> „A szillogizmusokat nélkülözhetetleneknek vagy a *par excellence* okoskodásnak tekinteni — az ostobaság apoteózisa.
>
> *C. I. LEWIS*

Modális logikák I.

RUZSA IMRE

A matematikai logika, mint ismeretes, olyan *következtetések* vizsgálatával foglalkozik, amelyek helyessége a premisszák *szerkezete* és a konkluzió *szerkezete* közötti összefüggésekre alapozott. Az ilyen következtetések elemzésének előfeltétele *a kijelentések szerkezetének* elemzése. A matematikai logika legelemibb fejezete, *a kijelentéskalkulus*, olyan összetett kijelentések elemzésével foglalkozik, amelyeknek analizálatlan egységei, „atomjai" maguk is *kijelentések*, s az összetett kijelentés logikai értékét (igaz vagy hamis voltát) egyértelműen meghatározza az összetétel módja, szerkezete, valamint a komponensek logikai értéke. Vagy — az elemzés, az analízis nézőpontjáról az összerakás, a szintézis nézőpontjára térve át — azt is mondhatjuk, hogy a logika e fejezetében csak olyan eljárások, *műveletek* szerepelnek, amelyek kijelentésekből kijelentéseket hoznak létre, mindig úgy, hogy a komponensek logikai értéke és maga a művelet egyértelműen meghatározza az eredmény logikai értékét.

(Félreértések elkerülése kedvéért: a továbbiakban a jelző nélkül előforduló ‚logika' szó mindig a ‚matematikai logika' helyett szerepel.)

Ez a keret azonban, bármennyire hasznos és nélkülözhetetlen is, önmagában nem alkalmas olyan, a mindennapi életben és a tudományos tevékenységben egyaránt tömegesen előforduló, és a józan ész számára helyesnek tartott következtetések helyességének megalapozására, mint például a következők:

(1)	Premissza:	Az igazság relatív.
	Konklúzió:	Aki igazat mond, relatív dolgot mond.
(2)	Premisszák:	Ha nem létezik perpetuum mobile, akkor a robbanómotor hatásfoka kisebb 1-nél. Perpetuum mobile lehetetlen.
	Konklúzió:	Lehetséges, hogy a robbanómotor hatásfoka kisebb 1-nél.
(3)	Premisszák:	Nincs megcáfolva, hogy a tettes nő volt. Bebizonyosodott, hogy ha a tettes nő volt, csak az áldozat szomszédja lehetett.
	Konklúzió:	Nincs megcáfolva, hogy a tettes az áldozat szomszédja volt.
(4)	Premisszák:	Színházlátogatáskor a ruhatár használata kötelező. Színházba járni megengedett.
	Konklúzió:	A ruhatár használata megengedett.

Ami az (1) példát illeti, ennek elemzése a logika magasabb fejezetébe, a *predikátumkalkulusba* vagy *logikai függvénykalkulusba* tartozik. A (2) — (4) példák viszont ún. *modális* következtetések, tárgyalásuk a *modális logika* egyik vagy másik fejezetéhez tartozik. Cikkünkben ezekről a modális logikákról szeretnénk némi tájékoztatást nyújtani.

A modalitásokról általában

A modális logikák tárgyát első közelítésben így határozhatnánk meg. A modális logikák

a) kijelentések tulajdonságairól szóló kijelentésekkel,

b) predikátumokból (tulajdonságokból) képezett tulajdonságokkal,

c) predikátumok (tulajdonságok), ill. kategóriák tulajdonságairól szóló kijelentésekkel foglalkoznak. Adott körülmények között bizonyos kijelentések körében pl. ilyen tulajdonságok értelmezhetők: szükségszerű, lehetséges, véletlen, lehetetlen; vagy: bizonyítható, cáfolható stb.; vagy: magától értetődő, megdöbbentő stb. Egy adott dologra vonatkozóan bizonyos predikátum (tulajdonság) ugyancsak lehet szükségszerű, lehetséges, véletlen, lehetetlen; vagy pl. morális kategóriák lehetnek (adott körülmények között) kötelezőek, megengedettek, tilosak, közömbösek. A kijelentések, predikátumok és kategóriák ilyenfajta tulajdonságait a hagyományos logikában *módozatoknak, modalitásoknak* nevezték; innen származik a *modális logika* elnevezés is. Egy modális logikát *de dicto* ill. *de re* típusúnak neveznek aszerint, hogy *kijelentések*, ill. *predikátumok* tulajdonságaival foglalkozik.

Egy-egy modális logika keretében általában négy olyan tulajdonság szerepel, amelyek egymással bizonyos tartalmi-értelmi vonatkozásban vannak, és logikai műveletekkel egyetlen tulajdonságra vezethetők vissza. Példaként vegyük a *lehetséges, szükségszerű, lehetetlen* és *véletlen* tulajdonság-négyest, mondjuk kijelentésekre alkalmazva. E négy tulajdonság visszavezethető egyre: pl. a *lehetségesre*. Hogy egy kijelentés igazsága *lehetetlen*, az nyilván annak *negációja*, hogy a kijelentés igazsága *lehetséges*. Hogy egy kijelentés *szükségszerűen* igaz, azt úgy értelmezhetjük, hogy negációjának igazsága lehetetlen, azaz *nem lehetséges*, hogy *negációja* igaz. Végül egy kijelentés igazságának *véletlen* jellegét kifejezi az, hogy a kijelentés is, negációja is lehetséges; ez viszont nem más, mint a kijelentés *lehetőségét* és *negációja lehetőségét* *és-sel* összekapcsoló kijelentés. Tehát a *lehetséges* tulajdonságra a többi három visszavezethető; de a *lehetséges* helyett választhattuk volna a *lehetetlent* vagy a *szükségszerűt* is.

Ilymódon annyi modális logika lehetséges, ahány különböző tulajdonság-négyest tudunk értelmezni kijelentésekre, ill. predikátumokra. *Szerkezetileg* e modális logikák között persze vannak azonosak, de akadnak szerkezetükben is némileg különbözőek. Az eddigi vizsgálatok főleg három modális logikára irányultak: az *alethikus*, az *episztémikus* és a *deóntikus* logikára. Az első kettő mind *de dicto*, mind *de re* típusú lehet; a deóntikus logika csak a *de re* típusban értelmes. Az alábbiakban ezeket részletesebben ismertetjük.

A modalitásokkal már *Arisztotelész* is foglalkozott. *Matematikai logikai* vizsgálatukat C.I. LEWIS (1918) kezdte el. A matematikai logika a modalitásokat ugyanolyan szempontból és ugyanolyan eszközökkel-módszerekkel vizsgálja, mint a logika más területeit: formális rendszereket állít fel, amelyek egy lehetséges szemantikus interpretációja egyik vagy másik (esetleg több) modális logika; e formális rendszerek kifejezik a modalitások *szerkezeti* törvényeit, vagyis azokat az összefüggéseket, amelyek kutatása — a szó egy szűkebb értelmében — a logika tulajdonképpeni feladata.

Megemlítjük, hogy maga az *osztálykalkulus* is tekinthető modális logikának; ezt *exisztenciális modális kalkulusnak* szokás nevezni. Ez a felfogás kifejezetten hasznos az ún. *kevert modalitások* elméletében. Cikkünkben röviden ismertetni fogjuk ezt az elméletet is.

Mielőtt a modális logikák tényleges tárgyalására rátérnénk, röviden összefoglaljuk mindazt, amit tárgyalásunkban a *kijelentéskalkulus* és *az osztályalgebra* elemeiből fölhasználunk. Mivel a matematikai logikának nincs általánosan elfogadott terminológiája és szimbolikája, ez az összefoglalás már csak azért is hasznos lesz, mert lehetővé teszi a tanulmányunkban használandó jelek és elnevezések egyértelmű rögzítését.

A kijelentéskalkulus elemei

Tetszőleges *kijelentéseket* p, q, r, ... betűkkel fogunk jelölni. Föltételezzük, hogy minden kijelentés vagy *igaz*, vagy *hamis*, e két lehetőség kizárja egymást, és harmadik lehetőség nincs. Az *igaz* és a *hamis* a kijelentések *tulajdonsága*. E tulajdonságokat *logikai értékeknek* mondjuk.

Egy p kijelentés *negációját* $\neg p$-vel jelöljük; ez akkor és csak akkor igaz, ha p hamis.

A p és q kijelentés *konjunkcióját* ('p *és* q') $p \wedge q$-val jelöljük; ez akkor és csak akkor igaz, ha p is, q is igaz; p és q a konjunkció *tagjai*.

A p és q kijelentés *diszjunkcióját* ('p *vagy* q') $p \vee q$-val jelöljük; ezt akkor és csak akkor tekintjük hamisnak, ha p is, q is hamis; p és q a diszjunkció *tagjai*.

A p és a q kijelentésből képezett *implikációt* ('ha p, akkor q') úgy tekintjük, mint ami akkor és csak akkor hamis, ha p igaz és q hamis; ezt $p \to q$-val jelöljük; p-t az implikáció *előtagjának*, q-t az *utótagjának* mondjuk.

Végül a p és q kijelentések *ekvivalenciáját* ('p akkor és csak akkor, ha q') úgy tekintjük, mint ami akkor és csak akkor igaz, ha p és q logikai értéke azonos (azaz ha p is, q is igaz, vagy ha p is, q is hamis); ezt $p \leftrightarrow q$-val jelöljük, p és q az ekvivalencia *tagjai*.

A negációt, konjunkciót, diszjunkciót, implikációt és ekvivalenciát a kijelentéskalkulus *műveleteinek* mondjuk; ezek logikai értékét a bennük szereplő *komponensek* (p, ill. p és q) logikai értékei egyértelműen meghatározzák. Kimutatható, hogy a kijelentéskalkulus minden *művelete* (vagyis kijelentésekből képezett minden olyan összetétel, melynek logikai értéke a komponensek logikai értékéből egyértelműen meghatározható) a felsorolt öt művelettel (sőt még kevesebbel is) kifejezhető. A $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$ jeleket a kijelentéskalkulus *operátorainak* nevezzük; a $\neg$ operátor *monadikus* (*egy* kijelentésre alkalmazható) a többiek *diadikusak* (*két* kijelentésre alkalmazhatók).

A kijelentéskalkulus *formuláin* értjük:

(a) a tetszőleges kijelentéseket reprezentáló p, q, r, ... betűket; ezeket *kijelentés-atomoknak* is fogjuk nevezni,

(b) azokat a jelsorozatokat, amelyek a fenti öt operátornak a p, q, r, ... betűkre való szabályos alkalmazásával keletkeznek (pl. $\neg p$, $\neg q$, $p \wedge q$, $q \vee r$, $p \to r$, $q \leftrightarrow s$ stb),

(c) azokat a jelsorozatokat, amelyek úgy keletkeznek, hogy már meglevő, zárójelek közé tett formulákra ismét alkalmazzuk az öt operátor valamelyikét (pl. $\neg (p \wedge q)$, $(p \wedge q) \wedge (q \to r)$, $(p \leftrightarrow r) \to (q \to p)$ stb.).

Zárójel elhagyási konvenció: Ha egy formula egyetlen betűből áll vagy egy formula negációja, akkor újabb operátor alkalmazásakor nem szükséges zárójelbe tenni. Tehát pl. $\neg(\neg p)$ helyett $\neg\neg p$-t, $(p) \vee (q \rightarrow r)$ helyett $p \vee (q \rightarrow r)$-t, $(\neg(p \wedge q)) \rightarrow (p \vee r)$ helyett $\neg(p \wedge q) \rightarrow (p \vee r)$-t írunk. A *formulák* segítségével a kijelentések *szerkezetét* tudjuk szabatosan kifejezni. Tetszőleges formulákat α, β, γ,... betűkkel fogunk jelölni.

