Lukács Judit

Matematikaérettségi a gimnáziumok nappali tagozatán, Magyarországon

A matematika mint érettségi tantárgy

Hazánkban a matematikaérettségi minden gimnáziumi érettségiző számára kötelező írásbeli vizsga, amelyet vagy azonos időben, központi feladatok alapján a saját iskolájában tesz a tanuló (más feladatsor alapján a gimnazisták és más feladatsor alapján a szakközépiskolások), vagy pedig – ha olyan felsőoktatási intézménybe jelentkezik, amelyben kötelező a matematikafelvételi vizsga – „közös" írásbelit tesz, szintén központilag kidolgozott felvételi/érettségi feladatsor alapján.[1] Ez utóbbi *feladatsor nem különbözik minden felsőoktatási intézményben, de nem is egységes.* Jelen tanulmány az *iskolai gimnáziumi érettségivel* foglalkozik.

Az iskolai érettségi vizsga hét feladatát minden évben az Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából[2] című kötetből választják ki. A feladatsor tulajdonképpen hat „valódi" feladatból áll. A hetedik kérdés mindig egy tanult matematikai tétel bizonyítását kéri számon. (Ezeket a bizonyítandó tételeket is tartalmazza a feladatgyűjtemény 1. fejezete.)

Tanulmányomban *két* kérdésre keresem a választ. 1. Egy-egy tanévben, illetve egy négyéves periódust tekintve *a kitűzött gimnáziumi érettségi feladatok mennyire fedik le a gimnáziumi matematika-tanterv tartalmát.* 2. *A tanulók megoldásai alapján milyen következtetéseket vonhatunk le az 1993-as feladatsorról.*[3]

Ez utóbbi kérdés megválaszolásához a matematikadolgozatok kiválasztásánál nem vettük figyelembe, hogy a tanuló iskolai érettségit tesz-e vagy „közös" érettségi/felvételi vizsgát. Így a 240 dolgozat között 37 „közös" érettségi/felvételi volt. Feldolgozásra azonban csak a 203 iskolai érettségi dolgozat megoldásai kerültek. Fontos aláhúzni, hogy mintámba így általában a *matematikából kevésbé jó tanulók eredményei* kerültek, hiszen ők nem vállalkoztak arra, hogy matematikából „közös" érettségit tegyenek. Ugyanakkor tudjuk, hogy a vizsgált feladatsor az ő számukra készült, összeállításuknál feltehetőleg szintén figyelembe vették ezt a szempontot. Az elemzett minta tehát nem jellemző a gimnáziumi érettségizők teljes populációjára.

[1] Egyes felsőoktatási intézményekben különböző, egyénileg kidolgozott számolási szisztéma alapján mentesség jár a felvételi alól. A mentességet kapott tanulók is iskolai érettségi vizsgát tesznek.

[2] Tankönyvkiadó, Bp.

[3] A második kérdés megválaszolásához használtam *Mátrai Zsuzsa* a „Középiskolai tantárgyi feladatbankok" című cikkének bevezetőjében ismertetett minta alapján kiválasztott matematikadolgozatok eredményeit.

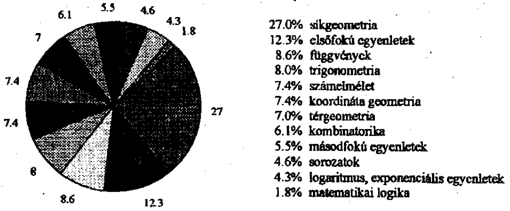
A matematika-tanterv és az érettségi vizsgafeladatok tartalmának összevetése

1. A tantervi tartalom a gimnáziumi matematikaoktatásban

Ahhoz, hogy az érettségin számon kért ismereteket összevethessük a tantervi tartalmakkal, először a tantervet[4] kell áttekintenünk abból a szempontból, hogy a négy év alatt tanított tananyag tematikus egységei milyen arányt képviselnek a teljes tantervben. Úgy gondolom, hogy az egyes tartalmi elemek feldolgozására ajánlott óraszámok segítségével megközelítőleg képet kaphatunk a tantervi arányokról.

100%-nak tekintettem a gimnáziumi matematika tantárgy négyéves összóraszámát (elhagyva belőle az ismétlésre szánt órákat), és ehhez viszonyítottam az egyes tematikus egységekre ajánlott óraszámokat. S bár a tantervben szereplő számok csak orientációul szolgálnak a tanároknak, a bennünket érdeklő arányok megközelítésére azért alkalmasak. Így az egyes anyagrészek között a következő tantervi megoszlást kaptam *(1. ábra).*

1. ábra – Az egyes témakörökre ajánlott óraszámok aránya a gimnáziumi matematika-tantervben (a négyéves összóraszám százalékában)



2. Az 1990–93. évi érettségi feladatsorok tartalmi elemei

A tantervi témák arányának ismeretében szembesítettem azokat az érettségi feladatsorok tematikus megoszlásával. Az *1. táblázat*ot az 1990., 1991., 1992. és 1993. évi érettségi feladatsorai nyomán állítottam össze, a tantervi tematikai egységeket véve alapul.

