván azt jelenti, hogy *nem megengedett*, tehát $\neg\,\mathbf{P}P$-vel kifejezhető; hamarosan látni fogjuk, hogy egy aktus (morálisan) közömbös voltának

[7] Ezek a betűk az angol 'obligatory' (kötelező) és 'permitted' (megengedett) szavak kezdőbetűi.

kifejezésére sincs szükség új operátor fölvételére. Sőt, mint a többi modális elméletben, **P** és **O** egyike itt is kiküszöbölhető.

A **P** és **O** deóntikus operátorok tehát *aktusokra alkalmazva kijelentéseket hoznak létre*, ahhoz hasonlóan, ahogyan az **E** és **A** exisztenciális operátorok *tulajdonságokra alkalmazva kijelentéseket eredményeznek*. Az analógia alapján úgy tűnik, hogy a deóntikus modalitás *de re* típusú, és csakis az lehet (annak nyilván nincs értelme, hogy egy kijelentés megengedett vagy kötelező[8]). Zavart okozhat azonban, hogy a *de re* típusú modális operátorok mindig *tulajdonságokra* vonatkoztak, a modális operátorokat viszont *aktusokra* alkalmazzuk. Ám az aktusokat ugyanúgy kezelhetjük, mintha tulajdonságok lennének, *az aktusok algebrája ugyanis semmiben sem különbözik a tulajdonságok algebrájától*, mint rögtön megmutatjuk.

Egy P aktus *komplementumán* értsük azt az aktust, amely akkor és csak akkor *elvégzett* (teljesített), ha a P aktus nem-elvégzett; jelöljük ezt $\llcorner P$-vel. (Ha pl. P a 'villamoson bliccelés' aktusa, akkor $\llcorner P$ a 'villamoson nem-bliccelés'.) Két aktus, P és Q, *metszetén* értsük azt az aktust, amely akkor és csak akkor elvégzett, ha P is, Q is elvégzett; jelöljük ezt $P \cap Q$-val. (Ha pl. a P aktus 'a kérvény átadása a tisztviselőnek', a Q aktus pedig 'pénzzel bélelt boríték csúsztatása a tisztviselő zsebébe', akkor $P \cap Q$ 'a tisztviselő megvesztegetése'.) Végül két aktus, P és Q, *unióján* értsük azt az aktust, amely akkor és csak akkor elvégzett, ha P és Q közül legalább az egyik elvégzett; ezt $P \cup Q$-val jelöljük. (Ha pl. P 'az érvényes jegy felmutatása' és Q a 'jegyváltás', akkor $P \cup Q$ 'az utazási jog megszerzése a villamoson' aktus.)

Mivel P és $\llcorner P$, definíció szerint, kizárják egymást, $P \cap \llcorner P$-nek nincs értelme. A metszet-műveletnek ezt a korlátozását úgy küszöböljük ki, hogy $P \cap \llcorner P$-t a *'lehetetlen aktus'*-nak tekintjük. Más aktusok is lehetnek persze, amelyek kizárják egymást (pl. 'kerekasztal mellé ülni' és 'az asztal sarkához ülni'), ezek metszetét is lehetetlen aktusnak tekintjük. A lehetetlen aktus szerepe ugyanaz, mint az üres tulajdonságé. Mint az üres tulajdonságot, ezt is $\emptyset$-val jelöljük.

Viszont $P \cup \llcorner P$ olyan aktus, amelyet — bármit jelent is P — mindig mindenki végrehajt (hiszen vagy végrehajtja P-t, vagy nem, de az utóbbi esetben végrehajtja $\llcorner P$-t). Ezt az aktust *univerzális aktusnak* nevezzük, és U-val jelöljük. Szerepe ugyanaz, mint az univerzumé a tulajdonságok algebrájában. (Megint: előfordulhat, hogy $P \cup Q = U$, noha $Q \neq \llcorner P$. Például 'dohányozni' és 'szivarozástól tartózkodni'.)

