KÖZGAZDASÁGI SZEMLE, LXXIII. ÉVF., 2026. FEBRUÁR (174–189. o.)

SIMONOVITS ANDRÁS

Még egyszer az optimális jelzáloghitel-törlesztési pályákról

Ebben a rövid cikkben visszatérek egy Király Júliával együtt korábban vizsgált kérdéshez: infláció esetén a hitelfelvevő szempontjából hogyan lehetne javítani a hagyományos jelzálogtörlesztési pályán? A válasz kézenfekvő: a törlesztőrészletnek ne a nominális, hanem a reálértéke legyen állandó. Állandó ütemű inflációt, jövedelemnövekedést és kamatlábat feltételezve, a lehető legegyszerűbb optimalizációs modellben elemezzük a kérdést, s úgy tűnik, az indexálás beváltja a reményeket, különösen gyorsabb infláció, növekedés és észszerű előrelátás esetén.*
Journal of Economic Literature (JEL) kód: G21, E43, E44, D14, D91.
Kulcsszavak: jelzáloghitel, törlesztési pálya, indexálás, reálértékű törlesztés, infláció.

Revisiting the optimal repayment path for mortgages

ANDRÁS SIMONOVITS

In this short paper I revisit a problem we studied with Júlia Király: in case of inflation, how could the repayment path of a mortgage be improved for the borrower? The answer is clear: it is the real, not the nominal value of the repayment that should be constant. Assuming constant inflation, income growth and interest rate, we analyze the problem in the simplest possible model. It appears that indexation is promising, especially for faster inflation, growth and rensonable foresight.
Journal of Economic Literature (JEL) codes: G21, E43, E44, D14, D91.
Keywords: mortgage loan, repayment path, indexation, real-value repayment, inflation.

* Köszönetemet fejezem ki *Király Júliának* a devizaalapú jelzáloghitelek modellezésében való részvételéért, *Berlinger Edinának* a cikk előző változataihoz fűzött sokrétű tanácsaiért (például rávezetett arra, hogy a jövedelemdinamika túlbecslése több kárt okozhat az indexált jelzálog esetében, mint a hagyományosnál). Hálás vagyok *Surányi Györgynek* a témáról folytatott beszélgetéseinkért. Egyik névtelen lektorom hihetetlenül gondos munkával segítette a cikk hibáinak a kijavítását. Hangsúlyozom, hogy az említett segítőim nem mindenben értenek egyet a cikkben előadottakkal.

Simonovits András DSc, *professor emeritus,* Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Matematikai Intézet (e-mail: simonov@math.bme.hu).

A kézirat első változata 2025. szeptember 24-én érkezett szerkesztőségünkbe.
DOI: https://doi.org/10.18414/KSZ.2026.2.174

Bevezetés

Az ingatlanszerzést (lakás vagy ház vásárlását) megkönnyítő jelzálogkölcsönök nagyon fontos szerepet játszanak a legtöbb ország gazdaságában. Az 1970-es évek stagflációs környezetében amerikai közgazdászok is javasolták a kettősen indexált jelzálogkölcsönt, amelyek esetében a kamatláb mellett a törlesztőrészletek is követik az inflációt, de végül nem vezették be; Latin-Amerika több országában viszont a tartós két számjegyű inflációs környezetben alkalmazták. Az amerikai másodrendű jelzálogkölcsönöktől a devizaalapú magyar megfelelőkig terjedő különféle jelzálog-konstrukciók 2007-től kezdve sok bajt okoztak az érintett országokban. A 2025 szeptemberében induló Otthon Start hitel (3 százalékos fix hitelkamatláb) Magyarországon újból reflektorfénybe állította a kérdést. Számos publicisztika foglalkozott a konstrukció várható kedvező és kedvezőtlen hatásaival. Az intézkedés néhány hónap alatt – számomra meglepő módon – jelentősen emelte az ingatlanárakat. Furcsa módon viszont szinte senki sem foglalkozott a hagyományos hiteltörlesztési képlet már Franco Modigliani (1974) által hangsúlyozott gyenge pontjával: ha eltekintünk is az infláció változásától és a kamatlábak azt követő mozgásától, a havi törlesztőrészlet nominálisan állandó; emiatt pedig az induló törlesztőrészlet reálértékben túl nagy, a záró részlet viszont túl kicsi. A közgazdaságilag indokoltabb állandó reálértékű indexált törlesztés alkalmazása segítene ezen a problémán.