Egy formula egy *értékelésén* azt értjük, hogy minden benne szereplő kijelentésatom (a p, q, r,... betűk) helyébe tetszőleges, de rögzített logikai értéket helyettesítünk (egy betűt minden előfordulásában ugyanazon logikai értékkel helyettesítve!). Pl. a $((p \rightarrow r) \wedge (\neg q \vee r)) \rightarrow \neg q$ formula egy értékelése: helyettesítsük p, q, r-t rendre a ‚hamis', ‚hamis', ‚igaz' logikai értékkel. 'Igaz' és 'hamis' helyett röviden i-t és h-t írva, ezt kapjuk:

$$((h \rightarrow i) \wedge (\neg h \vee i)) \rightarrow \neg h. \tag{5}$$

Az öt művelet értelmezésében leírt szabályokat alkalmazva:

$$h \rightarrow i = i, \qquad \neg h = i, \qquad \text{tehát} \qquad \neg h \vee i = i \vee i = i,$$

így (5)-ből ez lesz:

$$(i \wedge i) \rightarrow i,$$

de $i \wedge i = i$ és $i \rightarrow i = i$. A most követett eljárást *kiszámításnak* mondhatjuk, eredményét pedig így fogalmazhatjuk meg: Formulánk az adott értékelésre az *igaz* logikai értéket veszi föl. (Ennek interpretációja kézenfekvő: ha p és q hamis, r pedig igaz kijelentés, akkor egy olyan összetett kijelentés, amelynek szerkezetét formulánk írja le, igaz.)

Ha egy formula minden lehetséges értékelésre az *igaz* értéket veszi föl, akkor *tautológiának* (vagy azonosan igaznak), ha pedig minden értékelésre a *hamis* értéket veszi föl, akkor *kontradikciónak* (vagy *azonosan hamisnak*) mondjuk. Nyivánvaló, hogy ha egy formula tautológia, akkor negációja kontradikció és viszont.

Két formula együttes értékelésén azt értjük, hogy a bennük szereplő összes betűt figyelembevéve, e betűk mindegyikét egy-egy rögzített logikai értékkel helyettesítjük a két formula mindegyikében való minden előfordulásában (tehát függetlenül attól, hogy a szóban forgó betű a két formula közül csak az egyikben vagy mindkettőben szerepel.) Ha két formula minden lehetséges együttes értékelésre azonos logikai értéket vesz föl, akkor a két formulát (a kijelentéskalkulus értelmében) *egyenértékűnek* mondjuk. Azonnal látható, hogy α és β akkor és csak akkor *egyenértékű* formulák, ha az $\alpha \leftrightarrow \beta$ formula *tautológia.*

Ha α és β olyan formulák, hogy együttes értékelésűk minden olyan esetében, amelyben α értéke *igaz,* β értéke is *igaz* (beleértve azt az esetet is, amikor α kontradikció, tehát semmilyen értékelésre nem veszi föl az *igaz* értéket), akkor azt mondjuk, hogy a β formula *következménye* (a kijelentéskalkulus értelmében) az α formulának. Közvetlenül belátható, hogy β akkor és csak akkor *következménye* α-nak, ha az $\alpha \rightarrow \beta$ formula *tautológia;* továbbá hogy α és β akkor és csak akkor *egyenértékűek*, ha *kölcsönösen következményei* egymásnak. — *Többpremisszás következtetést* egyszerűen úgy definiálhatunk, hogy a premisszák konjunkcióját tekintjük egyetlen premisszának. (Lásd az alábbi megjegyzést a többtagú konjunkcióról.)

Mint könnyen látható, a konjunkció is, a diszjunkció is kommutatív és asszociatív tulajdonságú. Ez lehetővé teszi a

$$p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n$$

n-tagú konjunkció értelmezését (még $n = 1$ esetére is) azzal, hogy ez akkor és csak akkor igaz, ha nincs hamis tagja, és a

$$p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n$$

n-tagú diszjunkció értelmezését (még $n = 1$ esetére is) azzal, hogy ez akkor és csak akkor hamis, ha nincs igaz tagja. $n > 2$ esetén ezek tetszőleges zárójelezéssel visszavezethetők a közönséges kéttagú konjunkcióra, ill. diszjunkcióra; ezért bevezetésüket újabb zárójel-elhagyási konvenciónak is tekinthetjük.

A $p_1, \ldots, p_n$ betűk fölötti *elemi konjunkciónak* ($n \geqslant 1$) mondunk egy olyan n-tagú konjunkciót, melynek i-edik tagja ($i = 1, 2, \ldots, n$) vagy p_i, vagy $\neg p_i$. Két ilyen konjunkciót *különbözőnek* tekintünk, ha legalább egy i-re az egyikben p_i, a másikban $\neg p_i$ szerepel (ez természetes értelmezés.)

Pl. a p és q változók fölötti összes lehetséges elemi konjunkciók: $p \wedge q$, $p \wedge \neg q$, $\neg p \wedge q$, $\neg p \wedge \neg q$. A p_1, p_2, p_3 változók fölötti néhány elemi konjunkció: $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3, p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3, \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3, \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3$, stb.

Egy formulát *perfekt* (vagy *kitüntetett) diszjunktív normálformának* mondunk a $p_1, \ldots, p_n$ betűk fölött ($n \geqslant 1$), ha

$$\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \ldots \vee \alpha_k \qquad (k \geqslant 1)$$

alakú k-tagú diszjunkció, s a diszjunkciós tagok mind *különböző* elemi konjunkciók a $p_1, p_2, \ldots, p_n$ betűk fölött.

Az egyetlen p változó fölött pl. a következő perfekt diszjunktív normálformák lehetségesek: p; $\neg p$; $p \vee \neg p$ (az utóbbi tautológia). Egy példa p és q fölötti perfekt diszjunktív normálformára: $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$. Végül egy példa a p_1, p_2, p_3, p_4 fölötti perfekt diszjunktív normálformára:

$$(\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3 \wedge p_4) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3 \wedge \neg p_4) \vee$$
$$(p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3 \wedge \neg p_4) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \neg p_4).$$

Bebizonyítható, hogy ha a $p_1, \ldots, p_n$ betűk között szerepel egy α formulában előforduló minden betű, és α nem kontradikció, akkor $p_1, \ldots, p_n$ fölött egy és csak egy, α-val egyenértékű α^* perfekt diszjunktív normálforma létezik. E tételt, kissé szemléletesebben, így is kifejezhetjük: ha α a kijelentéskalkulus egy olyan formulája, amely nem kontradikció, és a $p_1, \ldots, p_n$ betűk között minden α-beli betű szerepel, akkor α egyértelműen hozható perfekt diszjunktív normálformára a $p_1, \ldots, p_n$ betűk fölött.

A kontradikció-formulákra vonatkozó kivételt úgy szüntethetjük meg, hogy a kontradikciók perfekt diszjunktív normálformájának (bármilyen betűk fölött) a h (hamis) logikai értéket tekintjük.

(Az elemi konjunkció és a perfekt diszjunktív normálforma fogalmához hasonlóan definiálhatnánk az elemi diszjunkció és a perfekt konjunktív normálforma fogalmát. Definicióikat az előbbiekéből úgy kaphatjuk, ha bennük a 'konjunkció', 'diszjunkció', 'kontradikció', ,hamis' szavakat rendre a ,diszjunkció', ,konjunkció' 'tautológia', 'igaz' szavakkal cseréljük föl.)

Példaként néhány formula perfekt diszjunktív normálformája a p, q, betűk fölött:

p:	$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$,
q:	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$,
$\neg q$:	$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$,
$\neg(\neg p \rightarrow q)$:	$\neg p \wedge \neg q$,
$\neg(\neg p \vee \neg q \vee (p \wedge q))$:	h (kontradikció).

Ezek helyességét az olvasó pl. értékeléssel ellenőrizheti.

Az osztályalgebra elemei

Legyen U bizonyos dolgok (nem üres) összessége, nevezzük ezt, szokás szerint, *univerzumnak*. Legyenek P, Q, R, ... univerzumunk elemein értelmezett *tulajdonságok* (predikátumok.) Csak olyan tulajdonságokra szorítkozzunk, amelyekről univerzumunk bármely elemére eldönthető, hogy rendelkezik-e velük. Így minden tulajdonságot egyértelműen jellemez U-nak egy részhalmaza: egy osztály, amelyhez U-nak pontosan azok az elemei tartoznak, amelyek a szóban forgó tulajdonsággal rendelkeznek. Megfordítva, U bármely részhalmaza mint osztály reprezentál egy tulajdonságot, ti. a szóban forgó osztályhoz tartozás tulajdonságát. Ezért ebben a tárgyalásban az *osztály* és a *tulajdonság* (predikátum) szavakat mintegy szinonimáknak tekintjük; a kifejtendő elméletet akár osztályalgebrának, akár a tulajdonságok algebrájának nevezhetjük. Ebben a tárgyalásban a *tulajdonság* elnevezést fogjuk használni, mert a modális fogalmakhoz ez hozzáillőbb. Egy P tulajdonság *terjedelmén* — szokásosan — a P-tulajdonságú dolgok osztályát értjük.

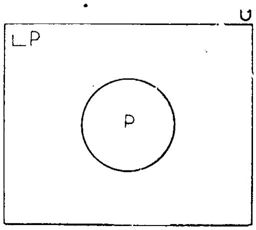
Az egész U univerzumot reprezentáló tulajdonságot *univerzális tulajdonságnak* mondjuk, és ugyancsak U-val jelöljük. Ezen egyszerűen az univerzumhoz tartozást értjük. Bevezetjük az *üres tulajdonságot* is, ezen egyszerűen az univerzumhoz nem-tartozást értjük, s $\emptyset$—val jelöljük. Ez olyan tulajdonság, amellyel univerzumunk egyetlen eleme sem rendelkezik.

A tulajdonságok között egy monadikus és két diadikus műveletet definiálunk. Egy P tulajdonság *komplementumán* értjük azt a tulajdonságot, mellyel univerzumunknak pontosan azok az elemei rendelkeznek, amelyek *nem* rendelkeznek a P tulajdonsággal; P komplementumát $\complement P$-vel jelöljük. (Ha pl. P a 'piros' tulajdonság, akkor $\complement P$ a 'nem-piros' tulajdonság.) Világos, hogy $\complement U = \emptyset$ és $\complement \emptyset = U$. (Szemléltetése az 1. ábrán.)

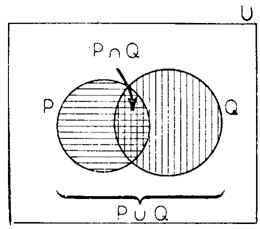
A P és a Q tulajdonság *metszetén* azt a tulajdonságot értjük, amellyel univerzumunknak azok és csak azok az elemei rendelkeznek, amelyek a P tulajdonsággal is és a Q tulajdonsággal is rendelkeznek; ezt $P \cap Q$-val jelöljük. (Ha pl. P a 'pazarló', Q a 'bürokrata' tulajdonság, akkor $P \cap Q$ a 'pazarló bürokrata' tulajdonság.) Világos, hogy bármely P-re $P \cap (\complement P)$ az *üres* tulajdonság.

Két tulajdonság, P és Q *unióján* azt a tulajdonságot értjük, amellyel univerzumunknak azok és csak azok az elemei rendelkeznek, amelyek a P és Q

tulajdonságok legalább egyikével rendelkeznek; ezt $P \cup Q$-val jelöljük. (Ha pl. P a 'pocakos' és Q a 'tarfejű' tulajdonság, akkor $P \cup Q$ a 'pocakos vagy tarfejű' tulajdonság, ennek terjedelmébe tartoznak a pocakosok, tekintet nélkül arra, hogy tarfejűek-e vagy sem, továbbá a tarfejűek, tekintet nélkül arra, hogy pocakosok-e vagy sem.) Világos, hogy bármely P-re $P \cup (\llcorner P)$ az *univerzális* tulajdonság. -- A metszet és az unió szemléltetését lásd a 2. ábrán.



