A matematika helye a tudományok rendszerében

FENYŐ ISTVÁN

1. Korunk egyik érdekes és talán jellegzetesnek is mondható tudományos jelensége a matematikai módszerek behatolása a legkülönbözőbb szaktudományokba. A tudományoknak a múlt században megindult gyors fejlődése napjainkban eddig sosem látott viharos, forradalmi lendületet vett, amely az egyes szaktudományok feladatkörének és problematikájának bővülésével és vele kapcsolatban csaknem mindig matematikai módszerek intenzív alkalmazásával jár. Vegyük például a leggyorsabban fejlődő műszaki területet, a híradástechnikát, mely a hagyományos matematikai apparátuson kívül a matematika modern ágaira — a matematikai logikára, az információelméletre, az operátorszámításra, — is támaszkodik, vagy pedig az aero- és a hidrodinamikát, mely a komplex függvénytannak nemcsak klasszikus fejezeteit, hanem a kvázianalitikus függvényeknek az utóbbi évtizedekben kidolgozott elméletét is hasznosítja. De olyan tudományágak, melyek a múltban meglehetősen távol álltak a matematika alkalmazási körétől, mint a kémia, biológia, orvostudomány, közgazdaságtudomány, nyelvtudomány, zenetudomány, fejlődésük folyamán kénytelenek mind több és több matematikai módszert felhasználni. Ma talán kuriózumnak tűnik, de egészen bizonyosan holnap már köznapivá válik, hogy a régészet vagy a filológia egyes problémáit matematikai módszerek segítségével oldja meg.[1]

Marx már egy évszázaddal ezelőtt megállapította, hogy „valamely tudomány csak akkor volt igazán fejlett, ha már a matematikát vehette igénybe".[2]

Marx maga is törekedett a politikai gazdaságtannak általa felfedezett tételeit matematikai formába önteni és matematikai módszereket alkalmazni a politikai gazdaságtanban. Különösen a kapitalizmus periodikusan megismétlődő válságjelenségeit szerette volna valamilyen matematikai elmélettel is leírni. Ismeretes, hogy e célból élete végén elmélyült és alapos matematikai tanulmányokat folytatott, ennek emlékét őrzi az a több mint 900 oldalt kitevő matematikai kézirata, mely hagyatékából került ki.[3]

[1] Gondolunk például arra, hogy az ősi maya írást a Szovjetúnióban egy munkacsoport, elektronikus számológép segítségével, meglepően rövid idő alatt megfejtette, és ezzel a filológiának és a régészetnek hatalmas szolgálatot tett. E csoport a SZUTA szibériai osztályának az Sz. Szoboljev akadémikus (matematikus) vezetése alatt álló matematikai intézetében végezte kutatásait.

[2] Paul Lafargue: Visszaemlékezések Marxra. Marx: Válogatott Művek. Szikra, 1948., 441. o.

[3] Vö. Paul Labérenne: Les Mathématiques et le Marxisme, Les grands courants de la pensée Mathématique. Paris. 1948. 378. o. Egyébként Marx e megjegyzéseit oroszra lefordították, és a Marx—Engels—Lenin Intézet gondozásában közreadták. Szemelvény-

2. A matematika fejlődése az elmúlt, mintegy 300 év alatt — bár sajátos utakat követett — mégis elsősorban a fizika és a csillagászat fejlődésével állt a legközelebbi kapcsolatban. Ugyancsak a fizika, a csillagászat és a műszaki tudományok képezték azt a területet, amely a legnagyobb matematikai apparátust igényelte (ez a helyzet még ma is fennáll). E történelmi „szimbiózis" az egyik oka annak, hogy sokan a matematikát a természettudományokhoz sorolják. Hozzájárult ehhez, hogy a XVII—XIX. század matematikusai közül sokan kiváló fizikusok is voltak. Gondoljunk például Newton, Laplace, Lagrange, Gauss, Stokes munkásságára.

E szemléletnek gyakorlati, tudományszervezési konzekvenciái is voltak és vannak. Számos országban közös, matematikai *és* fizikai társulatok, egyesületek alakultak, sok tudományos akadémián a matematika *és* a természettudományok művelése egy osztályon belül folyik. Magyarországon is, például, a felszabadulásig matematikai *és* fizikai társulat, a Magyar Tudományos Akadémiának pedig matematikai *és* természettudományi osztálya (III. osztály)[4] működött

E történelmileg kialakult szemlélet sok szempontból káros volt a múltban és káros ma is. A matematika alkalmazási körének nagymérvű kiterjedése, különösen a társadalomtudományok különböző területeire, mind nyilvánvalóbbá tette e szemlélet tarthatatlanságát. A matematika fejlődése a XVIII. sz. második felétől, de különösen a XIX. században mind jobban elszakadt a fizika fejlődésétől, és önálló utat folytatott.