A következőkben visszatérek a jelzálog-hitelezés Király és Simonovits (2015) által alkotott minimalista modelljének egyes részleteihez, de elhagyom az azóta Magyarországon a háztartások számára főszabályként már betiltott devizaalapú hitelezést. Nullának veszem az önrészesedést, valamint figyelmen kívül hagyom az egyéb megtakarításokat. A kiindulópont: a hagyományos törlesztés részleteinek értéke meredeken emelkedik az inflációs ráta és a nominális kamatláb függvényében, hogy a törlesztési pálya reálértékben annál gyorsabban lejtsen lefelé. Ahhoz, hogy a két törlesztési módszer nyújtotta jólétet számszerűsítsük, be kell vezetnünk valamilyen életpálya-hasznosságfüggvényt. Általánosítva az idézett cikkben használt logaritmikus hasznosságfüggvényt, most egy realisztikusabb CRRA (állandó relatív kockázatkerülési) függvényt alkalmazunk. Ennek segítségével meghatározhatjuk a két módszer ingatlanoptimumát és a keletkező jólétet. Az elnyújtottabb indexált törlesztésben nagyobb az összes törlesztés reálértéke, mint a hagyományosban. Ennek ellenére több jólétet hoz, különösen gyorsabb infláció vagy gyorsabban emelkedő és jól előrebecsült reáljövedelmek esetén.

A tanulmány szerkezete a következő: egy tömör szakirodalmi áttekintést követően bemutatjuk a hagyományos törlesztést, majd rátérünk az indexált törlesztésre. Az ezt követő szakaszban összehasonlítjuk a két eljárást, végül levon juk az elemzésünkből adódó következtetéseket. Az *1. függelékben* a legegyszerűbb modellben analitikusan („papíron ceruzával") igazoljuk, hogy rögzített ingatlannagyságnál a hagyományos törlesztés kisebb életpálya-hasznosságot ad, mint az indexált. A *2. függelékben* vázoljuk az egzogén paraméterek változásának lehetséges hatását.

Szakirodalmi áttekintés – dióhéjban

Modigliani (1974), valamint Lessard és Modigliani (1975) már fél évszázada hangsúlyozták, hogy gyors infláció esetén a hagyományos jelzálogtörlesztési pálya fejnehéz, és helyette az indexált, reálértékben állandó törlesztési pályán alapuló módszert dolgoztak ki. Simonovits (1991) az átmenet elszabaduló inflációs korszakában javasolta ezt a megoldást, de ő sem talált itthon meghallgatásra. Buckley és szerzőtársai (1993) visszatértek a kérdéshez, és nyomatékosan hangsúlyozták a bérdinamika jelentőségét is: az indexált törlesztés veszélybe kerülhet, ha a törlesztőrészlet az induló jövedelem túl nagy részét köti le, és a családi jövedelem reálértéke csökken. A mostani cikk írásakor jelent meg Incze (2025) tanulmánya, amely kiváló szakirodalmi összefoglalóján túl a hitelfelvevő jövedelmi pályájához igazodó törlesztési pályák szerepét modellezte.[1] A nagyszámú cikk közül, amelyek az amerikai jelzálog-hitelezés finomabb részleteivel nagyon igényesen foglalkoznak, három írást emelek ki: Campbell és Cocco (2003) cikkét, amely a vagyoni kockázatot kezelő háztartások rögzített és változtatható kamatlábú jelzáloghitelek közötti optimális választását mutatja be, Campbell és Cocco (2015) csődbe menekülési modelljét, valamint Boutros és szerzőtársai (2025) tanulmányát, amely a jelzáloghitelek törlesztési pályáját és a törlesztési időt modellezi.

A Magyarországon 2010 körül összeomló svájcifrank- és forintalapú jelzáloghitelek rendezésére Berlinger és Walter (2013) tett unortodox javaslatot. A kérdéskört elméletileg elemezte Király és Simonovits (2015). De a tanulság változatlanul érvényes: a forintalapú indexált jelzálog csökkenthette volna a devizaalapú hitelek vonzerejét. Kovács és Pásztor (2018) áttekintette a globális jelzálogpiac helyzetét és kihívásait. Kritikusan értékelték a hagyományos (állandó nominális törlesztőrészletű) jelzáloghiteleket, elmagyarázták a devizaalapú hitelek szerepét, és javasolták az állandó reálértékű törlesztés bevezetését. A Bodzási (2019) szerkesztésében megjelent angol nyelvű kötetben számos szerző elemezte a devizaalapú hitelek hazai sorsát. Itt jelent meg Berlinger (2019) tanulmánya a változó kamatlábú jelzálogkölcsönök hazai történetéről. Kovács és Nagy (2020) az írásuk címében is szerepeltették e cikkem fő fogalmát: a reálértékben állandó törlesztőrészletet. Mélyrehatóan ismertették a kettősen indexált jelzáloghitel kérdéskörét, alapvetően támogatva annak bevezetését, de jelezvén annak korlátait is: ha a hitelfelvevő családi jövedelmének pályája még az általános inflációtól is elmarad, akkor az indexált törlesztés veszélybe kerülhet. Banai és szerzőtársai (2022) kritikusan elemezték a változtatható törlesztőrészletű jelzáloghiteleket.