1. ábra



2. ábra

Az osztályalgebra egy *kifejezésén* értjük:

(a) a tetszőleges tulajdonságokat jelentő $P, Q, R, \ldots$ betűket;

(b) az üres és az univerzális tulajdonságot szimbolizáló $\emptyset$ és U jeleket;

(c) már meglevő kifejezésekből a három művelet ($\llcorner$, $\cap$, $\cup$) alkalmazásával keletkező jelsorozatokat.

Tetszőleges kifejezéseket görög nagy betűkkel ((Γ, Δ, Θ stb.) fogunk jelölni. Az osztályalgebra két kifejezését *egyenértékűnek* mondjuk, ha a bennük szereplő betűket bármilyen univerzumon bármilyen tulajdonságként értelmezve, a két kifejezés mindig azonos terjedelmű tulajdonságot reprezentál. Így pl. $P \cup Q$ és $Q \cup P$ egyenértékűek, $P \cap (\llcorner P)$ és $\emptyset$ szintén. Azt, hogy Γ és Δ egyenértékű kifejezések, a $\Gamma \equiv \Delta$ szimbolummal fejezzük ki.

Három műveletünk definiciója erősen emlékeztet a kijelentéskalkulus $\neg$, $\wedge$, $\vee$ műveleteinek értelmezésére. Valóban, a két kalkulus között messzemenő analógia áll fönn. Ez az analógia teszi lehetővé az osztályalgebra két egyenértékű kifejezésének mechanikus vizsgálattal való fölismerését: Gondoljunk a két kifejezésben szereplő $P, Q, R, \ldots$ betűk helyébe $p, q, r, \ldots$ betűket, a $\llcorner$, $\cup$, $\cap$ jelek helyére rendre $\neg$, $\vee$, $\wedge$ operátorokat. Ezzel az osztályalgebrai kifejezések helyébe kijelentéskalkulusbeli formulákat képzeltünk. A két kifejezés akkor és csak akkor egyenértékű, ha az ilymódon helyükbe gondolt formulák azok; ez viszont értékeléssel eldönthető. A jelek gondolatban való kicserélésére persze nincs is szükség, egyszerűen azt mondhatjuk, hogy az osztálykalkulus kifejezéseit éppúgy értékelhetjük, mint a kijelentéskalkulus formuláit. (A most mondottak bizonyítását itt mellőzzük.)

Ha az osztályalgebra egy kifejezése minden értékelésre ,igaz'-nak adódik, az azt jelenti, hogy a szóban forgó kifejezés egyenértékű az univerzális tulajdonsággal. A csupa 'hamis' eredményű értékelés viszont az *üres* tulajdonsággal való egyenértékűséget jelzi.

Az implikációnak és az ekvivalenciának megfelelő műveleteket is lehetne az osztályalgebrában definiálni. Ezek közül csak az implikációnak megfelelő művelet érdekes. A kijelentéskalkulusban $p \to q$ egyenértékű $\neg p \vee q$-val. Ennek analógiájára a $\llcorner P \cup Q$ kifejezés rövidítésére bevezetjük a $P \supset Q$ szimbólumot. Ennek önálló elnevezést nem adunk. Jelentőségét a következő összefüggés világítja meg: Tegyük föl, hogy $P \supset Q \equiv U$. Ez, definició szerint, azt jelenti, hogy $\llcorner P \cup Q \equiv U$. Univerzumunk tehát ez esetben $\llcorner P$ és Q uniója; azaz U minden eleme vagy $\llcorner P$-tulajdonságú, vagy ha nem — azaz *ha* P*-tulajdonságú* —, *akkor* Q*-tulajdonságú*. Azaz univerzumunk minden P-tulajdonságú eleme Q-tulajdonságú is: *a* P*-tulajdonság része a* Q*-tulajdonságnak*. A $P \supset Q \equiv U$ összefüggés tehát azt fejezi ki, hogy P *része* Q-nak; és ez az egyetlen jelentősége az implikációnak megfelelő $\supset$ szimbólum osztályalgebrai bevezetésének. Egyébként a 'P része Q-nak' összefüggés a kijelentéskalkulusbeli 'p-nek következménye q' összefüggés osztályalgebrai megfelelője.

Az osztályalgebra és a kijelentéskalkulus közti analógia folytán nem kell részleteznünk, hogy az osztályalgebra kifejezéseire ugyanolyan zárójel-elhagyási konvenciókat vezetünk be, mint a kijelentéskalkulus formuláira, továbbá hogy a kifejezések perfekt diszjunktív normálformáját a formulákéval analóg módon értelmezzük ($\emptyset$-val egyenértékű kifejezések perfekt diszjunktív normálformájának h helyett magát $\emptyset$-t értelmezzük).

Az alethikus de dicto modalitás

Az alethikus modalítás elnevezése a görög 'alétheia' szóból származik (ἡ ἀλήθεια : az igazság). E modalitás *de dicto* típusa olyan kijelentésekkel foglalkozik, amelyek arról szólnak, hogy egy kijelentés *szükségszerűen* igaz, *lehetséges*, hogy igaz, *véletlenül* igaz, ill. *lehetetlen*, hogy igaz. Röviden: a négy alethikus modalitás *a szükségszerű*, *a lehetséges*, *a véletlen* és *a lehetetlen*.

Jelöljük $\mathbf{N}p$-vel azt, hogy a p kijelentés *szükségszerűen* igaz, $\mathbf{M}p$-vel pedig azt, hogy p igazsága *lehetséges*.[1] **N** és **M** alethikus modális operátorok. A másik két modalitást ezekkel és a kijelentéskalkulus operátoraival kifejezhetjük. Azt, hogy p igazsága *lehetetlen*, nyilván $\urcorner \mathbf{M}p$ ('nem lehetséges p') alakban írhatjuk. Végül azt, hogy p igazsága *véletlen*, úgy értelmezhetjük, hogy p igaz is, hamis is lehet, vagy ami ugyanaz: lehetséges p igazsága is és $\urcorner p$ igazsága is. Ha ezt az értelmezést elfogadjuk, akkor azt, hogy p véletlen, a $\mathbf{M}p \wedge \mathbf{M}\urcorner p$ szimbólummal fejezhetjük ki.

Megjegyzés: Szokás azt, amit itt mint *véletlent* értelmeztünk, *nyíltnak* is mondani. Ekkor azt, hogy p *véletlen*, így értelmezik: p igaz, de nem szükségszerűen; ezt $p \wedge \urcorner \mathbf{N}p$ ('p és nem szükségszerű p') alakban szimbolizálják. A továbbiakban a *véletlen* eredetileg adott értelmezését használjuk.

Az **N** operátort is kiküszöbölhetjük **M** segítségével (vagy fordítva), ha azt, hogy egy p kijelentés *szükségszerűen* igaz, úgy értelmezzük, hogy *negációja lehetetlen*; ezzel $\mathbf{N}p$ helyett $\urcorner \mathbf{M} \urcorner p$ írható (vagy $\mathbf{M}p$ helyett írhatunk $\urcorner \mathbf{N} \urcorner p$-t). Így a *lehetséges* modalitás segítségével valamennyi alethikus modalitás kifejezhetőnek bizonyult.

Ha a kijelentéskalkulus jelrendszeréhez hozzávesszük még a monadikus **M** operátort, akkor olyan *formális nyelvhez* jutunk, amelynek segítségével az alethikus de dicto modális elmélet kijelentéseinek *szerkezetét* vizsgáljuk. E nyelv formális leírását a következőképpen adhatjuk meg:

Az alethikus de dicto modális kalkulus (alább definiálandó) *formuláit* röviden **M**-*formuláknak* fogjuk nevezni. Előbb az **M**-*primformula* fogalmát értelmezzük:

[1] Ezek a betűk a német ‚notwendig' (szükséges) és ‚möglich' (lehetséges) szavak kezdőbetűi. A szakirodalom más jelöléseket is alkalmaz.

Ha α a kijelentéskalkulus egy formulája, akkor az $\mathbf{M}(\alpha)$ jelsorozatot **M**-*primformulának* mondjuk. α-t az $\mathbf{M}(\alpha)$ primformula *magjának* fogjuk nevezni.

Példa **M**-primformulára: $\mathbf{M}(p \wedge q)$, $\mathbf{M}(q \rightarrow r)$, $\mathbf{M}((p \vee \neg q) \rightarrow (\neg p \leftrightarrow r))$. A *magok* rendre: $p \wedge q$, $q \rightarrow r$, $(p \vee \neg q) \rightarrow (\neg p \leftrightarrow r)$.

Zárójel elhagyási konvenció; Ha α egyetlen betű vagy egy formula negációja, akkor $\mathbf{M}(\alpha)$ képzésekor a zárójel elhagyható. Tehát pl. $\mathbf{M}(p)$ helyett $\mathbf{M}p$-t, $\mathbf{M}(\neg q)$ helyett $\mathbf{M}\neg q$-t, $\mathbf{M}(\neg (p \rightarrow \neg r))$ helyett $\mathbf{M}\neg(p \rightarrow \neg r)$-et írunk.

M-*formuláknak* tekintjük:

(a) a kijelentéskalkulus formuláit,

(b) az **M**-primformulákat,

(c) mindazokat a jelsorozatokat, amelyek a kijelentéskalkulus formuláiból és **M**-primformulákból a $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ operátorok szabályos alkalmazásával keletkeznek, vagyis ugyanúgy épülnek föl a kijelentéskalkulus formuláiból és **M**-primformulákból, mint a kijelentéskalkulus formulái kijelentésatomokból.

Zárójel elhagyási konvenció (a kijelentéskalkulus konvencióin kívül): Egy **M**-primformulát, ha valamilyen további operátort alkalmazunk rá, nem szükséges zárójelbe tenni. Tehát pl. $(\mathbf{M}p) \wedge (\mathbf{M}\neg q)$ helyett $\mathbf{M}p \wedge \mathbf{M}\neg q$-t, $\neg(\mathbf{M}\neg p)$ helyett $\neg\mathbf{M}\neg p$-t, $(\mathbf{M}q) \rightarrow (\mathbf{M}\neg r)$ helyett $\mathbf{M}q \rightarrow \mathbf{M}\neg r$-et írunk.

További példák **M**-formulákra: $\mathbf{M}((q \vee \neg r) \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg\mathbf{M}(p \leftrightarrow \neg q)$; $(p \wedge (q \vee \neg r)) \rightarrow \mathbf{M}(q \rightarrow \neg r)$; $(\neg p \wedge \mathbf{M}\neg q) \vee (\neg\mathbf{M}\neg r \rightarrow (r \leftrightarrow \neg p))$, stb.

Ebben a keretben még nem szerepelnek ún. *iterált modalitások:* **M**-primformulára vagy általában olyan **M**-formulára, amelyben **M**-operátor is előfordul, **M**-operátor nem alkalmazható ismételten. Így $\mathbf{MM}p$ ('lehetséges, hogy lehetséges p') vagy $\mathbf{M}(p \wedge \neg\mathbf{M}\neg p)$ ('lehetséges, hogy p és hogy p szükségszerű') *nem* **M**-formula.

Kényelmi okokból az **N** operátort is megtarthatjuk, természetesen azzal, hogy $\mathbf{N}\alpha$ a $\neg\mathbf{M}\neg\alpha$ rövidítése (itt α a kijelentéskalkulus tetszőleges formulája).

Példaként fejezzük ki a (2) alatti következtetésben szereplő kijelentések szerkezetét. Kissé átstilizálva és kötőszavak helyett logikai operátorokat írva, ezt kapjuk:

($\neg$ létezik perpetuum mobile) $\rightarrow$ (a robbanómotor hatásfoka < 1).

$\neg\mathbf{M}$ (létezik perpetuum mobile).

M (a robbanómotor hatásfoka < 1).