A lehetetlen és az univerzális aktus bevezetésével az aktusok körében a három művelet korlátozás nélkül végrehajtható, és könnyű ellenőrizni, hogy az aktusok egyenértékűségére vonatkozóan pontosan azok a törvények érvényesek, amelyek a tulajdonságokéra. Nincs tehát formai, szerkezeti különbség a tulajdonságok algebrája és az aktusok algebrája között. Az osztálykalkulus jelrendszere alkalmas formális nyelv mindkettő leírására.

Így a deóntikus modalitást teljes joggal tekinthetjük de re-típusú modalitásnak. Most már a négy deóntikus modalitás kifejezésének problémáját is megoldhatjuk. Egy P aktust akkor tekinthetünk *közömbösnek*, ha szabad

[8] Az, hogy bizonyos körülmények között valakinek morális kötelessége bizonyos kijelentés megtétele, nem azt jelenti, hogy a kijelentés (állítás, ítélet) kötelező, hanem a *kimondása*. Különböztessük meg a kijelentést és a kijelentés 'kijelentését', azaz kimondását.

csinálni és szabad nem-csinálni is, azaz, ha P is, $\llcorner P$ is megengedett; ezt tehát $\mathbf{P}P \wedge \mathbf{P}\llcorner P$-vel szimbolizálhatjuk. Végül a 'kötelező' és a 'megengedett' összefüggése: ami kötelező, annak komplementuma tilos (azaz nem megengedett), és ami megengedett, annak a komplementuma nem lehet kötelező. Tehát $\mathbf{O}P$ ugyanaz, mint $\neg\mathbf{P}\llcorner P$, és $\mathbf{P}P$ ugyanaz, mint $\neg\mathbf{O}\llcorner P$. Az összefüggés a négy modalitás között ugyanaz, mint a többi modális elméletben.

A deóntikus elmélet szimbolikus nyelve — nevezzük ezt **P**-rendszernek — teljesen analóg az **E**-rendszerrel. Az operátorok megfeleltetését ezzel a táblázattal szemléltethetjük:

Exisztenciális (E-) rendszer		Deóntikus (P-) rendszer	
Általános	(**A**)	Kötelező	(**O**)
Exisztenciális	(**E**)	Megengedett	(**P**)
Különös	($\mathbf{E}P \wedge \mathbf{E}\neg P$)	Közömbös	($\mathbf{P}P \wedge \mathbf{P}\llcorner P$)
Üres	($\neg\mathbf{E}$)	Tilos	($\neg\mathbf{P}$)

Kérdés, hogy az analógia kiterjed-e a két rendszer igazságaira is? Ehhez meg kell vizsgálni az értékelés alapjául szolgáló elvek deóntikus megfelelőit:

($P1$) *Az* **P**-*disztribució elve.* $\mathbf{P}(\Gamma \cup \Delta)$ egyenértékű $\mathbf{P}\Gamma \vee \mathbf{P}\Delta$-val.

($P2$) *Az* **P**-*extenzionalitás elve.* Ha $\Gamma \equiv \Delta$, akkor $\mathbf{P}\Gamma \leftrightarrow \mathbf{P}\Delta$.

($P3$) *Az univerzális kötelezőségének elve.* Ha $\Gamma \equiv U$, akkor $\mathbf{O}\Gamma$ igaz.

(Az univerzális aktus kötelező. Más megfogalmazásban: a lehetetlen aktus tilos; azaz: ha $\Gamma \equiv \emptyset$, akkor $\mathbf{P}\Gamma$ hamis.

($P4$) *Az univerzális megengedettségének elve.* Ha $\Gamma \equiv U$, akkor $\mathbf{P}\Gamma$ igaz.