Az a benyomásunk, hogy a matematikának a természettudományokhoz való sorolásának volt egy materialista — bár vulgármaterialista — magva is, amely a matematikai fogalmak materiális, anyagi eredetét volt hivatva kihangsúlyozni. Talán ennek reakciójaként, mint valóban szélsőséges idealista felfogás alakult ki a múlt század közepén az a nézet, amely a matematikát nemcsak a fizikai talajtól, hanem bármilyen objektív materiális talajtól szerette volna elszakítani. Utalunk itt Kronecker híres — vagy inkább hírhedt — állásfoglalására, mely szerint „az egész számokat a jóisten teremtette, minden egyebet az emberi ész alkotott meg". E felfogás szerint a matematika a filozófiai tudományokhoz sorolandó.

Mindenesetre látjuk: a matematikai tudományok besorolása a tudományok rendszerébe valóban probléma, méghozzá nem is öncélúan felvetett kérdés, hanem olyan, melynek megoldása gyakorlati, különösen tudományszervezési jelentőséggel bír.

3. Ahhoz, hogy a kérdést eldönthessük, azt kell közelebbről megvizsgálnunk, hogy mi is voltaképpen a matematika tárgya, és miben áll a matematika módszere. A tudományok osztályozásában ti. az egyes tudományágak *tárgyát* és *módszerét* vették mindig alapul. Különösen a modern matematika

ként idézzük Marx egy levelének részletét, amelyet Engelshez intézett 1873. május 31-én: „Az ügy a következő: te ismered azokat a táblázatokat, melyekben az árakat, a diszkont kamatlábakat stb. az év stb. során történő változásukat emelkedő és süllyedő cikcakkos vonallal ábrázolják. Többször megkíséreltem — a válságok elemzéséhez — ezeket az emelkedő és süllyedő mozgásokat mint szabálytalan görbéket kiszámítani, és azt hittem (és most is hiszem, hogy eléggé megrostált anyaggal ez lehetséges), hogy ebből matematikai úton megállapíthatom a válságok fő törvényeit. Mint már mondottam — Moore — a dolgot egyelőre keresztülvihetetlennek tartja, és ezért elhatároztam, hogy ideiglenesen felhagyok vele." Karl Marx—Friedrich Engels: Briefwechsel. Bd. IV. Berlin. 478. o. 1426. sz. levél.

[4] Ma Matematikai és Fizikai Tudományok Osztálya működik.

tárgyának vizsgálata érdekes, mert hiszen ez az utóbbi 50—60 évben hatalmas és egészen sajátszerű változáson ment keresztül.

Bertrand Russellnek van egy sokat idézett, szellemesnek ható mondása, mely szerint „a matematikát úgy határozhatjuk meg, mint olyan tárgyat, amelyben sohasem tudjuk, miről beszélünk, sem azt, hogy az, amiről szó van, igaz-e."[5] Russell kétségkívül a matematika rendkívül absztrakt voltára céloz, mely miatt minden fogalma minden anyagiságtól függetlennek látszik. Csakhogy bármennyire is absztrakt fogalmakkal foglalkozik a matematika, nekünk az a véleményünk, hogy B. Russell mondásának éppen a megfordítottja igaz (még ha nem is hat olyan szellemesnek és frappánsnak): a matematikában addig egyáltalában semmiről sem beszélünk, míg pontosan meg nem határoztuk azt, amiről szó van, és nagyon is jól tudjuk — mint látni fogjuk —, mi egy matematikai igazság kritériuma.

A matematika egyik jellegzetessége a definíciók különleges szerepében jut kifejezésre. Ez egyúttal a matematika rendkívül absztrakt voltának egyik forrása is. A kívülállónak, de még a dolgok mélyére eléggé nem tekintő szemlélő előtt is úgy tűnhet, mintha a matematikus a fogalmait a definíciókkal megalkotná, megteremtené. A fizikus, a kémikus, a közgazdász vizsgálatának tárgyát azért definiálja és úgy definiálja, hogy összefoglalja annak leglényegesebb jegyeit, hogy jellemezze azt, amivel foglalkozni akar. De definíciójával korántsem akarja kimeríteni tárgyának összes tulajdonságait, végtelen sok oldalát, és ezt meg sem teheti. Természetesen a fizikus, a kémikus vagy a közgazdász tárgyai léteztek akkor is, amikor ezek definícióit még senki sem fogalmazta meg, és nyilvánvalóan nem a definíció alkotta meg ezeket. A fizika, kémia vagy közgazdaságtan tárgyainak vannak olyan tulajdonságai is, melyek a definíciókban nincsenek benne, és a fizikus, a vegyész, vagy a közgazdász alkalomadtán ezekkel szemben sem közömbös. Ezzel szemben a matematikus definíciói a definiált dolog valamennyi tulajdonságának forrásai. Ezt úgy kell érteni, hogy a definiált fogalom valamennyi tulajdonsága logikai — és csakis logikai — folyománya a definíciónak (és természetesen azon matematikai rendszer axiómáinak, melyen belül a definíciónak értelme van). A tulajdonságok megállapításánál tehát a matematikus semmi egyebet nem vesz figyelembe — a logikai törvényeken kívül —, mint az illető rendszer axiómáit és a szóbanforgó fogalmak definícióit. Ha a matematikus a körről beszél, mint adott síkhoz tartozó olyan pontok halmazáról, melyek egy adott ponttól egyenlő távolságnyira vannak, akkor ebben a kör valamennyi tulajdonsága benne van. A matematikus úgy tesz, mintha e megfogalmazás előtt nem is lett volna kör, hiszen a kör tulajdonságait logikai-deduktív úton csak akkor állapíthatja meg, ha már tudja, mi az. Ezt a tudását a definíciókból és az axiómákból meríti. De ha ez így van, márpedig ez így van, akkor Kroneckernek kellene igazat adni, aki szerint a matematikai vizsgálat minden tárgyát a matematikus alkotja.