A 'perpetuum mobile létezik' kijelentést p-vel, az 'a robbanómotor hatásfoka <1' kijelentést q-val szimbólizálva, az egész következtetés szerkezete ez:

(6) $$\frac{\neg p \rightarrow q; \qquad \neg\mathbf{M}p}{\mathbf{M}q}$$

(A vonal fölé a premisszákat, a vonal alá a konkluziót írtuk, hagyományosan.) Arra a kérdésre, hogy ez a következtetés helyes-e, *a kijelentéskalkulus értelmében* a válasz tagadó. A kijelentéskalkulusban ugyanis $\mathbf{M}p$-t és $\mathbf{M}q$-t felbonthatatlan egységnek kell tekintenünk, így nyilvánvaló, hogy $\mathbf{M}q$ hamis lehet akkor is, ha e premisszák mind igazak, hiszen $\mathbf{M}q$ logikai értéke független p, q és $\mathbf{M}p$ bármelyikének logikai értékétől. Hogy az „**M**-kalkulus" értelmében mi a válasz a kérdésre, ahhoz először értelmezni kellene a következmény fogalmát ebben a kalkulusban.

A probléma megoldásának egyik, eléggé természetes útja: az igaz és hamis tulajdonságok kiterjesztése **M**-kijelentésekre. Ezt természetesen úgy kell végeznünk, hogy a józan ésszel, a modális operátorok nyelvi értelmezésével a lehetőségekhez képest összhangban maradjunk. Érvényben hagyjuk a kijelentéskalkulusra vonatkozó értékelési szabályokat is.

Ez a kiterjesztés néhány posztulátum kimondásával oldható meg. Ezek a következők:

($M1$) *Az* **M**-*disztribució elve.* $\mathbf{M}(\alpha \vee \beta)$ logikai értéke ugyanaz, mint $\mathbf{M}\alpha \vee \mathbf{M}\beta$ logikai értéke: $\mathbf{M}(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\mathbf{M}\alpha \vee \mathbf{M}\beta)$ tautológia.

($M2$) *Az* **M**-*extenzionalítás elve.* Egyenértékűek lehetősége is egyenértékű, azaz: ha $\alpha \leftrightarrow \beta$ tautológia, akkor $\mathbf{M}\alpha \leftrightarrow \mathbf{M}\beta$ is az.

($M3$) *A tautológia szükségszerűségének elve.* Ha α tautológia, akkor $\mathbf{N}\alpha$ igaz.

($M4$) *Az 'igaz' posszibilitásának elve.* Ami igaz, az lehetséges is, azaz: ha α igaz, akkor $\mathbf{M}\alpha$ is igaz.

Ezek közül talán csak *($M3$)*-hoz kell néhány szót hozzáfűznünk. Gondoljuk el, hogy egy kijelentést a kijelentéskalkulus keretében formalizálunk, s eredményül olyan α formulát kapunk, amely tautológia. Ez azt jelenti, hogy eredeti kijelentésünk *pusztán logikai szerkezete következtében* igaz, függetlenül a benne szereplő kijelentésatomok tartalmától és igazságától. Úgy is mondhatjuk, hogy kijelentésünk logikai szükségszerűséggel igaz. Így kézenfekvő igaznak tekinteni azt a kijelentést, amely szerint az α formalizálta kijelentésünk szükségszerűen igaz, vagyis az $\mathbf{N}\alpha$ formalizálta kijelentést.

Ez természetesen nem zárja ki azt, hogy egyéb kijelentéseket ne tekintsünk szükségszerűen igazaknak. Hiszen gyakran igaznak tekintünk egy olyan kijelentést is, amelynek szerkezetét leíró formula nem tautológia, csakhogy az ilyen kijelentés igazsága már extralogikai föltevés. Ugyanígy, extralogikai föltevésként, szükségszerűen igaznak tekinthetünk olyan kijelentéseket is, amelyek szerkezete nem tautológia. Sőt extralogikai föltevésekkel még igaz és szükségszerűen igaz kijelentéseket is megkülönböztethetünk, és látjuk majd, hogy elméletünk keretében hasznosak is lehetnek ilyen megkülönböztetések.

A többi három elvhez, úgy hisszük, nem szükséges reflexiókat fűznünk; elfogadásuk eléggé evidens.

Megjegyezzük, hogy *($M3$)*-at átfogalmazhatjuk így: *Ha α kontradikció, akkor* $\mathbf{M}\alpha$ *hamis.* Ugyanis: ha α kontradikció, akkor $\neg\alpha$ tautológia, így *($M3$)* szerint $\mathbf{N}\neg\alpha$ igaz. De $\mathbf{N}\neg\alpha$ nem más, mint $\neg\mathbf{M}\alpha$, s mivel ez igaz, $\mathbf{M}\alpha$ valóban hamis. *($M3$)*-at többnyire ebben az átfogalmazott alakjában fogjuk fölhasználni.

Négy elvünk segítségével már bármely **M**-formulát értékelhetünk, ha előzőleg egy előkészítő eljárásnak vetjük alá. Ez az előkészítő eljárás a következő.

Először is eltávolítjuk a formulából az esetleges **N**-operátorokat azzal, hogy $\mathbf{N}\alpha$ helyére mindenhol $\neg\mathbf{M}\neg\alpha$-t írunk.

Ezután összeszámoljuk az $\mathbf{M}\alpha$ alakú primformulákban szereplő összes különböző kijelentésatomokat, és ezeket valamilyen sorrendbe rakjuk; legyen ez a sorrend mondjuk $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Most valamennyi $\mathbf{M}\alpha$ alakú primformulában az α „mag" helyére α-nak a $p_1, \ldots, p_n$ betűk fölötti perfekt diszjunktív normálformáját, α^*-ot tesszük. Mivel α és α^* egyenértékűek, azért *($M2$)* szerint $\mathbf{M}\alpha$ és $\mathbf{M}\alpha^*$ is egyenértékűek, $\mathbf{M}\alpha$ pótlása $\mathbf{M}\alpha^*$-gal tehát jogos.

Ha valamelyik α^* többtagú diszjunkció, mondjuk $\beta_1 \vee \beta_2 \vee \ldots \vee \beta_k$ alakú, akkor *($M1$)* szerint $\mathbf{M}\alpha^*$, azaz $\mathbf{M}(\beta_1 \vee \ldots \vee \beta_k)$ logikai értéke ugyanaz, mint $\mathbf{M}\beta_1 \vee \ldots \vee \mathbf{M}\beta_k$ logikai értéke. Jogosan pótolhatjuk tehát előbbit az utóbbival.

Ha viszont valamelyik α^* *kontradikció*, akkor *(M3)* szerint $\mathbf{M}\alpha^*$ hamis. Ebben az esetben $\mathbf{M}\alpha^*$ helyébe h-t teszünk.

Illusztráljuk az előkészítő eljárást egy példán:

$$[(p \to q) \wedge \mathbf{N}(\neg p \vee \neg q \vee (p \wedge q))] \to (\mathbf{N}q \to \neg \mathbf{M}p). \tag{7}$$

Először kiküszöböljük az előforduló N-operátorokat:
$[(p \to q) \wedge \neg\mathbf{M}\neg(\neg p \vee \neg q \vee (p \wedge q))] \to (\neg\mathbf{M}\neg q \to \neg\mathbf{M}p)$.
A primformulákban előforduló betűk p és q. Három primformula van. Ezek „magjainak" perfekt diszjunktív normálformáit kell előállítanunk. (Valamenynyit megtaláljuk a kijelentéskalkulusról szóló rész végén.)

$\neg(\neg p \vee \neg q \vee (p \wedge q)$ kontradikció, így $\mathbf{M}\neg(\neg p \vee \neg q \vee (p \wedge q))$ helyére h-t írunk.

$\neg q$ perfekt diszjunktív normálformája $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$, tehát $\mathbf{M}\neg q$ helyére $\mathbf{M}(p \wedge \neg q) \vee \mathbf{M}(\neg p \wedge \neg q)$-t írunk.

p perfekt diszjunktív normálformája $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$, tehát $\mathbf{M}p$ helyére $\mathbf{M}(p \wedge q) \vee \mathbf{M}(p \wedge \neg q)$ kerül.

Ezeket a pótlásokat elvégezve, formulánk így alakul:

$$[(p \to q) \wedge \neg h] \to [\neg(\mathbf{M}(p \wedge \neg q) \vee \mathbf{M}(\neg p \wedge \neg q)) \to \neg(\mathbf{M}(p \wedge q) \vee \mathbf{M}(p \wedge \neg q))]. \tag{8}$$

A preparált formulában előforduló $\mathbf{M}$-primformulák annyiban speciálisak' hogy mind $\mathbf{M}\beta$ alakúak, ahol β egy elemi konjunkció bizonyos kijelentésatomok (példánkban p és q) fölött. Nevezzük az ilyen $\mathbf{M}\beta$ formulákat formulánk **M**-*atomjainak*. Azt mondhatjuk, hogy a preparált formula **M**-atomokból *és* kijelentés-atomokból *és* esetleg még a h logikai értékből ugyanúgy épül föl, mint a kijelentéskalkulus egy formulája kijelentésatomokból. (Persze a háromfajta alapanyagból egy vagy kettő hiányozhat is.)

Az értékelést az eredeti formula helyett a preparált formulán végezzük, lényegében úgy, mint a kijelentéskalkulusban. Eltérések:

(a) Az **M**-atomokat ugyanúgy tekintjük, mint a kijelentéskalkulusban a kijelentésatomokat, tehát a *különböző* **M**-atomokat tetszőleges rögzített logikai értékkel helyettesítjük.

(b) A kijelentésatomok közül csak azokat értékeljük, amelyek **M**-*atomokon kívül* is előfordulnak a formulában.

(c) Ha a kijelentésatomok valamilyen értékelésekor egy β elemi konjunkció értéke i és $\mathbf{M}\beta$ szerepel a formula atomjai között, akkor ($M4$) szerint $\mathbf{M}\beta$ értéke is i. Egy ilyen értékelésben tehát az $\mathbf{M}\beta$ atom értéke nem választható szabadon: csak *igaz* lehet. (Az (a) kikötés korlátozása.)

(d) Ha az összes **M**-atom magjaiból képezett diszjunkció tautológia, akkor az **M**-atomok közül legalább egyet mindig i-re kell értékelnünk. Ha ugyanis $\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_k$ tautológia, akkor $\mathbf{M}(\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_k)$ értéke *(***M***4)* szerint i. De $\mathbf{M}(\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_k)$ — az **M**-disztribució elve szerint — egyenértékű $\mathbf{M}\alpha_1 \vee \ldots \vee \mathbf{M}\alpha_k$-val, ezért az utóbbi értékének is i-nek kell lennie. A diszjunkció pedig csak úgy lehet igaz, ha legalább egy igaz tagja van. Következésképp az $\mathbf{M}\alpha_1, \ldots, \mathbf{M}\alpha_k$ atomok közül minden értékelésben legalább egyet i-re kell értékelnünk. (Az (a) kikötés második korlátozása.)

Az **M**-atomok magjai elemi konjunkciók bizonyos $p_1, \ldots, p_n$ betűk fölött. Egyszerű kombinatorikai megfontolásokkal adódik, hogy a különböző ilyen elemi konjunkciók száma 2^n. Ebből következik, hogy egy n betűs perfekt diszjunktív normálformának maximálisan 2^n (különböző) diszjunkciós tagja lehetséges. Az is kimutatható, hogy egy ilyen perfekt diszjunktív normálforma akkor és csak akkor tautológia, ha diszjunkciós tagjainak száma ezt a maximumot eléri.

Ennek alapján: Ha egy **M**-formulában az **M**-primformulák magjaiban összesen n különböző betű szerepel, akkor az **M**-atomok magjainak diszjunkciója akkor és csak akkor lehet tautológia, ha a különböző **M**-atomok száma 2^n. Ha ennél kevesebb, akkor a (d) korlátozást figyelmen kívül hagyhatjuk. (Ha pl. a primformulák magjaiban összesen két különböző betű fordul elő, akkor a (d) korlátozás csak abban az esetben hatékony, ha a különböző **M**-atomok száma eléri a 2^2-t, azaz a 4-et.)

Ha a preparáció során észrevesszük, hogy valamelyik primformula magja tautológia, akkor ezt a primformulát a fentiek alapján rögtön i-vel pótolhatjuk.