Hagyományos törlesztés

Az egyszerűség kedvéért havi helyett évi törlesztéssel és nulla önrészesedéssel számolunk. A főszövegben nem foglalkozunk az inflációs index (1 + inflációs ráta) és a kamatszorzó (1 + kamatláb) időbeli változásával, jelölésük p és R. Legyen $t = 1, 2, \ldots, T$

[1] Egyes országokban – köztük Magyarországon – hasonló módszereket alkalmaznak a diákhitelre, ahol a törlesztőrészlet az adós bérét követi (Berlinger, 2009).

a törlesztési évek indexe, T a törlesztési idő. B-vel jelölve a nominálisan állandó éves törlesztőrészletet, az év végi tartozás, D_t dinamikáját a következő egyenlet írja le:

$$D_t = RD_{t-1} - B, \quad t = 1, 2, \ldots, T, \tag{1}$$

ahol D_0 a jelzálog eredeti értéke, az ingatlan állandó áras értéke.
Ha megoldjuk az állandó együtthatós lineáris differenciaegyenletet, és kikötjük, hogy $D_T = 0$, akkor a hagyományos (állandó nominális értékű) törlesztőrészlet:

$$B = \beta D_0, \quad \text{ahol} \quad \beta = \frac{R-1}{1-R^{-T}}, \quad R > 1. \tag{2}$$

A továbbiakban β-t *hagyományos törlesztési együtthatónak* nevezzük.
Ugyanezt kapjuk a jelenérték-egyenletből is:

$$D_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{B}{R^t}.$$

Alkalmazva ugyanis a mértani sorozat összegképletét:

$$D_0 = \frac{B\left(R^{-T} - 1\right)}{R\left(R^{-1} - 1\right)} \quad \text{vagy} \quad D_0 = B/\beta.$$

A vizsgálatunkból kizárt kamatmentes ($R = 1$) kölcsön törlesztőrészlete természetesen $B = D_0/T$. Ahogy nő a kamatláb, egyre inkább úgy nő a törlesztőrészlet is.

Ideje bevezetnünk a reálváltozókat is, amelyeket a megfelelő nagybetűk kisbetűs változatával jelölünk:

$$b_t = \frac{B}{p^t} \quad \text{és} \quad d_t = \frac{D_t}{p^t}, \quad t = 1, 2, \ldots, T. \tag{3}$$

Érdemes az (1) tartozásdinamikai egyenletet is reálváltozókra átírni:

$$\frac{D_t}{p^t} = \frac{R}{p}\frac{D_{t-1}}{p^{t-1}} - \frac{B}{p^t}, \quad t = 1, 2, \ldots, T.$$

Bevezetve a reálkamatszorzó $r = R/p$ képletét, a reáldinamika:

$$d_t = rd_{t-1} - b_t, \quad t = 1, 2, \ldots, T. \tag{4}$$

Az *1. példában* az alapparaméter-értékeken a jelenlegi Otthon Start program piaci alternatíváját szemléltetjük.

1. példa
$R = 1{,}065$, $D_0 = 50$ M Ft és $T = 25$ év. A hagyományos éves indexált törlesztőrészlet, $B = 4{,}1$ M Ft, havi szinten 342 E Ft.

Ha az optimális ingatlanértéket akarjuk vizsgálni, akkor célszerű valamilyen életpálya-hasznosságfüggvényt feltételeznünk. Z-vel jelölve a családot képviselő személynek a jelzáloghitel megnyitásakor hátralévő élettartamát:

$$U\left(c_1, \ldots, c_Z, D_0\right) = \sum_{t=1}^{Z} \delta^t u\left(c_t, D_0\right), \tag{5}$$

ahol $0 < \delta < 1$ az éves leszámítolási együttható, az $u(c_t, D_0)$ pedig a t-edik évbeli hasznosság.

Feltesszük, hogy a család az éves nettó jövedelmét (y_t) két célra használja fel: fogyasztásra és hiteltörlesztésre:

$$y_t = c_t + b_t, \quad t = 1, 2, \ldots, Z. \tag{6}$$

A (6) képlet figyelembevételével c_t csak D_0-tól függ, ezt behelyettesítve (5)-be:

$$V(D_0) = \sum_{t=1}^{T} \delta^t u\left(y_t - \beta D_0 / p^t, D_0\right) + \sum_{t=T+1}^{Z} \delta^t u\left(y_t, D_0\right). \tag{7}$$

Minél értékesebb (nagyobb és/vagy jobb minőségű) az ingatlan, annál kényelmesebben lakik benne a család, de annál kevesebb pénzük marad fogyasztásra a törlesztési időszakban. A kettő közötti optimumot kell megtalálni.