Persze, Kroneckernek minden látszat ellenére sincsen igaza. Mert aki csak a mai, már kialakult matematikát, annak mai tárgyát és módszerét tekinti, helytelenül, antidialektikusan jár el, és figyelmen kívül hagyja azokat a történelmi tényeket, amelyek alapján a mai matematika kifejlődött. Az ugyanis igaz, hogy a *mai* matematikus a körön azon síkbeli pontok mértani helyét *akarja* érteni, amelyeknek egy adott ponttól való távolsága ugyanaz, és ezt

[5] B. Russel: International Monthly. 1901., 89. o.

meg is teheti, mert e definícióban logikai önellentmondás nincsen. Ámde hogy a matematika ide juthatott, ahhoz az emberiségnek fel kellett találnia a kereket, a korongot, és meg kellett ismernie a keréknek, ennek a nagyon is anyagi dolognak számtalan tulajdonságát. A következő lépés a körnek mint a kerék absztrakciójának megalkotása volt, ami természetesen csak nagyon sok korong és kerék elkészítése révén történhetett meg. Még további lépés volt a kör képzetét anyagi tartalmától elválasztani és puszta formaként tekinteni.

Ugyanez vonatkozik a matematika többi fogalmára: ahhoz, hogy a természetes (pozitív egész) szám fogalomhoz jusson az emberiség, őseinknek nagyon sok nyáj állományát kellett meghatározniuk; ahhoz, hogy az ember „megalkothassa" a racionális és még általánosabban, a valós szám fogalmát, nagyon sok hosszúságmérést kellett elvégeznie. És amit most megállapítottunk a matematika legegyszerűbb fogalmaira, az a matematika számos bonyolultabb fogalomalkotására is vonatkozik. A differenciálhányados fogalmát az emberek *felfedezték* (nem pedig megalkották!) a természetben. De ahhoz, hogy e felfedezést megtehessék, nagyon sok földi és égi mozgást kellett megfigyelniük és elemezniük. E megfigyelések talaján született meg a differenciálhányados fogalma mint nagyon is reális dolgokhoz kapcsolódó és az anyaggal szemben egyáltalában nem közömbös fogalom. Csaknem másfél évszázadon át alkalmazták — mégpedig sikerrel — a differenciálhányadosnak ezt a szemlélethez és tapasztalathoz kötött fogalmát, mígnem megszületett az a differenciálhányados-fogalom, melyet ma minden matematikus-diák az első szemeszterben megtanul, és amely — éppen úgy, mint minden más matematikai fogalom — már elszakadt az anyagtól és pusztán logikai definícióként él tovább.

Hasonló története van a végtelen sor összege vagy a komplex szám fogalmának is, habár ezeket a fogalmakat az ember nem közvetlenül a természetből merítette, mint a kör, a sík, a differenciálhányados fogalmát. De ezeket is hosszú időn át használták — mert használni *kellett* — anélkül, hogy pontosan tudták volna logikailag kifogástalan definícióikat. Csupán a XIX. sz. második felében sikerült olyan logikailag helyes definíciót találni, mely az addig használt fogalmakkal konformis. A matematikai fogalmak kialakulásának ez az „anyaghoz" vagy szükségletekhez kötött folyamata ma is szemünk láttára megy végbe, tehát a matematikának nemcsak legalapvetőbb, „legősibb" fogalmaira érvényes megállapítás. Ennek bizonyítékául csupán egyetlen példát kívánunk megemlíteni. Az elektrotechnikában mintegy 40—50 évvel ezelőtt fontossá vált olyan folyamatok tanulmányozása, melyek egy pillanatnyi, igen nagy feszültséglökés hatására jönnek létre. Az akkori matematikai apparátus nem bizonyult alkalmasnak e folyamatok kvantitatív leírására. Ezért bevezették az ún. „delta-függvényt", mely a pillanatnyi igen nagy impulzusok leírásának testére készült, és matematikailag — tehát logikailag — teljesen megalapozatlan volt, amennyiben definíciója logikai ellentmondást tartalmazott. Kiderült, hogy a Dirac-féle delta a kvantummechanika kiépítésében is nagy szerepet játszik. Évtizedeken keresztül használták — megint, mert használni *kellett* — a delta-függvényt mint heurisztikus segédeszközt, és szinte csak az utóbbi években adták meg szabatos, logikai ellentmondást nem tartalmazó definícióját úgy, hogy az megfeleljen a hosszú elektrotechnikai és fizikai tapasztalatoknak. És ekkor a matematikus eldobta, leválasztotta róla az anyagi hátteret, és e definíciójával „alkotta meg" a delta-függvényt, mely most már minden anyagi vonatkozástól függetlenül, mint puszta forma él tovább.