Példaként tárgyalt formulánkban a p és q kijelentésatomok **M**-atomokon kívül is előfordulnak, tehát értékelendők. A formulában szereplő négy **M**-atom között három különböző van. A (d) korlátozás tehát elesik. Az értékelést úgy végezzük, mint a kijelentéskalkulus egy ötatomos formulájában, betarva persze a (c) korlátozást. Vegyük pl. a következő értékelést:

p	q	$\mathbf{M}(p \wedge q)$	$\mathbf{M}(p \wedge \neg q)$	$\mathbf{M}(\neg p \wedge \neg q)$
h	i	h	h	h

Mindenekelőtt meg kell vizsgálnunk, hogy ez az értékelés összhangban van-e a (c) korlátozással. Az adott értékelés a $\neg p \wedge q$ elemi konjunkciót igazzá teszi, ez azonban egyik **M**-atomunkban sem szerepel; az **M** atomokban szereplő elemi konjunkciók egyike sem lesz igaz ezzel az értékeléssel. Így az **M**-atomok értékeit teljesen szabadon választhatjuk.

Helyettesítsük be a kiválasztott értékeket a (8) formulába. (A benne szereplő h-t mint egyszer s mindenkorra konstans logikai értéket persze érintetlenül hagyjuk.) Ezt kapjuk:

$$[(h \to i) \wedge \neg h] \to [\neg(h \vee h) \to \neg(h \vee h)].$$

Ezt kiszámítva, eredményül i-t kapunk. Az adott értékelésre tehát formulánk logikai értéke — és így az eredeti (7) formuláé is — igaz.

Ugyanezen formula egy másik értékelésének elkészítéséhez válasszuk p és q értékét egyaránt i-nek. Ezzel $p \wedge q$ értéke i, így a (c) korlátozás szerint most $\mathbf{M}(p \wedge q)$ értéke nem lehet h. A másik két **M**-atom értékét szabadon választhatjuk. Vegyük pl. a következő értékelést:

p	q	$\mathbf{M}(p \wedge q)$	$\mathbf{M}(p \wedge \neg q)$	$\mathbf{M}(\neg p \wedge \neg q)$
i	i	i	h	h

Behelyettesítve (8)-ba, ezt kapjuk:

$$[(i \to i) \wedge \neg h] \to [\neg(h \vee h) \to \neg(i \vee h)].$$

Kiszámítva, eredményül h-t kapunk. Így máris látjuk, hogy a (7) formula értéke, az adott értékelési szabályok szerint, lehet igaz is, hamis is. Kézenfekvő, hogy formulánkat nem fogjuk az **M**-rendszer tautológiájának tekinteni.

Utóbbi értékelésünk eredményét érdekesen interpretálhatjuk, ha értelmezzük két kijelentés *összeférhetőségének* fogalmát: Két kijelentést *összeférhetőnek* mondunk, ha konjunkciójuk *lehetséges*. Tehát $\mathbf{M}(\alpha \wedge \beta)$ igazsága azt fejezi ki, hogy α és β összeférhetőek.

Ezt fölhasználva, mondhatjuk; ha p és q igaz, továbbá $\neg q$ összeférhetetlen p állításával is, tagadásával is, akkor (7) hamis.

Most már definiálhatjuk, mit tekintünk az **M**-rendszerben logikai igazságnak, tautológiának.

Az **M**-rendszer egy α formuláját **M**-*tautológiának* mondjuk, ha (az (a)-(d) szabályok szerinti) minden megengedett értékelésre az *igaz* logikai értéket veszi föl. Az **M**-*kontradikció* definiálását nyugodtan átengedhetjük az olvasónak (különban sem lesz rá szükségünk).

Az **M**-*következmény* egy kézenfekvő definiciója: Ha α és β olyan **M**-formulák, hogy $\alpha \to \beta$ **M**-tautológia, akkor és csak akkor mondjuk azt, hogy α-nak **M**-következménye β. A többpremisszás következetetést a premisszák konjunkciójával itt is visszavezctjük az egypremisszás következtetésre.

Világos, hogy az **M**-tautológiák között ott vannak a kijelentéskalkulus tautológiái is, továbbá hogy a kijelentéskalkulus minden helyes következtetése egyben helyes **M**-következtetés is.

Most már módunkban van a (2) példa következtetésének helyességét megvizsgálni. A következtetés szerkezetét már (6) alatt előállítottuk. A két premisszát a konjunkciójukkal pótoljuk:

$$\frac{(\neg p \to q) \wedge \neg\, \mathbf{M}p}{\mathbf{M}q}$$

Az **M**-következmény definiciója szerint azt kell megvizsgálni, hogy a

$$[(\neg p \to q) \wedge \neg \mathbf{M}p] \to \mathbf{M}q$$

formula **M**-tautológia-e. Kezdjük a preparálással. **N**-operátor a formulában nem szerepel. Az **M**-primformulákban előforduló kijelentésatomok p és q, a magok ugyanezek. p perfekt diszjunktív normálformája a p, q betűk fölött $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$, q-é pedig $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$. (Lásd a kijelentéskalkulusról szóló rész végén.) A preparáció eredménye tehát:

(9) $[(\neg p \to q) \wedge \neg(\mathbf{M}(p \wedge q) \vee \mathbf{M}(p \wedge \neg q))] \to [\mathbf{M}(p \wedge q) \vee \mathbf{M}(\neg p \wedge q)]$.

Mint látjuk, értékelendők a p és q atomok, továbbá az $\mathbf{M}(p \wedge q)$, $\mathbf{M}(p \wedge \neg q)$, $\mathbf{M}(\neg p \wedge q)$ **M**-atomok. Már az összes lehetséges értékelések puszta felsorolása is igen nagy munka lenne, nem is beszélve effektív kiszámításukról. De ezt a nagy munkát nem is kell elvégezni. Csak azt kell belátnunk, hogy egyetlen értékelés eredménye sem lehet h, és ezt elegánsan ellenőrizhetjük a következő *indirekt* úton.

Tegyük föl, hogy lenne olyan értékelés, amelyre (9) hamis lenne. Mivel (9) implikáció, ez csak úgy volna lehetséges, ha előtagja i, utótagja h értékű lenne. De az utótag diszjunkció, ezért csak úgy lehet hamis, ha mindkét tagja hamis. Tehát föltételezett értékelésünkben az $\mathbf{M}(p \wedge q)$ és az $\mathbf{M}(\neg p \wedge q)$ atomok értéke h.

Implikációnk előtagja, mely feltevésünk szerint i értékű, konjunkció, ezért mindkét tagja i. De második tagja negáció, így a negált rész h. Ez utóbbi két **M**-atom diszjunkciója, ezek mindegyikének hamisnak kell lennie. Egyikükről, $\mathbf{M}(p \wedge q)$-ról, ezt már az előző bekezdésben is megállapítottuk. Most adódott, hogy még $\mathbf{M}(p \wedge \neg q)$ értéke is h. Összefoglalva: föltételezett értékelésünkben mindhárom szereplő $\mathbf{M}$-atom értéke h.

Végül vegyük figyelembe, hogy az implikációnk i értékű előtagjában szereplő első konjunkciós tagnak, $\neg p \rightarrow q$-nak is igaznak kell lennie. De p és q csak olyan értéket vehetnek föl, amelyek nem mondanak ellent annak, hogy mindhárom $\mathbf{M}$-atomunk értéke h. Úgy kell értékelnünk, hogy sem $p \wedge q$, sem $p \wedge \neg q$, sem $\neg p \wedge q$ ne legyen igaz. Erre csak egy mód van: p-t, is, q-t is hamisnak kell választani. De akkor $\neg p \rightarrow q$-ból $\neg h \rightarrow h$, azaz $i \rightarrow h$, azaz h lesz, ellentétben azzal, hogy i-nek kellene lennie. Nem létezik tehát olyan értékelés, amelyre (9) hamis. Igy (9) $\mathbf{M}$-tautológia, következtetésünk tehát az $\mathbf{M}$-rendszerben helyes.

Következtetésünk akkor is helyes marad, ha a konkluzióban $\mathbf{M}q$ helyett q-t írunk, vagyis a *lehetségest igaz*zal helyettesítjük. A példa szövegéből a józan ész számára mindkét konkluzió trivialitás, sőt a józan ész talán még azt is megkockáztatja, hogy $\mathbf{N}q$ is következménye a premisszáknak. Nos, az $\mathbf{M}$-rendszerben ez a következtetés már nem számít helyesnek, a konkluzió nem fokozható szükségszerűvé. Ezt formálisan így láthatjuk be. Gondoljunk következtetésünk konkluziójául $\mathbf{M}q$ helyett $\mathbf{N}q$-t. Ezt lépésről lépésre a következő, vele egyenértékű formulával pótolhatjuk ($\neg q$ perfekt diszjunktív normálformáját lásd a kijelentéskalkulusról szóló rész végén):

$$\mathbf{N}q,$$

$$\neg \mathbf{M} \neg q,$$

$$\neg \mathbf{M}((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q)),$$

$$\neg [\mathbf{M}(p \wedge \neg q) \vee \mathbf{M}(\neg p \wedge \neg q)].$$

A (9) formula úgy módosul, hogy utótagja helyébe ez az utoljára kapott formula lép. Így a (9) formula helyett most ezt a formulát kell értékelni:

(10) $$[(\neg p \rightarrow q) \wedge \neg (\mathbf{M}(p \wedge q) \vee \mathbf{M}(p \wedge \neg q))] \rightarrow \neg [\mathbf{M}(p \wedge \neg q) \vee \mathbf{M}(\neg p \wedge \neg q)].$$

Ez azonban hamissá válik a következő értékeléssel:

(11)

p	q	$\mathbf{M}(p \wedge q)$	$\mathbf{M}(p \wedge \neg q)$	$\mathbf{M}(\neg p \wedge \neg q)$
h	i	h	h	i

Az olvasó könnyen ellenőrizheti, hogy ez az értékelés nem kerül összeütközésbe értékelési előírásainkkal, és hogy a (10) formula erre az értékelésre (mellesleg: csak erre az egyre!) tényleg hamis lesz. Így (10) nem $\mathbf{M}$-tautológia; a szükségszerűvé erősített konkluzióval a (2) példabeli következtetés *az* $\mathbf{M}$*-rendszer szerint* nem helyes, a premisszákból nem következik, hogy a robbanómotor hatásfoka *szükségszerűen* kisebb 1-nél.

Azt lehet mondani erre, hogy akkor az $\mathbf{M}$-rendszer *nem jó*, mert a józan ész(?) a konkluziót szükségszerűnek érzi. Ám ez a benyomásunk azért van, mert magát a $\neg p \rightarrow q$ formalizálta kijelentést szükségszerűnek érezzük. Ezt azonban a premisszában nem kötöttük ki. Eredményünk éppen ezért nem adhatja q szükségszerűen igaz voltát. Mivel föltevésünkben nem kötöttük ki, hogy $\neg p \rightarrow q$ szükségszerűen igaz, csak azt, hogy igaz, a modális kalkulus automatikusan számontartja azt a *lehetőséget* is, amikor $\neg p \rightarrow q$ hamis, azaz $\neg p$ is, $\neg q$ is igaz. Figyeljük meg, hogy a (11) táblázat utolsó oszlopában éppen ez: $\neg p$ és $\neg q$ összeférhetősége van föltételezve. Ha ezt kizárjuk, vagyis ebben az oszlopban i helyére h-t teszünk, akkor a (10) formula értéke már igaz lesz. Ezzel tehát kikapcsolnánk azt az egyetlen értékelési lehetőséget, amely (10)-et hamissá teszi, így (10) tautológia, következtetésünk pedig helyes lenne. De ez a manőver pontosan azt jelenti, hogy $\neg p \rightarrow q$-t szükségszerűen igaznak gondoljuk. Mihelyst ezt formálisan fölvesszük premisszának, formálisan is megkapjuk az $\mathbf{N}q$ konkluziót. Az

$$\frac{\mathbf{N}(\neg p \rightarrow q), \quad \neg \mathbf{M}p}{\mathbf{N}q} \tag{12}$$

következtetés helyes, ha az

$$[\mathbf{N}(\neg p \rightarrow q) \wedge \neg \mathbf{M}p] \rightarrow \mathbf{N}q$$

formula tautológia. Az $\mathbf{N}$ operátort kiküszöbölve:

$$[\neg \mathbf{M} \neg (\neg p \rightarrow q) \wedge \neg \mathbf{M}p] \rightarrow \neg \mathbf{M} \neg q.$$

Helyettesítsük az $\mathbf{M}$-primformulák ,,magjait'' p, q fölötti perfekt diszjunktív normálformáikkal. p és $\neg q$ perfekt diszjunktív normálformái föntebb már szerepeltek; $\neg(\neg p \rightarrow q)$-ét is megadtuk a kijelentéskalkulusról szóló rész végén. Az $\mathbf{M}$-operátort disztribuálva mindenütt, ahol lehet, ezt kapjuk:

$$[\neg \mathbf{M}(\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg (\mathbf{M}(p \wedge q) \vee \mathbf{M}(p \wedge \neg q))] \rightarrow \neg [\mathbf{M}(p \wedge \neg q) \vee \mathbf{M}(\neg p \wedge \neg q)].$$

Ebben a preparált formulában *csak* $\mathbf{M}$-atomok szerepelnek, kijelentésatomok nem. Az olvasó könnyen meggyőződhet róla, hogy az előtagot csak egyetlen értékelés teszi igazzá, és ez az egyetlen értékelés az utótagot is igazzá teszi. Formulánk tehát tautológia, ezért a (12) következtetés helyes.