Az első két elv és a negyedik plauzibilis, a harmadik elfogadása azonban közvetlenül nem látszik evidensnek. Hogy elfogadhatóságáról meggyőződjünk, vegyük figyelembe, hogy az osztályalgebra törvényei szerint $Q \cup \emptyset \equiv Q$, így ($P2$) szerint $\mathbf{P}Q \leftrightarrow \mathbf{P}(Q \cup \emptyset)$, de utóbbi ($P1$) szerint egyenértékű $\mathbf{P}Q \vee \mathbf{P}\emptyset$-vel. Tehát $\mathbf{P}Q$ és $\mathbf{P}Q \vee \mathbf{P}\emptyset$ egyenértékűek. Így ha $\mathbf{P}\emptyset$ igaz lenne, akkor — a diszjunkció értékelési szabálya szerint — $\mathbf{P}Q \vee \mathbf{P}\emptyset$ tautológia lenne, s így a vele egyenértékű $\mathbf{P}Q$ is. Következésképp ha $\mathbf{P}\emptyset$ igaz lenne, akkor a tetszőleges Q aktus megengedett lenne. Következésképp annak elfogadása, hogy $\mathbf{P}\emptyset$ igaz, azaz hogy a lehetetlen aktus megengedett, maga után vonná minden aktus megengedett voltát, vagyis morális anarchiához vezetne. Ezért nélkülözhetetlen annak elfogadása, hogy a lehetetlen aktus tilos, azaz, hogy $\mathbf{P}\emptyset$ hamis. Ez viszont csupán más megfogalmazása annak, hogy az univerzális aktus kötelező, azaz hogy $\mathbf{O}U$ igaz.

A deóntikus logika ezen rendszere ily módon csak interpretációjában különbözik az **E**-rendszertől.

Most már módunkban van a cikkünk első részének elején közölt (4) példa következtetésének helyességét ellenőrizni. Jelöljük P-vel a 'színházlátogatás', Q-val pedig a 'ruhatárhasználat' aktusát. Első premisszánk ilyen alakú: 'P elvégzésekor Q kötelező'. Ez tulajdonképpen azt jelenti, hogy a $P \supset Q$ (azaz a $\llcorner P \cup Q$) aktus kötelező, hiszen premisszánk átfogalmazható így: 'Kötelező színházba-nem-menni vagy ruhatárat használni'. Az első

premissza szerkezete tehát: $\mathbf{O}(P \supset Q)$. A második premissza egyszerűen $\mathbf{P}P$, a konkluzió pedig $\mathbf{P}Q$. A következtetés szerkezete ily módon:

$$\frac{\mathbf{O}(P \supset Q);\ \mathbf{P}P\ .}{\mathbf{O}Q}$$

A következtetés helyes, ha a

$$(\mathbf{O}(P \supset Q) \wedge \mathbf{P}P) \rightarrow \mathbf{P}Q$$

formula tautológia. Az ellenőrzéshez először kiküszöböljük **O**-t:

$$(\neg \mathbf{P}_{\llcorner}(P \supset Q) \wedge \mathbf{P}P) \rightarrow \mathbf{P}Q.$$

$P \supset Q$-t, P-t és Q-t perfekt diszjunktív normálformáikkal helyettesítjük (P és Q fölötti normálformákat képezve):

$$(\neg \mathbf{P}(P \cap {}_{\llcorner}Q) \wedge \mathbf{P}[(P \cap Q) \cup (P \cap {}_{\llcorner}Q)]) \rightarrow \mathbf{P}[(P \cap Q) \cup ({}_{\llcorner}P \cap Q)].$$

A **P** operátort mindenütt, ahol lehet, disztribuáljuk:

$$(\neg \mathbf{P}(P \cap {}_{\llcorner}Q) \wedge [\mathbf{P}(P \cap Q) \vee \mathbf{P}(P \cap {}_{\llcorner}Q)]) \rightarrow [\mathbf{P}(P \cap Q) \vee \mathbf{P}({}_{\llcorner}P \cap Q)].$$

Az áttekinthetőség kedvéért az előforduló $\mathbf{P}(P \cap Q)$, $\mathbf{P}(P \cap {}_{\llcorner}Q)$, $\mathbf{P}({}_{\llcorner}P \cap Q)$ atomokat rövidítsük rendre az a, b, c betűkkel:

$$(\neg b \wedge (a \vee b)) \rightarrow (a \vee c).$$

Ez azonban — az előtagban szereplő konjunkció tagjainak sorrendjétől eltekintve — megegyezik az episztémikus modalitással kapcsolatban tárgyalt (3) példánk vizsgálatakor nyert (13) formulánkkal, amelyről ott beláttuk, hogy tautológia. Vizsgált következtetésünk tehát a deóntikus logika szerint helyes.