E példák alapján mondottuk azt, hogy a matematikus „úgy tesz," mintha definícióival megalkotta volna vizsgálatának tárgyát, holott ezek eredetét az emberek tudatától független objektív materiális dolgokban lelhetjük fel.

4. Fentiek után felmerül a következő kérdés: miért „tesz úgy" a matematikus, mintha az anyagi tartalom iránt közömbös lenne? Nem jár-e a matematikus és a matematika helytelen úton, nem süllyed-e bele „az érzetek sorozatának" puszta „rendezésébe"? Annál jogosabb feltenni ezt a kérdést, mert bár, mint láttuk, a modern matematika számos fogalomalkotása mögött is fel lehet lelni az anyagi valóságot és a társadalmi gyakorlatot, mégis, éppen a modern matematika legtöbb fogalomalkotása és elmélete annyira absztrakt, hogy ezt a hátteret fellelni meglehetősen nehéz. Az utóbbi évtizedekben rendkívüli módon kiszélesedett a matematikai kutatás területe, és olyan fogalmak közti relációkat is vizsgál, melyek nagyon távolinak látszanak a szám, a pont, az egyenes, a sík fogalmától, sőt ezekre nem is vezethetők vissza. Ma a matematika alkalmazásának egyik centrális területe például a matematikai logika, mely a többi között a következtetési módokat, az axiómarendszerek logikai struktúráját vizsgálja, tehát már eleve közömbös minden anyagi tartalom iránt. Megállapításaink talán olyan következtetésre inspirálnak, hogy míg az elmúlt századokban a matematika a természettudományokkal volt legközelebbi kapcsolatban (nem alkalmazásai, hanem fogalomalkotásai révén), addig a fejlődés iránya az, hogy a matematika a tudati formákkal foglalkozó tudományokkal kerül, éppen tárgya és módszerei révén közeli rokonságba.

A matematikának az a feladata, és mindig is az volt, hogy — Engels szavai szerint — a „világ térformáit és mennyiségi viszonylatait"[6] vizsgálja és velük foglalkozzék. Tárgya a valóságból absztrakcióval nyert fogalmak, tehát gondolati elemek. Engels, noha nem volt matematikus, zseniálisan fogalmazta meg a matematikának ezt a funkcióját: „De hogy ezeket az alakokat és viszonylatokat a maguk tisztaságában vizsgálhassuk, teljesen el kell választanunk tartalmuktól és ezt mint közömböst félre kell tennünk"[7]; „A fejlődés egy bizonyos fokán azonban, mint a gondolkodás valamennyi területén, a valóságos világból absztrahált törvények elválasztódnak a valóságos világtól, vele mint önálló valamik, mint kívülről jövő törvények állíttatnak szembe, amelyek szerint a világnak igazodnia kell. Így történt a társadalomban és az államban, így és nem másként *alkalmazzák* utólag a világon a *tiszta* matematikát, bárha éppen ebből a világból kölcsönözték ki, s a világ összetételi formáinak csak egy részét képezi — és éppen *csakis emiatt* alkalmazható egyáltalában".[8]

A matematikus vizsgálati tárgya a való világból ered, ebből származik absztrakció révén. De a fejlődés bizonyos pontján az anyagi tartalmat mint közömböset félretolja, és csupán az absztrakt fogalmakat és a relációkat vizsgálja, megfosztva őket konkrét anyagi tartalmuktól és minőségi sajátosságaiktól. Ez a mai matematika feladata is. Az anyagi eredete az oka alkalmazhatóságának, absztrakt, anyagi tartalmától megfosztott voltában rejlik nagy általánossága. A fejlődés során a matematika tehát nem tér el eredeti feladatától, nem „közeledik" a tudat mozgásformáival foglalkozó tudományokhoz, hanem egyenesen feladata, társadalmi funkciója, a térformák és mennyiségi

[6] F. Engels: Anti-Dühring. Idegennyelvű kiadó, Moszkva, 1947., 57. o.
[7] Engels: i. m. 57. o.
[8] F. Engels: i. m. 58. o.

viszonyok közti objektív törvényszerűségeket minél általánosabban vizsgálni és feltárni. Azt már láttuk, hogy a matematika fogalmai, ha néha közvetve is, sajátos módon a valóságot tükrözik. De ugyancsak a valóságot tükrözik a matematika módszerei is. A logikai, deduktív következtetések a dolgok közti tényleges kapcsolatokat tükrözik, olyan kapcsolatokat, melyeket az emberek a történelem során ezerszer és ezerszer kipróbáltak és a tapasztalatban megvizsgáltak.