A táblázat vízszintes osztása a feladatok *tartalmi elemei* alapján történt. *Függőlegesen* a feladatmegoldáshoz szükséges gondolkodási műveletek szerint két csoportbontást alkalmaztam: *reproduktív* és *produktív* műveleteket igénylő feladatmegoldás.

[4] A gimnáziumi nevelés és oktatás terve. Matematika (az 1979-ben bevezetett tanterv korrekciója). Művelődési Minisztérium, 1987.

1. táblázat — Az 1990–93. évi gimnáziumi matematika-érettségi feladatainak tartalmi eloszlása

Tartalmi elemek	Gondolkodási műveletek reproduktív	produktív
Síkgeometria: szerkesztések, bizonyítások, számítások	91/2. 93/7.	90/2. 91/4. 92/4. 93/3.
Elsőfokú egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek	90/1.	91/1. 93/1.
Függvények	—	—
Trigonometria	91/3.	90/5. 93/5.
Számelmélet, aritmetika	—	90/4.
Vektorok, koordinátageometria	91/7. 92/2.	90/3. 93/2.
Térgeometria: felszín- és térfogatszámítások	—	—
Kombinatorika	—	92/5.
Másodfokú egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek, irracionális egyenletek	92/1.	—
Sorozatok	90/7. 92/7.	91/5. 93/4.
Hatvány, logaritmus, exponenciális és logaritmusegyenletek	90/6. 91/6. 92/3. 93/6. 92/6.	—
Matematikai logika	—	—

3. *A tantervi tartalom és az érettségi feladatok összhangja*

A tantervi témák arányát bemutató *1. ábrá*ból jól látható, hogy a tanulók a négy év során a legtöbb időt (27%) a geometriai feladatok elsajátítására fordítják. Ez a terület az érettségin is igen hangsúlyos, minden évben szerepel, azonban természetesen nem teheti ki a feladatok negyedrészét. A tantervi időkeret második legnagyobb szeletét (12,3%-át) az „Elsőfokú egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek" adják, amely ismerethalmaz a vizsgált időszak érettségi feladatsoraiban primer módon nem túl gyakran fordul elő, ugyanakkor további négy feladat megoldásában is előkerül mint tudáselem. A „Függvények" témakör a tantervben a harmadik legnagyobb óraszámarányban (8,6%) fordul elő a négy év során, az érettségi feladatsorokban azonban nincs olyan feladat, amely elsődleges ismeretként kérné számon ezt a tantervi tartalmat. Függvénytani ismeretekre (értelmezési tartomány megállapítása stb.) több feladat megoldása közben szükség van, mégis hiányolom a függvényfeladatok önálló megjelenését az érettségin. Tantervi arányának megfelelően kerül a feladatsorokba a „Trigonometria" témakör, főképpen, ha figyelembe vesszük, hogy a táblázatban szereplőkön kívül további három feladat megoldásakor is használni kell trigonometriai ismereteket. Nem mondható el ugyanez a „Számelmélet, aritmetika" című anyagrészről, amely nemigen fordul elő az érettségin, bár tantervi aránya 7,4%. A „Vektorok, koordinátageometria" fejezet a tantervi aránynál inkább felülreprezentált az érettségin, de még inkább ez mondható el a minden évben szereplő „Sorozatok", illetve a „Hatvány, logaritmus ..." témakörökről, amelyek részesülése a tantervben mindössze 4,6% és 4,3%. A „Térgeometria" és a „Matematikai logika" témakörökből a vizsgált időszakban nem volt feladat az érettségin, s a „Kombinatorika" is csupán egyszer került elő.

Elsődleges tartalmi elemként leggyakrabban tehát a „Geometriai szerkesztések...", a „Hatvány, logaritmus...", a „Koordinátageometria..." és a „Sorozatok" fordulnak elő, s nagyon gyakran másodlagos (a feladat megoldása közben szükséges ismeret) ismeretelem az első-, illetve a másodfokú egyenletek az érettségi feladatsorok megoldása során.

Elemzésemben kizárólag azt vizsgáltam, hogy a tantervi arányok miként érvényesülnek az érettségi feladatokban. Más kérdés, és jelenlegi tanulmányomnak nem tárgya, hogy a tantervben meghatározott ismerethalmaz és követelményrendszer valóban megfelel-e azoknak a tanulóknak, akiket ebben a vizsgálatban mértünk (hisz ne feledjük, ezeket a feladatsorokat azok oldják meg, akik nem akarnak továbbtanulni, illetve, akik olyan felsőoktatási intézménybe jelentkeznek, ahol nem kell felvételizniük matematikából). Vajon feltétlenül *ezekre az ismeretekre van-e szüksége egy nem matematika irányultságú tanulócsoportnak?*