A deóntikus logikával foglalkozó kutatók egy része a deóntikus logikát mint az alethikus modális logika *részét* igyekszik tárgyalni. E célra az alethikus rendszerbe bevezetnek egy ún. szankció-szimbólumot, s azt, hogy P tilos, így definiálják: Szükségszerű, hogy P maga után vonja a szankciót és a szankció elmaradásának lehetőségét. Ha a szankciót S-sel szimbolizáljuk, akkor az, hogy P tilos (azaz $\neg \mathbf{P}P$) így formalizálható: $\mathbf{N}(P \rightarrow (S \cap \mathbf{M}\,{}_{\llcorner}S))$. Az értelmes interpretáció érdekében föl kell tennünk, hogy az alethikus *de re* modális kalkulussal dolgozunk, tulajdonságok helyett aktusokkal (vagy az aktusokat egyszerűen tulajdonságoknak tekintjük), és az S szankció-operátort is aktusnak tekintjük. De a fenti formula interpretációja még ezekkel a föltevésekkel sem teljesen világos (gondoljunk a ${}_{\llcorner}$, $\cap$, **M** műveletek interpretációira, és próbáljuk interpretálni pl. az $S \cap \mathbf{M}\,{}_{\llcorner}S$ aktust!). Azok a kutatók, akik ezen a vonalon haladnak, még ennyi föltevéssel sem élnek az interpretáció világossága érdekében. Talán nem túlzás, ha ezt a redukciós kísérletet eredménytelen zsákutcának tekintjük.

Egy másik kísérlet a deóntikus logikát egy olyan tágabb rendszerbe építi be, amelyben alapfogalom a *'jobbnak lenni'* ('betterness'). Ez, formálisan, aktusokra értelmezett diadikus operátor: $\mathbf{B}PQ$; interpretációja: 'a P aktus

(deóntikusan) jobb, mint a Q aktus'. Erre egyéb deóntikus fogalmak visszavezethetők. Pl. két aktus *deóntikusan egyenlő*, ha egyik sem jobb a másiknál; egy aktus *kötelező*, ha jobb mint a komplementuma; egy aktus *megengedett*, ha komplementuma nem jobb nála stb. — A különféle deóntikus rendszerek értelmes interpretálását néha megnehezíti, hogy a szerzők a szintaxisban, a formalizálásban nem különböztetik meg az aktusokra és az aktusokról szóló kijelentésekre vonatkozó operátorokat, azaz nem veszik figyelembe, hogy a deóntikus modalitás de re típusú.

Egy másik kutatási irány nem ragaszkodik mereven a deóntikus logika morális-jogi interpretációjához, és olyan formális fölépítést keres, amely — amellett, hogy a hagyományos interpretációt nem zárja ki — alkalmas lehet bizonyos variációs lehetőségeket tartalmazó jelenségek tárgyalására is. Az aktusok algebrája nyilvánvalóan akkor is értelmes, ha az aktus nem feltétlenül morális aktus. A 'megengedett' pedig pl. interpretálható úgy, hogy 'bizonyos technikai feltételekkel összeegyeztethető'. Egy ipartelep tervezésekor pl. számításba kell venni egész sor 'megengedett' és 'kötelező' aktust. Megengedett lehet mondjuk az ipartelep földrajzi elhelyezését illetően több variáns közötti választás. Egy-egy ilyen választás eredménye viszont kötelezővé teheti — az adott talajviszonyoktól függően — a tervezett épületek ilyen vagy olyan alapozását, vasútvonal építését stb. Általában műszaki vonatkozású tervezésekben néhány 'kötelező' adaton kívül rendszerint olyan részletek is vannak, amelyek megoldásában a tervező több lehetőség között választhat. Elképzelhető, hogy ilyen vonatkozásokban a deóntikus logika, esetleg némi továbbfejlesztéssel, hasznos szolgálatokat tehet. Rámutattak már a deóntikus logikának a kvantummechanikában való alkalmazhatóságára is. Mindezek azonban napjainkban még csak elgondolások; a deóntikus logikák *tényleges* műszaki vagy természettudományi alkalmazásáról egyelőre nincs szó.[9]