Ha egy implikáció szükségszerűen igaz — mint legutóbbi példánk egyik premisszájában —, akkor *szigorú implikációnak* mondjuk. Ennek formalizált alakja (az $\mathbf{M}$-rendszerben) tehát $\mathbf{N}(p \rightarrow q)$. Hasonlóan értelmezzük az $\mathbf{N}(p \leftrightarrow q)$ *szigorú ekvivalenciát* is. A szigorú implikáció egyenértékű kifejezése: $\neg \mathbf{M}(p \wedge \neg q)$ (p és nem-q lehetetlen), a szigorú ekvivalenciáé: $\neg \mathbf{M}((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q))$.

Az $\mathbf{M}$-rendszer néhány nevezetes tautológiája:

$\mathbf{N}p \rightarrow \mathbf{M}p.$	(A necesse esse ad posse valet consequentia.)
$\mathbf{N}(p \wedge q) \leftrightarrow (\mathbf{N}p \wedge \mathbf{N}q).$	(Az $\mathbf{N}$-operátor $\wedge$-re disztributív.)
$(\mathbf{N}p \vee \mathbf{N}q) \rightarrow \mathbf{N}(p \vee q).$	(A fordított irányú implikáció nem tautológia !)
$\mathbf{M}(p \wedge q) \rightarrow (\mathbf{M}p \wedge \mathbf{M}q).$	(A fordított irányú implikáció nem tautológia !)
$[\mathbf{N}p \wedge \mathbf{N}(p \rightarrow q)] \rightarrow \mathbf{N}q.$	(Ha a szigorú implikáció előtagja szükségszerű, akkor utótagja is szükségszerű.)
$\mathbf{N}p \rightarrow \mathbf{N}(q \rightarrow p).$	(A szükségszerűt bármi szigorúan implikálja.)
$\neg \mathbf{M}p \rightarrow \mathbf{N}(p \rightarrow q).$	(A lehetetlen bármit szigorúan implikál.)
$\mathbf{N}(\neg p \rightarrow p) \rightarrow \mathbf{N}p.$	(Amit a tagadása is szigorúan implikál, az szükségszerű. — Consequentia mirabilis.)
$\mathbf{N}p \rightarrow p.$	(A necesse esse ad esse valet consequentia.)
$p \rightarrow \mathbf{M}p.$	(Ab esse ad posse valet consequentia.)
$\neg \mathbf{M}p \rightarrow \neg p.$	(Ami lehetetlen, az hamis.)
$\neg p \rightarrow \mathbf{M} \neg p.$	(A hamis posszibilisan is hamis.)

Az **M**-formula értelmezése szerint az **M** (és az **N**) operátor nem alkalmazható olyan formulára, amelyben már előfordul az **M** (ill. az **N**) operátor. Tehát pl. **MM**p az **M**-rendszerben nem formula. Ha ezt a kikötést elejtjük, és megengedjük **M** (és **N**) alkalmazását **M**-formulákra is, akkor az $\mathbf{M}_2$*-rendszerhez* jutunk. A kontraszt kedvéért az eddigi **M**-rendszert nevezzük a továbbiakban $\mathbf{M}_1$*-rendszernek.*

Mivel az **N** operátort rövidítésnek tekintjük, a továbbiakban az értelmezésekben nem fogjuk külön megemlíteni, de használatát továbbra is megengedettnek tekintjük.

Legyen α az $\mathbf{M}_1$-rendszer olyan formulája, amelyben az **M** operátor előfordul. Akkor az $\mathbf{M}\alpha$ jelsorozatot az $\mathbf{M}_2$-rendszer egy *primformulájának* tekintjük, α e primformula *magja.* Így $\mathbf{M}_2$-primformulák például: $\mathbf{MM}p$, $\mathbf{M}(\neg\mathbf{M}p \wedge \mathbf{N}q)$, $\mathbf{M}(p \rightarrow \neg\mathbf{M}q)$; a magok rendre $\mathbf{M}p$, $\neg\mathbf{M}p \wedge \mathbf{N}q$, $p \rightarrow \neg\mathbf{M}q$. Ugyanolyan zárójel-elhagyási konvenciót alkalmazunk, mint az $\mathbf{M}_1$-primformulák bevezetésekor.

Az $\mathbf{M}_2$-rendszer *formulái* $\mathbf{M}_1$-formulákból és $\mathbf{M}_2$-primformulákból a kijelentéskalkulus operációival épülnek föl, tehát ugyanúgy képezhetők belőlük, mint az $\mathbf{M}_1$-formulák a kijelentéskalkulus formuláiból és $\mathbf{M}_1$-primformulákból. (Magát a kijelentéskalkulust nulladrendű alethikus de dicto modalitásnak, $\mathbf{M}_0$-rendszernek tekinthetjük; ennek primformulái és atomjai azonosak: a $p, q, r, \ldots$ betűk.) A zárójel-elhagyási konvenció is analóg az $\mathbf{M}_1$-formula értelmezésekor bevezetett konvencióval.

Mint az $\mathbf{M}_2$-formula értelmezéséből kiolvasható, ebben a rendszerben az **M** operátor *egyszeri iterációja* megengedett, többszöri azonban nem, tehát pl. **MMM**p még $\mathbf{M}_2$-ben sem számít formulának.

Az *értékelés* kiterjesztése $\mathbf{M}_2$-re analóg az $\mathbf{M}_1$-beli kiterjesztéssel. A preparálást ugyanúgy kezdjük, mint $\mathbf{M}_1$-ben: kiküszöböljük az esetleg előforduló **N** operátorokat, összeszedjük *az* $\mathbf{M}_1$*-primformulákban* előforduló összes kijelentésatomokat, majd az $\mathbf{M}_1$-primformulák magjait ezek fölött perfekt diszjunktív normálformákra hozzuk, és utóbbiak tagjaira az **M** operátorokat disztribuáljuk. (Ha a mag kontradikció, akkor persze a hozzátartozó $\mathbf{M}_1$-primformulát h-val helyettesítjük.) Így megkapjuk a formula $\mathbf{M}_1$-atomjait is. Amit eddig elmondtunk, azt az $\mathbf{M}_1$-rendszerben is alkalmaztuk.

Most figyelembe vesszük azt a többletet, amit az $\mathbf{M}_2$-rendszer ad. Áttérünk az $\mathbf{M}_2$-primformulákra, összeszedjük a magjaikban előforduló olyan $q_1, q_2, \ldots, q_k$ kijelentésatomokat, amelyekre nem vonatkozik (a magon belül) **M** operátor, továbbá a magokban szereplő összes különböző $\mathbf{M}_1$-atomokat is, legyen ezek listája $a_1, a_2, \ldots, a_j$. Most minden egyes $\mathbf{M}_2$-magot perfekt diszjunktív normálformára hozunk $q_1, \ldots, q_k, a_1, \ldots, a_j$ fölött (tehát itt az $\mathbf{M}_1$-atomokat és a kijelentésatomokat egyenrangúakként kezeljük), majd a kapott forma diszjunkciós tagjaira az **M** operátort disztribuáljuk. Ha valamelyik $\mathbf{M}_2$-mag kontradikciónak bizonyulna, akkor az őt tartalmazó $\mathbf{M}_2$-primformulát is h-val helyettesítjük, az *(M3)* elv alapján. Eredményként ún. $\mathbf{M}_2$*-atomokat* kapunk; ezek $\mathbf{M}\alpha$ alakú formulák, ahol α olyan elemi konjunkció, melynek tagjai kijelentésatomokon és negáltjaikon kívül $\mathbf{M}_1$-atomok és ezek negáltjai (a kijelentésatomok esetleg hiányozhatnak is).

Az így preparált formulában önállóan kell értékelni: (a) mindazokat a kijelentésatomokat, amelyekre **M** operátor nem vonatkozik, (b) mindazokat az $\mathbf{M}_1$-atomokat, amelyek $\mathbf{M}_2$-atomokban nem fordulnak elő, (c) valamennyi $\mathbf{M}_2$-atomot. De itt is figyelembe kell vennünk az *(M_4)* elvet, vagyis azokat a korlátozásokat, amelyeket az $\mathbf{M}_1$-rendszer értékelési utasításában (c) és (d) alatt foglaltunk össze, csakhogy ezeket most az $\mathbf{M}_1$-atomokon kívül még az $\mathbf{M}_2$-atomokra is kell — értelemszerűen — alkalmazni.

Így, meglehetősen bonyolult és fáradságos úton, az $\mathbf{M}_2$-rendszer formulái is értékelhetők, következésképpen a rendszer tautológiái és helyes következtetései mechanikus vizsgálattal felismerhetők.

Az elmondott bővítési eljárás az $\mathbf{M}_2$-rendszerre megismételhető, így juthatunk az $\mathbf{M}_3$-rendszerhez, s i.t. Következésképp nincs akadálya olyan formulák s következtetések vizsgálatának, amelyekben az **M** (vagy az **N**) operátornak bármilyen magas iterációja előfordul. Az ilyenfajta bonyolítás lényeges elvi bonyolultságot nem eredményez, csupán a kiszámítás technikája válik hosszabbá. Az elektronikus számológépek korában azonban ez sem jelent leküzdhetetlen akadályt: egy *gépies* kiszámítási eljárást mindig lehet *gépesíteni* is. (Más kérdés, hogy megéri-e a munkát; ez nyilván az alkalmazástól függ.)

Kiszámítási példát az $\mathbf{M}_2$-rendszer formulájára vonatkozóan nem mutatunk be; a legegyszerűbb nemtriviális példa is túl terjedelmes lenne.

Természetesen vetődik föl a gondolat, hogy szükség van-e egyáltalán az $\mathbf{M}_2$-rendszerre (és a még magasabbakra)? Vajon mást jelent-e például $\mathbf{MM}p$, mint $\mathbf{M}p$? Ez felfogás, vagy inkább *alkalmazás* kérdése: előfordulhat, hogy nem kell őket megkülönböztetnünk, de bizonyos körülmények között előfordulhat az is, hogy igen. Ha az utóbbi eset áll fönn, akkor az $\mathbf{M}_2$-rendszert kell használnunk, ha nem, akkor egy egyszerűbb rendszerrel is kijöhetünk (ezt alább bemutatjuk).

Előfordulhat azonban pl. az $\mathbf{M} \neg \mathbf{M}p$ kombináció is (lehetséges, hogy p lehetetlen), és még kérdésesebb, hogy ez pótolható-e $\neg\mathbf{M}p$-vel, hiszen az utóbbi lényegesen erősebbet állít.