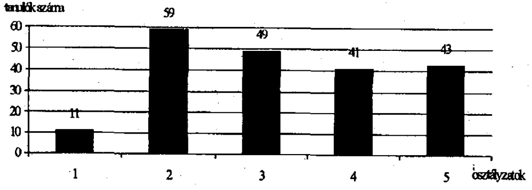
Az 1993-as gimnáziumi matematikaérettségi feladatok a megoldások tükrében

Feladatokat, érettségi feladatokat is sokféle szempont szerint lehet értékelni, és a kiválasztott szempontoktól is függ, hogy egy-egy feladatot milyennek minősítünk. Értékelésemben két fő gondolatot emeltem ki: 1. Az egyes feladatok megoldása során érvényesül-e a könnyebb részletek felől való haladás a nehezebbek felé, vagyis alkalmas-e a feladat arra, hogy valamilyen képet adjon azoknak a tanulóknak a tudásáról is az adott ismeretkörben, akik a nehezebb feladatelemek megoldására képtelenek. 2. Differenciálnak-e az egyes feladatok a különböző képességű tanulók között, s ha igen, milyen mértékben. Értékelő megjegyzéseim ezekre a kritériumokra vonatkoznak, s ebből következik, hogy csak ezek mentén érvényesek azok a megállapítások, hogy egy-egy feladat mennyire felel meg a jó érettségi feladat kritériumainak. Más értékválasztás esetén nyilvánvalóan más eredményekre juthatunk.

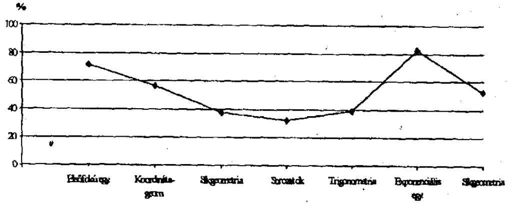
Ha az *1. táblázat*ot és a *melléklet*et megvizsgáljuk, jól látható, hogy a feladatok 1993-ban is az előző tanévekben is szerepelt témakörökből kerültek ki (elsőfokú egyenlet, exponenciális egyenlet, síkgeometria, koordinátageometria, trigonometria és sorozatok). A feladatokat abból a szempontból vizsgáltam, hogy miként lehetett azokat hasznosítani az érettségi során, mennyire voltak alkalmasak a tanulók tudásának mérésére.

Ha a tanulók összteljesítményét vizsgáljuk, megállapítható, hogy az érettségi feladatsor egésze jól széthúzza a mezőnyt, vagyis jól differenciál a tanulók között. Elkeserítő, hogy igen magas az elégséges osztályzatot elért tanulók aránya (29%), s ha a jegyek mögötti pontszámot nézzük, akkor 113 tanuló (55,7%) teljesítménye nem haladta meg az elérhető pontszám 50%-át. Ezen tanulók tudása a számon kért ismeretkörben meglehetősen gyenge.

2. ábra – A tanulók matematikaérettségi osztályzatai (n = 203)



3. ábra – A tanulók eredményei az egyes feladatokban (n=203)



A feladatok részletes értékeléséhez az útmutató pontozási utasítását elfogadtam. A javító tanároknak az egyes feladatrészletekre adott részpontszámait azonban felülbíráltam[5] az egységes megítélés érdekében. Így az egyes 1993. évi érettségi feladatokra rendre 8, 12, 12, 14, 12, 8, 14 pont járt a teljes megoldásért, összesen tehát 80 pont. A továbbiakban az általam pontozott megoldások szerinti pontértékek szerepelnek az elemzésben.

Mielőtt a feladatok egyenkénti elemzésére rátérnék, érdemes megnézni, hogyan oldották meg az egyes feladatokat (l. melléklet) a tanulók a vizsgált mintában *(3. ábra)*.

Ha öt, közel egyenlő (a tanulók kb. 20–20%-át magába foglaló) csoportra osztom a tanulókat az elért pontszámaik alapján, akkor a *2. táblázat*ban látható csoportok keletkeznek:

2. táblázat – A tanulók száma az egyes összteljesítmény-kategóriákban (n = 203)

Elért összpontszám	0–24	25–32	33–43	44–59	60–80
Tanulók száma	40	43	41	41	38

A következőkben az egyes feladatok megoldásában elért eredményeket ezekben a kategóriákban elemzem. Az *1. tanulócsoport* tehát minden esetben azt a 40 tanulót jelenti, akiknek összeredménye 0 és 24 pont közé esik, s akik az összlétszám leggyengébb 20%-át jelentik. A *2. tanulócsoport*ba az a 43 tanuló került, akiknek összpontszáma 25 és 32 pont között van, tehát ők a második leggyengébben teljesítők 20%-a. A *3. csoport*ba a 33 és 43 pont között teljesítő 41 tanuló tartozik, akik a közepesen teljesítők 20%-át adják. A *4. csoport*ba a 44 és 59 ponthatárok között teljesítő tanulók kerültek, ők a második legjobb csoport. S