Ebben áll magyarázata annak a jelenségnek, amelyből kiindultunk, hogy a matematikai módszerek egyre inkább behatolnak a legkülönbözőbb szakterületekre. Azzal, hogy a differenciálhányados fogalma megszabadult az anyagi pont sebességének képzetétől, lehetségessé vált, hogy e fogalmat felhasználhassuk, például, a lokális sűrűség jellemzésére, vagy amikor a művelet fogalma megszabadult a csupán számok közti műveletek fogalmától, vált lehetségessé a következtetési módok formalizálása és matematikai köntösben való kifejezése. Jól tudjuk, hogy a matematikai logika rendkívül absztrakt nyelve, mely a régen a számok közti műveletek leírására készült formalizmusból fejlődött, ma, a többi között, a bonyolult elektromos rendszerek áramköri elméletének egyik leghathatósabb eszközévé vált. Ugyanez a helyzet a véletlen jelenségek mennyiségi viszonyait kifejező valószínűség fogalmával is. Amint ez megszabadult az ún. „klasszikus játékok" képzetétől, és megmaradt a pusztán absztrakt valószínűség fogalma, attól fogva vált e diszciplína a termeléstervezés, a biológia, a kémia stb. hathatós segítőtársává.

Azzal, hogy a matematika eltekint az anyagi háttértől, és a dolgok puszta formáit és a köztük érvényes puszta viszonylatokat vizsgálja, kiemeli és megállapítja a legtávolabbeső dolgok közös tulajdonságát. E közös tulajdonságok felismerését a szemlélet nagyon gátolja, ezeket csakis a dolgok közötti mélyebb és csak a racionális gondolkodás segítségével felismerhető összefüggések hozhatják felszínre. És ez az oka annak, hogy a matematikának el *kell* tekintenie az anyagi háttértől és ezt mint az ő szempontjából közömböset félre kell tennie. Csak ezzel a módszerrel állapíthatjuk meg, hogy megismerésünk *általában* mennyiben támaszkodhat a szemléletre és mennyiben van szüksége a mélyebb összefüggések racionális feltárására.

Távoli dolgok szemléletesen fel nem ismerhető közös tulajdonságai objektív tulajdonságok, melyek felszínrehozása a világ megismerésének fontos része. Hogy e szemléletünkben eltakart objektív tulajdonságokat felszínre hozhassuk, a matematikának el kell tekintenie a fogalmak konkrét anyagi hátterétől, csak ezáltal válik lehetővé, hogy az anyagi háttér általános oldalai kerülhessenek előtérbe. Az *egyes* anyagi folyamatok matematikai leírásából származó fogalomalkotás, majd e fogalmak elszakítása a konkrét anyagi háttértől, adja a fenti objektív *általános* sajátságok felismerésének dialektikus útját.

5. Rámutattunk már a matematika néhány sajátos jellemvonására. Érdemes most azt is megvizsgálni: milyen rokontulajdonságokat mutat a matematika a többi tudománnyal, és miben tér el tőlük. Első pillanatra a rendkívül absztrakt jelleg ötlik szembe, ami olyan fokú, hogy önmagában is a többi tudománytól eltérő karaktert kölcsönöz a matematikának. Persze, az absztrakció nem a matematika privilégiuma. Minden tudomány absztrakciókkal dolgozik; ha a vegyész például kénről beszél, akkor ezen olyan anyagot ért, amelynek minden atomja kénatom. Ilyen a valóságban nincsen, a világon minden, amit kénnek tekintünk, az absztrakt kémiai kén fogalmát jobban vagy

kevésbé jól közelíti meg. A fizikus tömegpontja szintén absztrakció, melyet a testek, bizonyos körülmények között, jobban vagy kevésbé jól megközelítenek. Hasonló a helyzet a társadalomtudományoknál is. De az absztrakció tekintetében a matematika és különösen a modern matematika több ponton eltér a többi tudomány absztrakt fogalmaitól.