További problémát jelent pl. a $\mathbf{M}(\mathbf{M}\alpha \wedge \beta)$ alakú formulák kezelése: ezek nem vezethetők vissza $\mathbf{MM}\alpha \wedge \mathbf{M}\beta$ alakú formulákra, hiszen az **M** operátor a konjunkcióra nézve nem disztributív.

Mindenesetre érdemes áttekinteni azt a formális rendszert, amelyben ezek a redukciók szabadon elvégezhetők, hiszen várható, hogy lényegesen egyszerűbb és könnyebben kezelhető lesz, mint a magasabbrendű **M**-rendszerek.

Redukált alethikus modalitások

Az **MM** operátor **M**-re redukálásának lehetőségét úgy biztosíthatjuk, hogy az $\mathbf{M}_2$-rendszerben az *(M1) — (M4)* elvekhez fölvesszük még a következőt is:

(M5) A redukció első elve: Ha lehetséges, hogy egy kijelentés lehetséges, akkor a szóban forgó kijelentés lehetséges.

Az $\mathbf{M}_2$-rendszernek ezt a bővítését nevezzük $\mathbf{M}_2'$-rendszernek.

Az $\mathbf{M}_2'$-rendszerben az

$$\mathbf{MM}p \to \mathbf{M}p$$

formula tautológia, hiszen a preparáció során egyetlen $\mathbf{M}_1$-atomnak $\mathbf{M}p$, egyetlen $\mathbf{M}_2$-atomnak $\mathbf{MM}p$ bizonyul, ha viszont $\mathbf{MM}p$-t i-re értékeljük, akkor *(M5)* szerint $\mathbf{M}p$-t is i-re kell értékelnünk, következésképp az implikáció semmilyen értékelésre sem lesz hamis.

A megfordítása, ti.

$$\mathbf{M}p \to \mathbf{MM}p,$$

már az $\mathbf{M}_2$-rendszerben is tautológia, hiszen ha $\mathbf{M}p$-t i-re értékeljük, akkor (már *(M4)* szerint!) $\mathbf{MM}p$-t is i-re kell értékelnünk.

Így az $\mathbf{M}_2'$ rendszerben

$$\mathbf{MM}p \leftrightarrow \mathbf{M}p$$

tautológia, vagyis más szóval, az $\mathbf{MM}p$ és az $\mathbf{M}p$ formulák egyenértékűek. Következésképp az értékelést előkészítő preparáció során az $\mathbf{MM}\alpha$ alakú $\mathbf{M}_2$-atomok $\mathbf{M}\alpha$ alakú $\mathbf{M}_1$-atomokkal pótolhatók, ami a kiszámítást már lényegesen egyszerűsíti. Megmaradnak azonban az $\mathbf{M} \neg \mathbf{M}\alpha$ alakú és az $\mathbf{M}(\mathbf{M}\alpha \wedge \beta)$, ill. $\mathbf{M}(\neg \mathbf{M}\alpha \wedge \beta)$ alakú *atomok.*

Megjegyezzük, hogy az $\mathbf{M}_2'$-rendszer egy nevezetes tautológiája:

$$\mathbf{NN}p \leftrightarrow \mathbf{N}p.$$

Eszerint az iterált $\mathbf{N}$-operátor is redukálható. Csak a vegyesen előforduló modális operátorok maradnak redukálatlanok, ugyanis $\mathbf{NM}p$ ugyanaz, mint $\neg\mathbf{M} \neg \mathbf{M}p$, és ebben $\mathbf{M} \neg \mathbf{M}p$ nem redukálható; hasonlóan $\mathbf{MN}p$ ugyanaz, mint $\mathbf{M} \neg \mathbf{M} \neg p$, tehát $\mathbf{M} \neg \mathbf{M}\alpha$ alakú (α helyén $\neg p$-vel), így nem redukálható.

A vegyes operátorok redukálásához elég a következő elv:

(M6) A redukció második elve: Ami lehetséges, az szükségszerűen lehetséges.

Az *(M5) — (M6)* elvekkel kibővített $\mathbf{M}_2$-rendszert nevezzük $\mathbf{M}_2^*$-rendszernek. Ebben a rendszerben az

$$\mathbf{M}p \to \mathbf{NM}p$$

formula tautológia, hiszen ha $\mathbf{M}p$ igaz, akkor *(M6)* szerint $\mathbf{NM}p$ is igaz, így formulánk a hamis értéket nem veheti föl. A fordított irányú implikáció, ti.

$$\mathbf{NM}p \to \mathbf{M}p,$$

már az $\mathbf{M}_2$-rendszerben tautológia. Ezért $\mathbf{M}_2^*$-ban az

$$\mathbf{M}p \leftrightarrow \mathbf{NM}p$$

formula tautológia, $\mathbf{NM}p$ és $\mathbf{M}p$ egyenértékűek. Így az $\mathbf{NM}$ operátor redukálható $\mathbf{M}$-re.

Ebből már közvetlenül adódik, hogy $\mathbf{M} \neg \mathbf{M}p$ és $\neg\mathbf{M}p$ is egyenértékűek. A rendszer további nevezetes tautológiái:

$$\mathbf{MN}p \leftrightarrow \mathbf{N}p, \qquad \mathbf{MM}p \leftrightarrow \mathbf{NM}p, \qquad \mathbf{MN}p \leftrightarrow \mathbf{NN}p, \qquad p \to \mathbf{NM}p.$$

Ezek mutatják, hogy első látszatra eléggé ártatlannak tűnő bővítésünk nagyon is vitatható konzekvenciákhoz vezet: elmossa a különbséget a posszibilisan szükségszerű, a szükségszerű és a szükségszerűen szükségszerű között, a posszibilisan lehetséges, a lehetséges és a szükségszerűen lehetséges között. Mindamellett ez a rendszer hasznos lehet olyan esetben, amikor az említett finom megkülönböztetések szerepe elhanyagolható.

Viszont *(M6)* fölvétele a kiszámítási eljárást nagyon megkönnyíti. Kimutatható ugyanis, hogy tetszőleges α és β formulákra

$$\mathbf{M}(\mathbf{M}\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\mathbf{M}\alpha \wedge \mathbf{M}\beta) \text{ és } \mathbf{M}(\neg\mathbf{M}\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\neg\mathbf{M}\alpha \wedge \mathbf{M}\beta)$$

tautológiák az $\mathbf{M}_2^*$ rendszerben. Ezek alapján **M** disztribuálható minden olyan konjunkcióra, amelynek legalább egy tagja $\mathbf{M}\alpha$ vagy $\neg\mathbf{M}\alpha$ alakú. Ennek alkalmazásával az $\mathbf{M}_2$-atomok teljesen kiküszöbölhetők; a preparált formulában már csak $\mathbf{M}_1$-atomok lesznek. Így preparálás után az értékelés úgy megy, mint az $\mathbf{M}_1$-rendszerben, tehát viszonylag egyszerű módon.

Megjegyezzük, hogy *(M6)* fölvétele *(M5)* fölvételét fölöslegessé teszi: *a második redukciós elvnek az első következménye.* Ennek formális kimutatását itt mellőzzük.

Az $\mathbf{M}_3$, $\mathbf{M}_4$, ... rendszerek redukciójához *(M6)* fölvétele teljesen elegendő. Ugyanis: ahogyan *(M6)* segítségével az $\mathbf{M}_2$-formulák $\mathbf{M}_1$-formulákká, tehát eggyel alacsonyabb rendszámúvá transzformálhatók ugyanúgy az $\mathbf{M}_n$-formulák is $\mathbf{M}_{(n-1)}$formulákba redukálhatók $(n \geq 2)$. Ezt addig ismételhetjük, amíg $\mathbf{M}_1$-formulákhoz nem jutunk. (Világos, hogy itt az eljárás megakad: a modális operátorok teljes kiküszöbölésére *(M6)* nem ad lehetőséget.)

Így ha a redukció második elvét elfogadjuk, az összes alethikus de dicto modalitást az $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, ..., $\mathbf{M}_n$, ... rendszerek helyett egyetlen $\mathbf{M}^*$ rendszerben tanulmányozhatjuk. E rendszer formulái kijelentésatomokból *(p, q, r, ... betűkből)* a kijelentéskalkulus operátorainak és az **M**-operátornak minden korlátozás nélküli (véges sokszori) szabályos alkalmazásaival épülnek föl; a rendszer értékelési eljárását az *(M1)* — *(M4)*, *(M6)* elvek alapozzák meg.

Ha *(M6)* helyett csak az enyhébb *(M5)*-öt fogadjuk el, akkor a magasabbrendű modalitásokból csak az azonos operátorok iterációját tudjuk redukálni, a vegyesen előfordulókat nem. A kiszámítási eljárás valamivel egyszerűsödik, de az $\mathbf{M}_1$-atomokon kívül $\mathbf{M}_2$-atomok vagy még magasabbrendűek is fölléphetnek.

Végül ha *(M5)*-öt sem tartjuk elfogadhatónak, akkor a finomabb distinkciókat lehetővé tevő, de lényegesen bonyolultabban kezelhető $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, ..., $\mathbf{M}_n$, ... rendszereket kell használnunk.

Az alethikus modalitás axiomatizálása

Ismeretes, hogy a kijelentéskalkulusnak ún. *axiomatikus* fölépítése is lehetséges. Egy ilyen fölépítés egyik lehetséges menete pl. a következő.

Felsoroljuk a használt jeleket, a formulaképzési szabályokat. (Ez ugyanúgy megy lényegében, mint a nem-axiomatikus, értékelő fölépítésben.)

Megadunk néhány tautológiát, ezeket nevezzük *axiómáknak.*

Megadunk néhány olyan formula-átalakítási szabályt, amely tautológiákra alkalmazva tautológiákat eredményez; ezeket a szabályokat *levezetési szabályoknak* nevezzük. A levezetési szabályok részben a kijelentéskalkulus bizonyos helyes következtetési eljárásai.

A megfelelően választott axiómákból a megfelelően választott levezetési szabályok elég sokszori alkalmazásával a kijelentéskalkulus minden tautológiája előállítható, *levezethető.* Rendszerint az alábbi levezetési szabályokat szokás megadni:

(a) Helyettesítés. Egy formulában szereplő valamelyik betű helyére, minden előfordulásában, tetszőleges formulát teszünk (persze mindenütt ugyanazt a formulát). Ha a kiinduló formula tautológia, akkor az eljárás eredményeként kapott formula is az. A helyettesített betű egy értékelésben ugyanis lehet igaz vagy hamis — a formula értéke, mivel tautológia, mindkét esetben

igaz —, de a helyettesítő formula sem vehet föl más értéket, mint az igazat és a hamisat.

(b) Leválasztás. Adott α és $\alpha \rightarrow \beta$ alakú formulákból a β formula előállítását jelenti. Ha α és $\alpha \rightarrow \beta$ tautológia, akkor β is az; ez az implikációra vonatkozó értékelési szabály közvetlen következménye.

A kijelentéskalkulus axiomatizálásához hasonlóan az alethikus de dicto modális kalkulus is axiomatizálható. Az axiomatikus fölépítéshez célszerű a formula értelmezését mindjárt úgy megadni, hogy az akárhányadfokú $\mathbf{M}_n$-rendszer formulái is szerepeljenek benne. (Úgy, mint az $\mathbf{M}^*$-rendszer formuláinak definiálásakor tettük.). Axiómáknak és levezetési szabályoknak fölvesszük a kijelentéskalkulus egy axiómarendszerének axiómáit és levezetési szabályait, majd ezeket kibővítjük olyan axiómákkal és levezetési szabályokkal, amelyek lényegében az $(M1)$ — $(M6)$ elvek formalizált megfelelői. Egy ilyen lehetséges bővítés pl. a következő:

Pótaxiómák:

$p \rightarrow \mathbf{M}p$. (Az ‚igaz' posszibilitásának elve: $(M4)$.)