[5] Bár a tanárok számára készült megoldási útmutató igyekszik korrekt pontozási utasítást adni, ez mégsem vezet egységes pontozási gyakorlatra. Néhány esetben a tanárok egyszerűen eltekintenek bizonyos hiányosságoktól, és teljes pontszámot adnak akkor is, ha apróbb részletek hiányoznak. Máshol nem egységes a pontlevonás egy 3 vagy 4 pontos részeredmény esetén, ha a részlet nem teljes. Minél nagyobb a bontatlan részpontszám, annál nagyobbak a tanárok által adott pontszámok közötti eltérések. Ennek egységes megoldására nem ad eligazítást az útmutató. A legnagyobb az ilyen jellegű bizonytalanság a 7. *feladat* esetén, amely rendkívül általános megfogalmazásban az adható 14 pontot csak egyetlen megjegyzéssel osztja kétfelé. Az összes további finomítás a tanárra marad. Komoly problémát jelent, ha egy tanuló az útmutatótól eltérően old meg egy feladatot, de azt nem fejezi be vagy valahol elrontja. Mivel ilyenkor az elkészült részletek gyakran nem azonosíthatók be az útmutató által részpontszámokra bontott megoldásmenetbe, így ezekben az esetekben a tanárok elég nagy eltérésekkel osztják a pontokat.

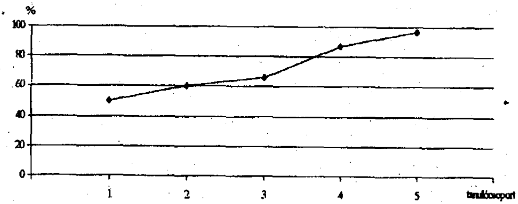
végül az *5. csoport* az a 38 tanuló, akik a legjobb eredményt érték el, vagyis a legjobban teljesítő 20% tartozik közéjük, és pontszámuk 60 és 80 között volt.

A *4–17. ábrákon* található grafikonok a feladatok részletes elemzéséből adódnak. Az egyes feladatokat három mutatóval jellemeztük. Minden feladathoz tartozó első grafikon görbéje azt mutatja meg, hogy az adott kategóriába eső tanulók a *maximálisan elérhető pontszám hány százalékát érték el.* A feladathoz tartozó 2. grafikon 1. görbéje azt jelzi, hogy az egyes kategóriákba került *tanulók hány százaléka érte el az adott feladatra kapható maximális pontszámot,* s az ugyanebben a koordináta-rendszerben ábrázolt 2. görbe pedig azt fejezi ki, hogy az adott kategóriába került *tanulók hány százaléka ért el 0 pontot.* A tanulócsoportok minden esetben a korábban bemutatott teljesítménykategóriák szerint jelentkeznek a vízszintes tengelyeken *(4–17. ábrák).*

Az ábrákat vizsgálva jól látható, hogy nagy eltéréseket mutatnak az egyes feladatokhoz tartozó görbék.

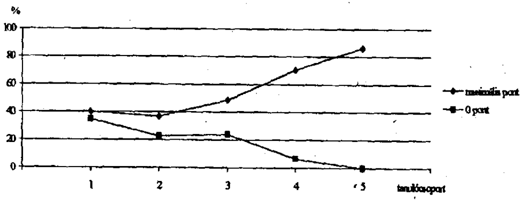
Az *első feladatot*, amely egy egyszerű elsőfokú egyenlet (bonyolultabb kiindulás esetén egyenletrendszer) megoldását kérte számon, viszonylag jól oldották meg a tanulók, a leggyengébb csoportban is elérték a kapható pontszám 50%-át, és ez az eredmény egyenletesen nő a legmagasabb teljesítményű csoport 97%-os eredményéig *(4. ábra).*

4. ábra — 1. feladat. Az egyes tanulócsoportok százalékos teljesítménye az elérhető maximális pontszámhoz viszonyítva



Ha azonban összevetjük ezt az eredményt a maximális, illetve a 0 pontot elért tanulók százalékával *(5. ábra),* kiderül, hogy a leggyengébb csoport 40%-a maximális pontot ért el a feladatban, míg ugyanennek a csoportnak a 35%-a 0 pontot kapott. Nem sokkal térnek el ezektől a számoktól a 2. leggyengébb csoport eredményei sem. Mi következik ebből? Ez a feladat csak másodsorban méri az elsőfokú egyenlet megoldási képességét, előtte egy jóval nehezebb műveleti fázissal kell megbirkózniuk a tanulóknak: a szöveget át kell tenniük matematikai nyelvezetre. Természetesen ez a matematikai képesség legalább olyan fontos, mint az egyenlet megoldásának rutinja, ebben a megfogalmazásban azonban lehetetlenné válik, hogy azoknak a tanulóknak az egyenletmegoldási képességét mérjük a feladattal, akik az első akadályt nem tudják venni. Jól látható a görbékből, hogy a feladat szinte minden tanulócsoportban „kétesélyes" volt. Vagy nem tudta megoldani a tanuló és 0 pontot kapott, vagy meg tudta oldani és megkapta a maximális

5. ábra — 1. feladat. Az egyes tanulócsoportokban elért maximális és 0 pontszámú tanulók százaléka



8 pontot. (A 203 érettségiző 73%-a kapott 0 vagy 8 pontot.) Természetesen ez a megállapítás elsősorban a többi feladathoz viszonyítva értékelhető, amelyek esetében sokkal könnyebb volt részpontszámokat összegyűjteni, illetve sokkal nehezebb volt hibátlan, teljes pontszámot érő feladatmegoldást adni.