Elméleti szempontból ez a kutatási irány annyi módosulást jelent, hogy kívánatossá teszi *az aktusok elvégzettségének* formalizálását; hiszen éppen az olyan következtetések lehetnek nagyon fontosak, amelyek arról szólnak, hogy egy bizonyos aktus elvégzésével milyen további aktusok válnak megengedetté, kötelezővé vagy tilossá. Ez egy monadikus operátor bevezetésével érhető el; mondjuk 'TP' jelentse azt, hogy 'a P aktus elvégzett'. Ez az operátor értelmes módon nem fejezhető ki a deóntikus logika egyéb operátoraival, így a rá vonatkozó alapvető összefüggéseket külön axiómákban kell rögzíteni.[10]

Kevert modalitások

Az eddigiekben hat modális logikát ismertettünk. Ezeket, aszerint, hogy modális operátorai miből mit hoznak létre, így osztályozhatjuk:

[9] Ezzel kapcsolatban érdemes megemlíteni, hogy P. Ehrenfest már 1910 körül rámutatott arra, hogy a kijelentéskalkulust alkalmazni lehetne áramkörök tervezésére. Az ötlet *gyakorlati* kiaknázása azonban csak a harmincas évek második felében kezdődött meg; a technikai-műszaki fejlődés csak ekkor igényelte komolyan azt a segítséget, amelyet a logikai elmélet nyújtani tudott. A technika és a tudományok meggyorsult fejlődését figyelembe véve elképzelhető, hogy a deóntikus logika hasznos alkalmazása talán kevesebbet várat magára. Ez a remény persze a többi modális elmélettel kapcsolatban is jogosult.

[10] Egy ilyen kísérletre vonatkozóan lásd pl. [4]-et az irodalomjegyzékben.

Rendszer	A primformula magja	A primformula	Típus
Alethikus és episztémikus de dicto rendszerek	Kijelentés	Kijelentés	dictum de dicto
Alethikus és episztémikus de re rendszerek	Tulajdonság	Tulajdonság	res rei
Exisztenciális rendszer	Tulajdonság	Kijelentés	dictum de re
Deóntikus rendszer	Aktus	Kijelentés	dictum de re

Bármelyik rendszer prímformulái kijelentéseket vagy tulajdonságokat reprezentálnak, tehát ilyen vagy olyan további modális operátor alkalmazható rájuk. Már megemlékeztünk azokról az esetekről, amelyekben az eredetileg alkalmazott operátor iterálható. Most röviden áttekintjük a különböző rendszerek keverési lehetőségeit.

VM-*rendszer*. **M**-formulára **V**-rendszerbeli operátor alkalmazása. Mind de dicto, mind de re típusban lehetséges. Ha p tetszőleges kijelentés, akkor pl. **VM***p* jelentése: 'bizonyított, hogy p lehetséges', vagy $\neg$ **FN***p* jelentése: 'nem cáfolt, hogy p szükségszerű'. Ha P tetszőleges tulajdonság, akkor **VM***P* az a tulajdonság, amelynek terjedelmébe azok a dolgok tartoznak, amelyekről bizonyított, hogy P-tulajdonságúak lehetnek, **FN***P* terjedelme pedig azon dolgok osztálya, amelyekre meg van cáfolva, hogy szükségszerűen P-tulajdonságúak.

MV-*rendszer*. Analóg a **VM**-rendszerrel. Egyiknek sincs komolyabb jelentősége (ez idő szerint), mivel a 'szükségszerű' és a 'bizonyított' között egy rendszeren belül aligha lehet a priori megkülönböztetést tenni. Valamilyen gyakorlati alkalmazás szempontjából persze ilyen megkülönböztetés — mint arra már korábban utaltunk — hasznos és értelmes lehet. Ilyen fajta kérdéseket azonban eddig alig vizsgáltak.