Először is a matematika nagymértékben foglalkozik már absztrakt fogalmak absztrakcióival és általánosításaival, szemben a természet- és a társadalomtudományokkal, melyek csaknem mindig ún. primer absztrakciókkal foglalkoznak, tehát olyan fogalmakkal, melyek közvetlen tükröződései anyagi vagy társadalmi folyamatoknak. A magasabbremdű absztrakciók a történelem folyamán fejlődtek ki. A matematikai alapfogalmak — mint az egész szám vagy a pont, egyenes, sík, gömb, kúpszeletek, a háromdimenziós tér stb. — még nem ilyenek, mert a mögöttük levő anyagi valóság még könnyen felismerhető. Ezzel szemben például a háromnál magasabb dimenziós terek vagy, még tovább menve, a Hilbert-, a Banach-terek fogalmai sok-sok fogalom általánosítása révén keletkeztek. Éppen a matematika sokrétű alkalmazásai bizonyítják, hogy ezek a bonyolult, magasabb fokú absztrakciók valóságos, anyagi viszonylatok általános tükröződései. A matematika fejlődésének legutóbbi szakaszában váltak ezek a magasabb rendű absztrakción alapuló elméletek döntő jelentőségűekké. Ezeket tehát nem közvetlenül a valóságból merítettük (megint ellentétben a legtöbb tudománnyal), hanem ezek már kialakult fogalmak és elméletek alapján jöttek létre, az emberi elme alkotó tevékenysége révén. — (Meg kell jegyeznünk, hogy „magasabb rendű absztrakciókkal" a matematikán kívül, más tudományokban is találkozunk, elsősorban az elméleti fizikában. Ezek azonban messze nem annyira absztraktak, mint a matematikának, különösen a legutóbbi időkben felfedezett és ma már nagyon fontos szerepet játszó fogalmai). A már meglevő elméleteket és fogalmakat sokféleképpen lehet általánosítani és tovább absztrahálni, és ezek túlnyomó többsége a matematikán belül érdekes és értékes is. Ezek az általánosítások és absztrakciók a modern matematikában különösen fontosak. A mai matematika az egyik feladatának éppen a valóságos *lehetséges* formáinak meghatározását és kutatását tekinti. Másodszor: a többi tudományokat elsősorban az érdekli, hogy absztrakt fogalmai mennyire felelnek meg a jelenségek tetszőleges, de meghatározott körének. Sőt, a többi tudománynak egyik legfontosabb feladata megállapítani, hogy a már kialakult fogalmi rendszer milyen esetekben alkalmazható a valóságra, továbbá a kialakított elméleteknek mi a valóságra vonatkoztatott érvényességi határa. A Newton-féle törvényekben bizonyos jelenségek absztrakt képe ölt testet, és a fizika fontos feladata volt megvizsgálni, hogy a Newton-féle törvények milyen körülmények között és milyen határok között alkalmazhatók és érvényesek kisebb-nagyobb hibáva-. Ezzel szemben a matematika az általános tulajdonságokat tanulmányozza elvonatkoztatva a konkrét jelenségtől, s ezért magukat az absztraktciós rendl szereket vizsgálja a maguk absztrakt általánosságában, tekintet nélkül arra, hogy ezek milyen határok között alkalmazhatók az egyes konkrét jelenségekre. Jellegzetes tehát a matematikára az, hogy absztrakcióit sajátos módon abszolútnak tekinti.

Minden tudomány próbaköve a gyakorlat, az igazság kritériuma a gyakorlattal való összehasonlítás. A matematikán *belül* ezzel szemben az igaz az, ami az axiómák logikai következménye. Egy matematikai elmélet *matematikán belüli* igazságának próbaköve nem a közvetlen gyakorlat. Az euklidészi, a

Bolyai-Lobacsevszkij-féle és a Riemann-geometriák mindegyike matematikailag *igaz*, függetlenül attól, hogy a valóságos materiális viszonyokat melyik tükrözi. Ez egyik leglényegesebb megkülönböztető jegye a matematikának a többi tudományágtól.

Kétféle igazság persze nincsen; nincsen igazság a szónak materialista értelmezése szerint és egy ettől különböző „matematikai" igazság. Valamely matematikai diszciplína igaz, ha az az objektív valóságot helyesen tükrözi. A matematikán belül azonban „igaznak" nevezünk egy állítást, ha az logikai következménye a kiindulási axiómáknak és definícióknak, függetlenül attól, hogy az az objektív valóságot híven tükrözi-e vagy sem. Voltaképpen erre — a matematikán belül használt „igazság" fogalomra — más szót kellene használni. Hogy ezt mégsem tesszük, annak elsősorban történelmi okai vannak. A szóhasználat, a terminus technicus zavart és félreértést mégsem okoz, ha a matematikán belül maradunk (és ezt kellőképpen ki is hangsúlyozzuk). Nem a matematika feladata ti. megállapítani valamilyen matematikai elméletről, hogy az az objektív anyagi viszonyokat hűen tükrözi-e vagy sem (vagyis eldönteni azt, hogy valamely matematikai elmélet igaz-e vagy sem, a szó eredeti értelme szerint). Hogy az előbbi példánál maradjunk, a matematika megállapította, hogy az objektív, valóságos tér *lehetséges* geometriai struktúrái az euklidészi, a Bolyai-Lobacsevszkij-féle és Riemann-geometriákban nyernek kifejezést. De hogy ezek közül melyik tükrözi a *valóságos* viszonyokat, annak eldöntése már kívül esik a matematika körén. Vannak kétségkívül matematikai elméletek, amelyek nem tükröznek, pontosabban: nem helyesen tükröznek valóságos anyagi viszonyokat, ezért a valóságos, materiális viszonyok szemszögéből a különböző matematikai elméleteknek az *értéke* is különböző. De ennek a kutatása nem a matematika feladata. (Egyébként is: a matematikai elméleteknek a gyakorlathoz való viszonya bonyolult kérdés, melynek tárgyalása nem e cikk keretébe tartozik.)

Hogy a matematika az absztrakciót abszolútnak tekinti, azt jelenti, hogy a valóság formáit és mennyiségi viszonyait tiszta alakjukban, tartalmuktól elválasztva vizsgálja. Tehát a matematika tárgyai, e felfogás szerint, tiszta formák és relációk. Csakhogy tartalomtól független tiszta formák és viszonyok nem léteznek. A matematika állandóan azt teszi, hogy a formát elválasztja a tartalomtól, és ebben látjuk a matematika egyik leglényegesebb dialektikus ellentmondását és a megismerés folyamatában levő általános ellentmondásnak a matematikára történő vetületét.