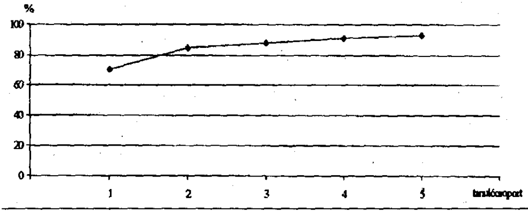
A feladat jól és megközelítőleg egyenletesen differenciál az egyes teljesítménycsoportokba tartozó tanulók között.

Érdemes ezután a *6. feladat*ot vizsgálni, amely szintén egyenletmegoldást igényelt *(6., 7. ábra).*

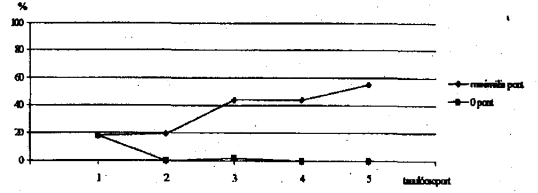
Jól látható a *6. ábrá*ról, hogy ennek a feladatnak a megoldási szintje kiemelkedően a legjobb, a leggyengébb tanulócsoport is 70%-ot ér el, és az összes többi csoport eredménye 80% felett van.

Az exponenciális egyenletekhez tartozó alapismeretekkel tehát a tanulók döntő többsége tisztában van. A jó eredményekhez képest a maximumot elért tanulók aránya azonban minden csoportban alacsony, lényegesen alacsonyabb, mint az előző feladat esetében. Ennek szinte kizárólagos oka, hogy az exponenciális függvény szigorú monotonítású növekedését, mint az alapok elhagyásának feltételét, igen sokan kifelejtik a megoldás menetéből. Tehát ebben a témakörben

6. ábra — 6. feladat. Az egyes tanulócsoportok százalékos teljesítménye az elérhető maximális pontszámhoz viszonyítva



7. ábra — 6. feladat. Az egyes tanulócsoportokban elért maximális és 0 pontszámú tanulók százaléka



az alapfogalmakra való közvetlen rákérdezés esetén igen jó eredmény születik. 0 pontot gyakorlatilag csak a leggyengébb csoportból érnek el néhányan. Ugyanakkor jól látható, hogy a maximális pontszám elérése még a legjobb csoportban is csak 55%, vagyis a feladat pontos kezelése még itt is csak alig több mint a tanulók felének sikerült.

A feladat igazán csak a nagyon gyenge és a többi csoport között képes differenciálni, a további négy csoport közötti különbség csupán néhány százalék.

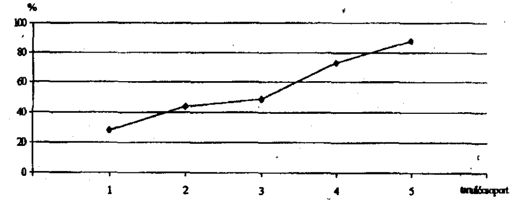
Meg kell jegyezni, hogy a *4.* (sorozatos) *feladat* szintén az egyenletmegoldásra (másodfokú egyenletrendszerre) is vezet, továbbá bizonyos megoldási módszer választása esetén a *2.* (koordinátageometria) *feladat* is. Ez utóbbit azonban semmiképpen nem lehet ebből a szempontból értékelni, hiszen az egyszerűbb (az útmutató által is preferált) megoldáshoz nincs szükség egyenletrendszer megoldására. A *4. feladat*nál azonban (amelynek elemzésére később visszatérünk) jól látható, hogy a bonyolultabb, nagyobb koncentrációt igénylő, hosszú és munkaigényes, ugyanakkor az egyenletrendszer semmi különös ötletet vagy trükköt nem igénylő megoldása csak igen keveseknek sikerül. Még a legjobbaknál is 50% alatt van a teljes megoldást elérők száma. A részpontszámokat elérők döntő többsége a feladat sorozatokra vonatkozó tudnivalóival megbirkózik, de vagy el sem kezdi, vagy menet közben abbahagyja, vagy elrontja az egyenletrendszer megoldását. Aki a *2. feladat*ban az egyenletrendszer megoldására vezető (bonyolultabb) módszert választja, nagyon gyakran hasonló sorsra jut.

Megállapítható tehát, hogy a vizsgált mintában a tanulók döntő többsége tisztában van az egyenletmegoldás módszereivel, nehezebb, nagyobb koncentrációt igénylő esetekben azonban nem képesek elvégezni az ismert lépéseket. A megfelelő rutinnal tehát már kevesen rendelkeznek.