$\mathbf{M}(p \vee q) \leftrightarrow (\mathbf{M}p \vee \mathbf{M}q)$. (Az **M**-disztribució elve: $(M1)$.)

Ha az iterált modalitásokat részben vagy egészben ki akarjuk küszöbölni, akkor az alábbi axiómák egyikét is föl kell vennünk:

$\mathbf{MM}p \rightarrow \mathbf{M}p$. (A redukció első elve: $(M5)$.)

$\mathbf{M} \neg \mathbf{M}p \rightarrow \neg \mathbf{M}p$. (A redukció második elvét, $(M6)$-ot helyettesíti.)

Levezetési pótszabályok:

Az $\alpha \leftrightarrow \beta$ formulából az $\mathbf{M}\alpha \leftrightarrow \mathbf{M}\beta$ formula előállítása. (Ha az első tautológia, akkor $(M2)$ szerint a második is az. Ez a szabály tehát az **M**-extenzionalitás elvének megfelelője.)

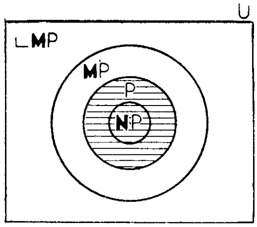
Az α formulából az $\mathbf{N}\alpha$ formula előállítása. (Ha az első tautológia, akkor $(M3)$ szerint a második is az. Ez tehát a tautológia szükségszerűsége elvének megfelelője.)

Bizonyítható, hogy ez az axiómarendszer az alethikus de dicto kalkulus *adekvát* leírása: egy formula benne akkor és csak akkor vezethető le, ha tautológia. A tautológia fogalmát persze itt háromféle értelemben kell vennünk aszerint, hogy redukciós axiómát vagy egyáltalán nem veszünk föl, vagy az enyhébbet veszszük föl, vagy az erősebbet vesszük föl (amelyből az enyhébb egyébként levezethető). Az első esetben az értékeléshez $(M5)$ és $(M6)$ nem használható, a második esetben $(M5)$ használandó, de $(M6)$ nem, a harmadik esetben $(M6)$ is használandó.

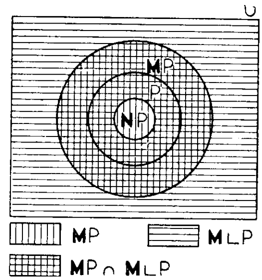
Az alethikus de re modalitás

Ez a modális elmélet hasonló bővítéssel keletkezik az osztályalgebrából, mint az alethikus de dicto elmélet a kijelentéskalkulusból. Tárgyát úgy jelölhetnénk meg, hogy a *szükségszerű, lehetséges, véletlen* és *lehetetlen* tulajdonságokkal foglalkozik.

Ha P egy tulajdonság, akkor $\mathbf{M}P$-vel jelöljük azt a tulajdonságot, amelylyel univerzumunknak azok és csak azok az elemei rendelkeznek, amelyekre nézve *lehetséges,* hogy rendelkeznek a P tulajdonságokkal. ($\mathbf{M}P$ terjedelmébe tehát azok a dolgok tartoznak, amelyekről nincs eleve kizárva, hogy P-tulajdonságúak.) Továbbá $\mathbf{N}P$ jelölje azt a tulajdonságot, amellyel univerzumunknak azok és csak azok az elemei rendelkeznek, amelyek *szükségszerűen* P-tulajdonságúak. $\mathsf{L}\mathbf{M}P$ nyilván azt a tulajdonságot jelöli, amelynek terjedelmébe tartozó dolgok szükségszerűen nem-P-tulajdonságúak, vagyis amelyekre *lehetetlen,* hogy P-tulajdonságúak legyenek. Végül az $\mathbf{M}P \cap \mathbf{M} \llcorner P$ tulajdonság terjedelmébe azok a dolgok tartoznak, amelyekre nézve a P tulajdonság *véletlen.* (Az összefüggéseket a 3. és 4. ábra szemlélteti.)



3. ábra



4. ábra

Az **N** operátor itt is kiküszöbölhető: $\mathbf{N}P \equiv \llcorner \mathbf{M} \llcorner P$.

A de dicto-elméletben az értékelés alapjául szolgáló *(M1) — (M6)* itteni megfelelői:

(M1') $\mathbf{M}(P \cup Q) \equiv (\mathbf{M}P \cup \mathbf{M}Q)$.
(M2') Ha $\Gamma \equiv \Delta$, akkor $\mathbf{M}\Gamma \equiv \mathbf{M}\Delta$.
(M3') Ha $\Gamma \equiv U$, akkor $\mathbf{N}\Gamma \equiv \Gamma \equiv U$.
(M4') P mindig része $\mathbf{M}P$-nek.
(M5') $\mathbf{MM}P \equiv \mathbf{M}P$.
(M6') $\mathbf{M}P \equiv \mathbf{NM}P$.

Az első négy elv elfogadása eléggé természetes, és talán itt, a de re-elméletben, még a redukciós elvek is elfogadhatóbbaknak tünnek, mint a de dicto elméletben.

Látjuk, szerkezetét, szintaxisát tekintve az alethikus de re modalitás semmiben sem különbözik az alethikus de dicto modalitástól. Így a de dicto-elméletben kifejtett formális rendszerek ($\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, . . ., $\mathbf{M}_2'$, $\mathbf{M}_2^*$, $\mathbf{M}^*$) analogonjai itt is felépíthetők; ezek részletezése semmi érdekeset nem nyújtana.

Néhány szót az alethikus de re-elmélet alkalmazási lehetőségeiről. A 'szükségszerű' és a 'lehetséges' szavak értelme alapján az $\mathbf{N}P$, P és $\mathbf{M}P$ tulajdonságok terjedelmét úgy képzeljük el, ahogyan a 3. ábra mutatja: $\mathbf{N}P$ része P-nek, P része $\mathbf{M}P$-nek. Kérdés, hogy ha egy rögzített P tulajdonságot veszünk, akkor fönnállhat-e az, hogy egyrészt $\mathbf{N}P$ *valódi* és *nem üres* része P-nek (azaz hogy vannak olyan dolgok is, amelyek szükségszerűen P-tulajdonságúak, és olyanok is, amelyek P-tulajdonságúak, de nem szükségszerűen), másrészt P *valódi* része $\mathbf{M}P$-nek és egyben $\mathbf{M}P$ *nem az univerzális* tulajdonság (azaz hogy a nem-P-tulajdonságú dolgok között vannak olyanok is, amelyek *lehetnének* P-tulajdonságúak, és olyanok is, amelyek nem is lehetnének)?

Egyes logikusok — bizonyára némi logicista befolyásra[2] — azon a véleményen vannak, hogy ez az eset nem fordulhat elő. Szerintük a tulajdonságok két osztályba sorolhatók: a *formális* vagy logikai tulajdonságok és a *materiális* vagy

[2] Az olvasó figyemébe ajánljuk, hogy a logicizmus nem azonos a logisztikával. Előbbi filozófiai irányzat, utóbbi szaktudomány: azonos a matematikai logikával.

leíró tulajdonságok osztályába. Ha P formális tulajdonság, akkor $\mathbf{N}P = P = \mathbf{M}P$, ha viszont P materiális tulajdonság, akkor $\mathbf{N}P = \emptyset$ és $\mathbf{M}P = U$, tehát az univerzum minden eleme posszibilisan P-tulajdonságú, de egyetlen eleme sem szükségszerűen P-tulajdonságú. Így az alethikus de re modalitás alkalmazásának csak olyan univerzumon van értelme, amelyen formális és materiális tulajdonságok egyaránt definiáltak.

Formális tulajdonságon olyan tulajdonságot értenek, amely az univerzum és a tulajdonság definiciójának birtokában az univerzum bármely elemére *a priori* eldönthető. Így pl. ha az univerzum az egész számok halmaza és P a 'páros számnak lenni' tulajdonság, akkor P formális tulajdonság, mert bármely konkrét egész szám fogalmában már benne van, hogy páros-e vagy sem. A matematikai tulajdonságok általában formálisak.

A materiális tulajdonságok viszont csak *a posteriori* dönthetők el. Pl. anyagi tárgyak egy univerzumán a 'vasból való' tulajdonság materiális; hogy az univerzum valamely eleme rendelkezik-e vele, általában csak a szóban forgó elem konkrét vizsgálatával dönthető el.

Ez a felfogás valójában egyszer s mindenkorra *definiálja* az $\mathbf{M}P$ és $\mathbf{N}P$ tulajdonságokat, így:

$$\mathbf{N}P = \begin{cases} P, \text{ ha } P \text{ formális tulajdonság,} \\ \emptyset \text{ egyébként (azaz ha } P \text{ materiális tulajdonság);} \end{cases}$$

és

$$\mathbf{M}P = \begin{cases} P, \text{ ha } P \text{ formális tulajdonság,} \\ U \text{ egyébként (azaz ha } P \text{ materiális tulajdonság).} \end{cases}$$

Viszont ez a felfogás mesterséges gátat emel az alethikus de re modalitás alkalmazásai elé. A gyakorlatban hasznosabb lehet alkalmi kritériumokkal megkülönböztetni az $\mathbf{M}P$, P, $\mathbf{N}P$ tulajdonságokat. Ilyen megkülönböztetés lehetőségét egy példával illusztráljuk.

Legyen univerzumunk mondjuk egy város lakóinak összessége, és P az 'anya' tulajdonság. Akkor $\mathbf{M}P$ terjedelmének tekinthetjük pl. a városbeli ivarérett nők összességét, $\mathbf{N}P$ terjedelmének pedig a város azon nőlakóinak összességét, akiknek személyi igazolványuk tanúskodik arról, hogy gyermekük van. Ebben az esetben $\mathbf{N}P$, P és $\mathbf{M}P$ többnyire különböző terjedelműek lesznek.

Mindenesetre az alkalmazhatóság sokkal szélesebb skálájára látszik lehetőség, ha az $\mathbf{M}$ és az $\mathbf{N}$ operátor jelentését nem definiáljuk egyszer s mindenkorra, hanem a konkrét esetekben próbálunk rájuk olyan alkalmi kritériumokat találni, amelyek még összeegyeztethetők az eldöntési kalkulust megalapozó elvekkel.

Folyt. köv.

МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ I

Имре Ружа

В статье автор знакомит читателя с математико-логическими системами модальных логик. Изложение следует по существу методу Wright-а, поскольку отдельные модальные калькулусы связываются с оценивающей системой калькулуса заявления, а также классовой алгебры, причем оценивающий прием — с избранием соответствующих постулатов — распространяется на расширенную систему. В работе кратко излагается также и основная мысль аксиоматического построения отдельных систем.

В настоящей, первой части статьи — после того, как было дано не-формальное изложение понятия модальности — в краткой и обобщенной форме упоминаются те элементы калькулуса заявления и классовой алгебры, которые используются в последующем рассуждении. Далее автор знакомит читателя с оценивающим построением алетической модальной теории de dicto. Автор останавливается также на проблеме редукции высших (итеративных) модальностей, затем излагает основы аксиоматического построения алетической системы. В заключение первой части кратко излагается алетическая модальная теория de re.

Изложение последующих модальных теорий будет дано во второй части работы.

MODAL LOGICS I

by *I. Ruzsa*

On a popular level the paper introduces the mathematical logical system of modal logics. The presentation is essentially based on the method of Wright since the author joins the different modal calculi to the evaluative system of class algebra resp. of propositional calculus and extends the evaluative procedure with the help of adequate postulates to the expanded system. He briefly treats the basic idea of the axiomatic structure of the different systems.

The first part of the paper gives an informal discussion of the concept of modality, then briefly summarizes the elements of propositional calculus and class algebra applied in the paper. Then the author describes an evaluative system of alethic *de dicto* modal theory. He outlines the problem of reduction in the iterated modalities and the bases of the axiomatic system of alethic logic. The last topic of the first part is a brief review of the athletic *de re* modal theory.

The second part of the paper discusses additional modal theories.