A tartalom és a forma közötti ellentmondás a matematika fejlődésének leglényegesebb mozgatóereje ma is, és volt a múltban is. A tartalom és a forma közti dialektikus ellentmondás megoldása és újbóli felbukkanása jelenti egyrészt a matematika tartalmának állandó és különösen az utóbbi évtizedekben bekövetkezett nagymérvű kiszélesedését, másrészt fejleszti és előremozdítja a megismerést, azt mindig pontosabbá és megbízhatóbbá teszi.

Ez az alapvető ellentmondás biztosítja azt, hogy a matematika absztrakt vizsgálati tárgya és szigorúan deduktív módszere ellenére is igazi tudomány marad abban az értelemben, hogy az objektív valóságot tükrözi, és pozitív módon, habár néha nagyon is közvetett úton, visszahat a valóságra. Nem süllyed tehát le az intellektuális játékok színvonalára és nem tölti be, mondjuk, a sakkjáték szerepét. A sakkozás maga is bizonyos axiómákon (játékszabályokon) épül, következtetései csakis ezekre támaszkodnak, de hogy nem tudomány, az éppen az előbbi ellentmondás hiányán múlik.

A forma és a tartalom ellentmondása, bár jellemző a matematikára, mégis egyúttal egyik összekötője a többi tudománnyal. A matematika is ti., mint minden tudomány, a természeti vagy a társadalmi valósághoz, az emberi szükségletekhez fordult fogalmi körének bővítése érdekében.

E megállapításunk magában foglalja azt, hogy a matematikában is érvényesül az indukció és a dedukció dialektikus egysége. Az indukció és a dedukció egysége nemcsak a matematika fogalmi körének bővülésében, hanem a matematikán belül is testet ölt; fogalmi és megállapítási köre gazdagodásának egyik rugója. Hogy ez konkréten milyen módon érvényesül, azzal e helyen nem foglalkozunk, mert messze túl vezetne a címben megadott témánál.

6. A matematika helyét illetően most már a következőket szűrhetjük le az előzőek alapján. *A matematika nem természettudomány*, mert bár tárgya teljes mértékben reális anyag, azt minden konkrét tartalmától és minőségi sajátosságától elvonatkoztatva vizsgálja. Igaz ugyan, hogy a matematika számos fogalma a természettudományos vizsgálat tárgyainak absztrakciójaként jött létre (gondoljunk az elemi geometria, a differenciálhányados, az integrál, a differenciálegyenlet alapfogalmaira stb), de fogalmait jórészt nem a természetből merítette. A negatív szám például az adósság kifejezésére jött létre, a mértani sorra a kamatszámítás és az ún. „politikai számtan" kapcsán bukkantak s i. t.

A marxizmus klasszikusai sem tekintették soha a matematikát természettudománynak. Engels például a következőt írja: "Csak a matematikában — ebben az elvont tudományban, *mely gondolati dolgokkal foglalkozik* (kiemelés tőlem, F. I.), bármennyire a valóság tükröződései ezek — van helyén az elvont azonosság és ennek a különbözőségekkel való ellentéte, de itt is folytonosan feloldódik."[9] Engels megállapítása szerint is a matematika: bizonyos gondolati dolgokkal foglalkozó tudomány, tehát *nem* természettudomány. Az Anti-Dühring 1885-ös kiadásához írt előszavában pedig a következőket írja: „A természet dialektikus és egyben materialista felfogásához azonban ismerni kell a matematikát *és* a természettudományt. Marx alapos matematikus volt, *de* a természettudományokat csak részletekben . . . tudtuk figyelemmel kísérni . . . Londonban . . . egy teljes matematikai *és* természettudományi . . . „vedlésen" estem át . . ."[10] (kiemelések tőlem, F. I.). Következetesen megkülönbözteti tehát a matematikát a természettudományoktól, ez a megkülönböztetés következetesen végigvonul az egész Anti-Dühringen.

De ugyanakkor természetesen a matematika nem sorolható a társadalomtudományi ágak közé sem. Igaz ugyan, hogy a matematika számos fogalma a társadalmi jelenségekből sarjadt, de sem tárgya, sem pedig módszere nem azonos a társadalomtudományok céljával és módszerével. Hogy a matematika nem sorolható a társadalmi tudományok közé, kiviláglik abból is, hogy megállapításai a társadalmi viszonyoktól függetlenek (bár kialakulásukra sokszor nagyon is hatottak a társadalmi tényezők). A halmazelmélet, de különösen a matematikai logika, a matematikát közeli kapcsolatba hozza a filozófiai tudományokkal. E közeli kapcsolat azonban nem indokolhatja a matematikának a filozófiai tudományok közé való sorolását, annál kevésbé, mert itt matematikai módszerek alkalmazásairól van szó a logikában.

[9] Engels: A természet dialektikája. Szikra, 1952., 224. o.
[10] Engels: Anti-Dühring. Id. kiad., 15. o.