EM-*rendszer*. Tulajdonságra alkalmazott (de re) **M**-operátor, majd erre mint tulajdonságra alkalmazott **E**-operátor. **EM***P* azt jelenti, hogy az **M***P*-tulajdonság nem üres, tehát hogy vannak olyan dolgok az univerzumban, amelyek posszibilisan P-tulajdonságúak. Ha elfogadjuk a tulajdonságok felosztását formálisokra és materiálisokra, akkor alkalmazása fölöslegessé válik. Ugyanis:

Ha P materiális tulajdonság	Ha P formális tulajdonság
EM*P* $\leftrightarrow$ **E***U* (tautológia)	**EM***P* $\leftrightarrow$ **E***P*
EN*P* $\leftrightarrow$ **E**$\emptyset$ (kontradikció)	**EN***P* $\leftrightarrow$ **E***P*
AM*P* $\leftrightarrow$ **A***U* (tautológia)	**AM***P* $\leftrightarrow$ **A***P*
AN*P* $\leftrightarrow$ **A**$\emptyset$ (kontradikció)	**AN***P* $\leftrightarrow$ **A***P*

Materiális tulajdonság esetén tehát csak trivialitás (tautológia vagy kontradikció) adódik eredményül, formális tulajdonság esetén pedig **M**, ill. **N**

egyszerűen elhagyható. De ha elvetjük a tulajdonságok ilyen a priori felosztását, akkor az **EM**-rendszernek van értelme.

ME-*rendszer*. (De dicto) **M**-operátor alkalmazása **E**-formulákra. Pl. **ME***P* jelentése: lehetséges, hogy van *P*-tulajdonságú dolog. E rendszer hatékonyságát nem befolyásolja az, hogy elfogadjuk-e a tulajdonságok felosztását formálisokra és materiálisokra.

Az **EV**- *és a* **VE**-*rendszer* az **EM**-, ill. az **ME**-rendszerrel teljesen analóg.

Mivel a **P**-rendszer deóntikus operátorai nem tulajdonságokra, hanem aktusokra alkalmazandók, a **PM**- és a **PV**-rendszernek nincs értelme, hiszen **M***P* és **V***P* nem aktus, hanem tulajdonság. Nyilvánvaló, hogy a **PE**-rendszer is értelmetlen (hiszen pl. **E***P* kijelentés, és **P** csak aktusokra alkalmazható).

MP-*rendszer*. (De dicto) **M**-operátor alkalmazása **P**-formulákra. Pl. **NO***P* jelentése: 'szükségszerű, hogy *P* kötelező', **M**¬**P***P* jelentése: 'lehetséges, hogy *P* tilos'. E rendszernek elég széles irodalma van.

VP-*rendszer*. Analóg az előbbivel. A deóntikus logika metanyelvének egy részét formalizálja.

Az **EM**-rendszernek nincs értelme.

Mint látjuk, a (másodrendű) kevert modalitásoknak nyolc értelmes válfaja lehetséges.

A tautológiák megállapítása a kevert elméletekben nagyjából hasonlóan megy, mint a tiszta másodrendű elméletekben.

A másodrendű kevert modalitások körében még további, bonyolultabb keverések is előfordulhatnak. Így pl. beszélhetnénk az **ME** ∪ **EV**-rendszerről, amelyben olyan formulák is szerepelhetnek, amelyek az **ME**-rendszer és az **EV**-rendszer formuláiból a kijelentéskalkulus műveleteivel jönnek létre; mint pl. **NE**($P \cup \llcorner Q$) → ¬**E**$\llcorner$**F**($\llcorner P \cap Q$). Ilyen rendszerekben különféle redukciós elveket szoktak föltételezni abból a célból, hogy az értékelési eljárást valamelyest egyszerűsítsék. Erre két, eléggé plauzibilis példa:

Ha **VA** Γ igaz, akkor **AV** Γ is igaz (Γ az osztályalgebra egy kifejezése).

Ha **EV** Γ igaz, akkor **VE** Γ is igaz (Γ mint imént).

Szavakkal kifejezve, az első ezt mondja: Ha bizonyított, hogy Γ univerzális tulajdonság, akkor a 'bizonyítottan Γ' tulajdonság univerzális. A második: Ha a 'bizonyítottan Γ' tulajdonság nem üres, akkor bizonyított, hogy Γ nem üres tulajdonság. — Ezek a redukciós elvek eléggé elfogadhatóknak tűnnek.