A *2. feladat* koordinátageometriai anyaga egyszerre állította nehezebb és könnyebb feladat elé a tanulókat *(8., 9. ábra)*. Hogy miért, arra feleletet kapunk a részletes elemzés során.

Ha a *8. ábrát* összevetjük a negyedikkel, illetve a hatodikkal (a már elemzett *1.* és *6. feladat* első jellemzői szerinti ábrázolásával), látható, hogy a *2. feladat* megoldása során minden tanulócsoport jóval alacsonyabb százalékos eredményt ért el, mint az *1.* vagy a *6. feladat* esetén. Ha azonban az *9. ábrát* vetjük össze az ötödikkel és a hetedikkel (szintén a vizsgált *1.* és *6. feladat* jellemzőit mutatják, de

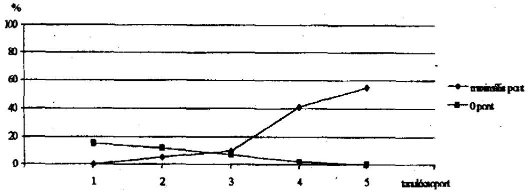
8. ábra — 2. feladat. Az egyes tanulócsoportok százalékos teljesítménye az elérhető maximális pontszámhoz viszonyítva



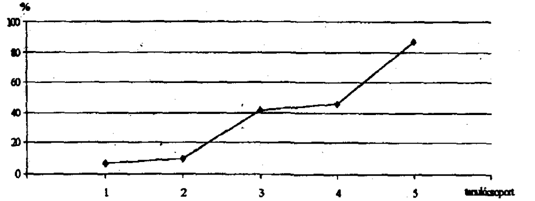
már a második, illetve a harmadik paraméter szerint), már nem ilyen egyértelmű a helyzet. 0 pontot a *6.* (legkönnyebb) *feladat* megoldásához hasonlóan a *2. feladat* megoldására is csak igen kevés tanuló kapott, jóval kevesebben, mint az *1. feladat* esetén. Ugyanakkor a maximális pontszámot elért tanulók százaléka szintén alacsonyabb minden kategóriában, mint a viszonyítási alapul szolgáló *1.*, illetve *6. feladat*ban.

Vajon miért viselkedik ez a feladat ilyen érdekes módon? A teljes megoldáshoz sok részletismeretet kellett egymás után használni, s miközben ezek a részletek egyenként igen könnyűek, és láthatólag szinte mindenkinek jól ismertek voltak, következetes végiggondolásuk, szintézisük csak a legjobb tanulóknak sikerült. Így több-kevesebb részpontszámot összegyűjteni könnyű volt, teljes, pontos megoldást adni azonban nehéz. Még valami csökkentette gyakran a legjobb matematikusok megoldásainak pontszámait is. Az „elegánsabb" megoldásmenetben gyakorlatilag végig, a bonyolultabbnál is egyes részletek esetén olyan egyszerű volt a részeredmények kiszámolása, hogy sokan fölöslegesnek ítélték a megoldás menetének még csak a jelzését is. Nem mindenkiben alakult ki (alakították ki) a lépések indoklásának kényszere. (Van néhány ellenpélda ennél a feladatnál is, a felesleges indoklás,

9. ábra — 2. feladat. Az egyes tanulócsoportokban elért maximális és 0 pontszámú tanulók százaléka



10. ábra – 3. feladat. Az egyes tanulócsoportok százalékos teljesítménye az elérhető maximális pontszámhoz viszonyítva



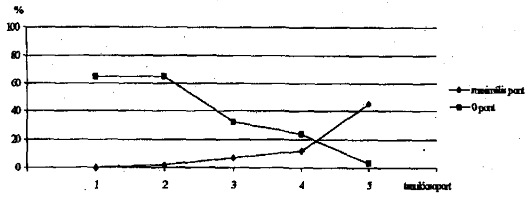
az „agyonmagyarázás" kényszere.) A koordinátageometriai alapismeretekkel tehát a tanulók igen nagy százaléka tisztában van, a részismeretek szintézise azonban már csak a legjobbaknak sikerült kifogástalanul.

Teljesítménymérésre, képességmérésre ez a feladat látszik a legjobbnak a hét közül. Alkalmat ad a kevésbé jóknak részismereteik hasznosítására, de megfelelő módon differenciál is a különböző képességű és tudású tanulók között.

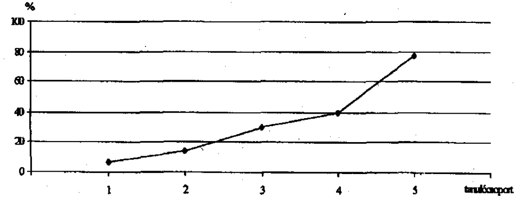
A *3. feladat* síkgeometriai problémájának megoldási eredményeit a *10., 11. ábrák* görbéi mutatják.