Így tehát a matematika a tudományok külön kategóriáját képezi, mely fogalmait mind a társadalmi jelenségekből, mind pedig a természetből absztrakcióval alkotja meg. Alkalmazási köre pedig a legkülönbözőbb tudományokra terjed ki, és azoknak a tudományágaknak a száma, melyekben matematikai módszereket hasznosítanak, napról-napra növekszik.

Ami napjainkban a szemünk láttára végbemenő fejlődést illeti, megfigyelhetjük, hogy a matematika elsősorban mint *módszer* kerül előtérbe, ellentétben a múlttal, amikor a dolognak az az oldala, amit *elméletnek* nevezünk, játszotta a nagyobb szerepet. Különösen az új alkalmazási területeken — mint a közgazdaságtan, a nyelvészet, a régészet, az orvostudomány és a biológia területén — szembetűnő ez a jelenség. A kibernetika megjelenése, módszertanának fejlődése még inkább aláhúzza állításunkat.

Ma a tudományokat tárgyuk szerint három nagy csoportra osztják: természettudományokra, filozófiai és társadalmi tudományokra. A dialektikus materializmus nem választja szét mereven a természetet és a társadalmat, ezért a tudományoknak merev csoportokra osztása (mint ahogyan azt Rickert és Windelband teszik) indokolatlan és idealista felfogás. Minden tudomány ugyanannak az objektív valóságnak más és más oldalát vizsgálja, ezért a tudományok különbözőségei nem abszolút, hanem viszonylagos jellegűek. Közismert, hogy Marx az Ökonomische-philosophische Manuskripte[11]-ben a tudomány egységét hangsúlyozza — egy tudomány lesz, mely mind az emberről, mind a természetről szóló ismereteket magában foglalja. Ugyane gondolatot olvashatjuk a Deutsche Ideologieban[12] is. A matematika, mint láttuk, a természettudományok és a társadalomtudományok *között* foglal helyet, és alkalmazási köre — akár mint módszer, akár mint elmélet — mindkét tudománycsoportra kiterjed, és mind nagyobb szerepet kap. Úgy látjuk, hogy e jelenség is része annak az általános processzusnak, melyet Marx több mint száz évvel ezelőtt olyan zseniálisan megjövendölt.

МЕСТО МАТЕМАТИКИ В СИСТЕМЕ НАУК

Иштван Фенё

В введении статьи автор анализирует характерные черты развития математики в наши дни и ее отношение к остальным наукам. Он подчеркивает теоретическое и практическое (организация наук) значение выяснения этого вопроса.

Автор дает анализ свойственного характера математической абстракции и причины ее развития. Он устанавливает, что математические абстракции, как и абстракции всякой науки, обобщают опыт многих поколений, однако математика оперирует также с «абстракциями высшего порядка», т. е. такими понятиями, которые являются уже дальнейшие абстракциями абстрактных понятий. Из этого следует, что в математике понятие дефиниции отличается от дефиниций, принимаемых в других науках, и его роль более центральна.

В статье устанавливается, что происхождение математических абстракций обнаруживается в действительном мире, а не только в природе, но и в обществе. Согласно этому, математика тесно связана с естественными науками, но она имеет и узкие сношения с общественными науками, и даже, вследствие ее новейшего развития (математическая логика) с философскими науками не только насчет исторического развития, а также в отношении выбора предмета.

[11] Marx—Engels Gesamtausgabe (MEGA) III. köt. 123. o.
[12] MEGA V. köt. 567. o.

Автор приходит к выводу, что математика занимает особое место в системе наук: она не принадлежит к числу естественных наук, но нельзя ее относить и к философским и общественным наукам. Современная математика стремится вырабатывать общие методы умозаключения, которые могут применяться как в естественных так и в философских и общественных науках.

THE PLACE OF MATHEMATICS IN THE SYSTEM OF SCIENCES

István Fenyő

By way of introduction, the article analyses the characteristic features of the development of mathematics in our age, and its relations to the other branches of science. It is pointed out that the solution of this question is of great importance both from the point of view of theory and that of practice (in the organization of science).

The article examines the specific character of mathematical abstraction and the causes of its development. It is stated that mathematical abstractions, like the abstractions of any other kind of science, generalize the experience of many generations, but mathematics deals also with "abstractions of a superior level", i.e. with concepts that are further abstractions of abstract ideas. That is why the concept of definition has another meaning within the scope of mathematics, and a role much more concentrated, too, than in other branches of science.

The author of the article states that the origin of mathematical abstractions can be found in reality, not only in nature, but also in society. Thus, mathematics is closely connected with natural sciences, but it is also in close connection with social sciences, and, through its recent development (mathematical logic), even with philosophical sciences, not only from the point of view of historical development, but also concerning the choice of its subjects.

In conclusion, the article states that mathematics has a specific place in the system of sciences: it does not belong either to natural or to philosophical and social sciences. Contemporary mathematics endeavours to elaborate meethods of general induction employed both in natural sciences and in social and philosophical sciences.