A másodrendű kevert modalitásokon túl természetesen harmad- vagy még magasabbrendű kevert modális elméletek is definiálhatók. Elvileg ezek semmi újat nem jelentenek. Kiszámítási technikájuk persze egyre fárasztóbb, bár a gépies jelleg változatlanul megmarad.

A tiszta logikai vizsgálatok terén a magasabbrendű modalitások (akár tiszták, akár kevertek) — különösen a második renden túl — eddig nem váltottak ki komolyabb érdeklődést. Valószínű, hogyha valaha egyáltalán magukra vonják a figyelmet, az logikán kívüli alkalmazásaikkal lesz kapcsolatos.

Megemlítjük még, hogy folynak kutatások és vannak eredmények a modális operátoroknak a logikai függvénykalkulusba való bevezetése terén is. Ezek ismertetésére azonban cikkünkben már nem vállalkozhatunk.

IRODALOM

[1] A. R. Anderson, The Logic of Norms, *Logique et Analyse*, **2** (1958), 84—91.
[2] A. R. Anderson, A reduction of deontic logic to alethic modal logic, *Mind*, **67** (1958), 100—103.
[3] A. Lennart, A binary primitive in deontic logic, *Logique et Analyse*, *5* (1962), 90—97.
[4] C. I. Lewis, *A survey of symbolic logic*, Berkeley 1918.
[5] A. N. Prior, *Time and modality*, Oxford 1957.
[6] I. Ruzsa, Axiomatischer Aufbau eines Systems der deontischen Logik, *Acta Sci. Math.* (Szeged) **26** (1965), 253—267.
[7] H. A. Schmidt, *Mathematische Gesetze der Logik, I.* Berlin—Göttingen—Heidelberg 1960.
[8] G. H. v. Wright, *An essay in modal logic*, Amsterdam 1951.
[9] G. H. v. Wright, *Logical Studies, London* 1957.

МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ

II

Имре Ружа

В первой части статьи было дано изложение алетических модальных теорий.

В настоящей, второй части рассуждение продолжается изложением теории экзистенциальной модальности. Автор показывает, что эта теория пригодна для рассмотрения силлогистических и даже более сложных умозаключений.

Далее дается краткое изложение эпистемических модальных теорий, как теорий, вполне аналогичных по своей структуре алетическим теориям.

В главе «Модальные теории и строгая логика» автор показывает, что и в алетическом и в эпистемическом калькулусе de dicto имеется возможность определения так называемой строгой импликации; однако, имеется теория, так называемый строгий калькулус заявления, в котором строгая импликация является основным понятием, модальные же операторы — производными. Изложив основную мысль доказательства, автор показывает эквивалентность систем строгой логики и алетического модального калькулуса.

Автор приводит систему деонтической логики, в полной мере аналогичную экзистенциальному калькулусу, кратко касаясь проблемы различных направлений в развитии деонтических логик.

В заключение автор знакомит читателя с различными смешанными модальными теориями.

При изложении отдельных модальных теорий в статье кратко указывается на возможности их применения.

MODAL LOGICS II

by I. Ruzsa

The first part of the paper treated the alethic modal theories.

This second part continues the discussion with the theory of existential modality. It shows that the theory is adequate for discussing syllogistic inferences as well as more complicated ones.

The paper then briefly treats the epistemic modal theories as being totally analogous in their structure with the alethic theories.

The chapter entitled "Modal Theories and Strict Logics" treats the possibility of defining the so-called strict implications according to the terms of both alethic and epistemic de dicto calculus. On the other hand there exists a theory, the so-called strict logics in which strict implication represents the basic concept and modal operations the derived concepts. The author points out the equivalence of a certain system of strict logics and a certain alethic modal calculus.

He treats a system of deontic logics totally analogous with existential calculus giving a brief review of the different developmental trends of deontic logics.

In conclusion he gives a brief review of the various mixed modal theories.

Exposing the different modal theories, the paper briefly discusses also the possible ways of application.