Ennek a feladatnak a kiválasztása kettős célt szolgált. Az egyik: egyszerű síkgeometriai ismeretek számon kérése; a másik: a feladat lényeges elemeinek kiemelése útján a feladat megfelelő felvázolása, a helyes kiindulás megtalálása. Nyilvánvalóan ez utóbbi sokkal nehezebb volt, nélküle viszont az egyszerűbb lépések végrehajtása reménytelen. Így mindazokról, akiknek ez a lényegkiemelő képességük nem alakult ki, vagy éppen ennél a feladatnál nem működött, nem tudhattuk meg, hogy az elvárt geometriai ismeretek birtokában vannak-e. A *11. ábrá*ból jól látható, hogy a két leggyöngébb csoportban 65%-os azoknak a tanulóknak az aránya, akik erre a feladatra 0 pontot értek el, s bár a görbe utána

11. ábra – 3. feladat. Az egyes tanulócsoportokban elért maximális és 0 pontszámú tanulók százaléka



12. ábra – 4. feladat. Az egyes tanulócsoportok százalékos teljesítménye az elérhető maximális pontszámhoz viszonyítva



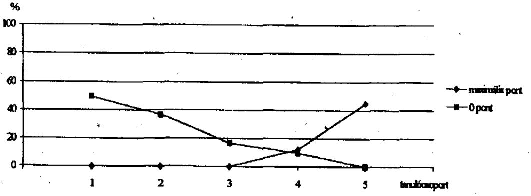
meredeken csökken, de még a második legjobb csoportban is 24% a teljesen eredménytelenül próbálkozó tanulók aránya. Az egész minta 38%-a kap erre a feladatra 0 pontot. Kár, hogy róluk nem derül ki, mit tudnak valójában ebből a témakörből. Akiknek sikerül jól elindulniuk (gyakorlatilag két módszerrel jutnak helyes megoldásra), azok többsége a teljes feladat elvégzésére képes volt. Mégsém kaphatott közülük mindenki teljes pontszámot, mert ebben a feladatban is sokan úgy vélték, hogy a könnyen számolhatót, a számukra nyilvánvaló összefüggéseket fölösleges indokolniuk.

A 3. feladat egyébként igen erősen differenciál, de elsősorban a 2. és a 3., valamint a 4. és az 5. csoportok között. A két leggyengébb, illetve a középső két csoport eredményei között csak néhány százaléknyi a különbség.

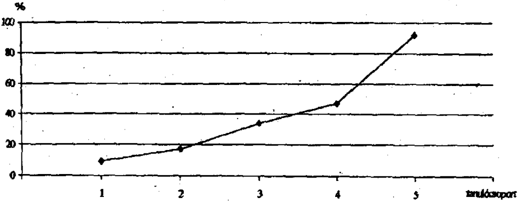
A *4. feladat*ot már érintettem az egyenletmegoldások értékelésekor. A tanárok közül értékelő megjegyzéseikben sokan ezt a feladatot tartották a legnehezebbnek, s a pontozási útmutató magas pontszáma is ezt sugallta.

Ha a *12.* és *13. ábrát* összevetjük a többivel, az eredmények ezt többé-kevésbé igazolják. Minden tanulócsoportban ennek a feladatnak a legalacsonyabb a megoldási százaléka. Ugyanakkor a 0 pontot elérő tanulók száma szinte az összes

13. ábra — 4. feladat. Az egyes tanulócsoportokban elért maximális és 0 pontszámú tanulók százaléka



14. ábra — 5. feladat. Az egyes tanulócsoportok százalékos teljesítménye az elérhető maximális pontszámhoz viszonyítva



csoportban a negyedik helyen áll, vagyis három olyan feladat is van, amelynél ezek az arányok magasabbak. A megoldást elkezdeni tehát viszonylag sok tanulónak sikerült, a teljes befejezéshez azonban csak a legjobb csoportok 12, illetve 45%-a jutott el.

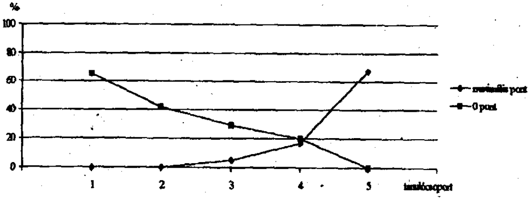
A sorozatok témakörben tehát elég sokan tudták az alapismereteket, de ezzel a maximális 14 pontból csak 4-et, 5-öt lehetett szerezni.

A feladat viszonylag jól mér, mert az egyszerűbb ismeretek alkalmazása megelőzi a bonyolultabb matematikai apparátus biztos kezelésének igényét, de tudni kell róla, hogy csak részben – kisebb részben – mutatja a sorozatokról megtanult ismeretek alkalmazásának színvonalát. Jól differenciál az egyes tanulócsoportok között, de nagyon nagy az ugrás a legjobb csoport teljesítményénél. (A 4. csoport 40%-áról az 5. csoport 77%-os teljesítményemelkedése minőségi változást jelez.)

Az *5. feladat* trigonometriai ismereteket kér számon. A teljesítményeloszlást a *14., 15. ábra* szemlélteti.

Mindhárom görbe nagyon hasonlít az előző feladatot ábrázoló grafikonokhoz. A feladat tehát megközelítőleg hasonlóan viselkedik a sorozatos feladathoz, annak ellenére, hogy jellegzetesen más típusú homogén, tisztán trigonometriai ismereteket

15. ábra – 5. feladat. Az egyes tanulócsoportokban elért maximális és 0 pontszámú tanulók százaléka



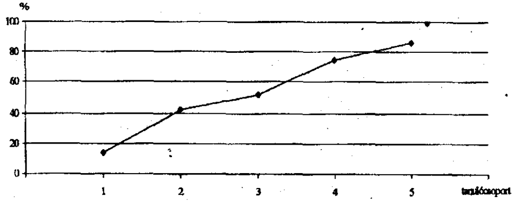
számon kérő feladatról van szó. Ha a tanuló a probléma bizonyos részletismereteinek birtokában van, elérhet részeredményeket. Pontos, minden részletében biztos tudás szükséges azonban a feladat teljes megoldásához.

A példa nem túl nehéz, ezért meglepő a szerény teljesítmény. Különösen az magyarázható nehezen, hogy igen magas a 0 pontot elérő tanulók száma. A jól kezdő, de csak részmegoldást adó tanulók többnyire a radiánnal és a periódusok meghatározásával bánnak nehezen. Összességében megállapítható, hogy elég alacsony szintűek a vizsgált tanulók trigonometriai ismeretei, a legjobb csoportot leszámítva eredményeik nem érik el az 50%-ot. A feladat jól differenciál, de az előzőhöz hasonlóan a 4. és az 5. csoport között nagy a teljesítményugrás, 47%-ról 92%-ra ugrik a csoport teljesítménye.

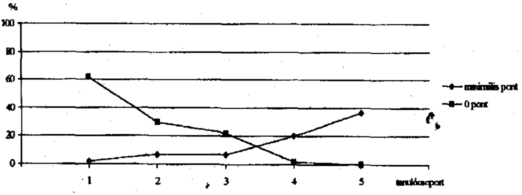
A 7. *feladat* funkciója szintén kettős. Részben arra ad választ, hogy miként képesek reprodukálni a tanulók egy ismert, tanult tétel bizonyítását, valamint síkgeometriai ismereteikről is képet kapunk *(16., 17. ábra).*

Az eredmények – a leggyengébb csoportot nem számítva – nem túl rosszak. A második csoportban a maximális pontszámok 42%-át kapják a tanulók, az ötödikben 86%-át. *Vagyis egy egyszerű tétel bizonyításának reprodukálására részben vagy*

16. ábra – 7. feladat. Az egyes tanulócsoportok százalékos teljesítménye az elérhető maximális pontszámhoz viszonyítva



17. ábra – 7. feladat. Az egyes tanulócsoportokban elért maximális és 0 pontszámú tanulók százaléka



egészben a vizsgált tanulók igen nagy hányada képes ebben a témakörben. A maximális pontszámot kapott tanulók száma azonban igen csekély minden csoportban. Itt is érvényes az a több feladat tárgyalásánál már említett megállapítás, hogy a tanulók jelentős része nincs tisztában azzal, hogy mit kell leírni, mely részleteket kell indokolni, s melyek azok a tudáselemek, amelyek felhasználása természetes, magyarázatra nem szorulnak valamely matematikafeládat – különösen a bizonyítást igénylő feladat – megoldása közben ahhoz, hogy az teljes legyen.

A teljes mintából – a hét feladatot együtt értékelve – megállapítható, hogy az egyébként biztos ismeretekkel, jó képességekkel rendelkező tanulók megoldásaiban is a pontos indoklás terén van a legtöbb hiányosság.

Matematikaérettségi feladatok 1993-ban

1. 6%-os és 30%-os töménységű sósavat összeöntve 24 liter 15%-os töménységű sósavat kaptunk. Hány liter sósavat öntöttünk össze a kétféle sósavból?

2. Egy négyzet két szomszédos csúcsa A(1;4), B(5;2). Számítsa ki a CD oldal felezőpontjának koordinátáit!

3. Az r sugarú körbe írt trapéz egyik oldala r, a két szára $r\sqrt{2}$. Mekkora a negyedik oldala?

4. Egy számtani sorozat első négy tagjához rendre 5-öt, 6-ot, 9-et és 15-öt adva egy mértani sorozat egymást követő tagjait kapjuk. Határozza meg a mértani sorozat hányadosát!

5. Mely valós számokra igaz, hogy

$$tg^2\left(\frac{\pi x}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \quad ?$$

6. Adja meg a következő egyenlet valós megoldásait!

$$\sqrt{11^x} = \sqrt[3]{121}$$

7. Bizonyítsa be, hogy a derékszögű háromszög befogója az átfogónak és a befogó átfogóra eső merőleges vetületének a mértani közepe!