Az optimális D_0 kielégíti a következő implicit egyenletet:

$$V'(D_0) = \sum_{t=1}^{T} \delta^t \left[-u_1'\left(y_t - \beta D_0 / p^t, D_0\right)\beta / p^t + u_2'\left(y_t - \beta D_0 / p^t, D_0\right)\right] +$$

$$+ \sum_{t=T+1}^{Z} \delta^t u_2'\left(y_t, D_0\right), \tag{8}$$

ahol u_1' és u_2' a hasznosságfüggvény két parciális deriváltja.
Az elemzést megkönnyíti, ha CRRA jellegű hasznosságfüggvényt tételezünk fel:

$$u(c_t, D_0) = (1 - \gamma)^{-1}\left(c_t^{1-\gamma} + \kappa D_0^{1-\gamma}\right),$$

ahol $1/\gamma$ a relatív kockázatkerülési együttható, $\kappa > 0$ pedig az ingatlan relatív hasznossága a fogyasztáshoz képest.[2]

Elméleti fontossága miatt érintjük a $\gamma = 1$ paraméterértékű Cobb–Douglas-hasznosságfüggvényt:

$$u(c_t, D_0) = \log c_t + \kappa \log D_0.$$

Egyébként a Király és Simonovits (2015) cikkben ezt a szélső esetet választottuk a numerikus szemléltetésben.

A modell adatait megadva, D_0° numerikus módszerrel közelítően meghatározható. De előtte bemutatjuk az egyszerűbb, indexált törlesztést.

Indexált törlesztés

Rátérünk az indexált törlesztőrészletű jelzáloghitelre, ahol egyszerűsödnek a képleteink, függetlenedve az inflációs rátától. A (4) egyenletben b_t helyett b-t írunk:

[2] Valójában κ is függ γ-tól, erre még az *1. a) táblázatban* visszatérünk.

Reáldinamika:

$$d_t = rd_{t-1} - b. \tag{$\tilde{4}$}$$

A (2) összefüggés analógiájára a változatlan reáltörlesztés értéke ($d_0 = D_0$ jelöléssel):

$$b = \tilde{\beta} d_0, \qquad \tilde{\beta} = \frac{r-1}{1-r^{-T}}, \qquad r > 1, \tag{$\tilde{2}$}$$

ahol $\tilde{\beta}$ az *indexált törlesztés együtthatója*. Állandó reálkamatláb esetén az értéke független az inflációtól, és minél nagyobb az infláció, annál inkább meghaladja a hagyományos törlesztési együttható (lásd a *4. táblázat* 2. oszlopát, amelynek első sorában szerepel $\tilde{\beta}$).

2. példa

$p = 1{,}044$, $R = 1{,}065$, $D_0 = 50$ M Ft és $T = 25$ év. Az éves indexált törlesztőrészlet, $b = 2{,}577$ M Ft, havi szinten 214,8 E Ft.

Fennáll az

$$y_t = c_t + b, \qquad t = 1, 2, \ldots, Z. \tag{$\tilde{6}$}$$

A (7) egyenlet helyett a hasznosságfüggvény:

$$v(d_0) = \sum_{t=1}^{T} \delta^t u(y_t - \beta d_0, d_0) + \sum_{t=T+1}^{Z} \delta^t u(y, d_0). \tag{$\tilde{7}$}$$

Optimumban

$$v'(d_0) = \sum_{t=1}^{T} \delta^t \left[-u_1'(y_t - \beta d_0, d_0)\tilde{\beta} + u_2'(y_t - d_0, D_0) \right] + \sum_{t=T+1}^{Z} \delta^t u_2, (y_t, d_0). \tag{$\tilde{8}$}$$

Ha a reáljövedelem-pálya állandó *($y_t = y$)*, akkor ($\tilde{7}$) egyszerűsödik:

$$v(d_0) = \sum_{t=1}^{T} \delta^t u(y_t - \tilde{\beta} d_0, d_0) + \sum_{t=T+1}^{Z} \delta^t u(y_t, d_0). \tag{$\tilde{\tilde{7}}$}$$

Alternatív $X = T$, Z-re bevezetjük a leszámítolási együtthatók összegét:

$$\tau_X = \sum_{t=1}^{X} \delta^t = \delta \frac{1-\delta^X}{1-\delta}, \qquad \text{ha } \delta < 1 \qquad \text{vagy} \qquad \tau_X = X, \qquad \text{ha} \qquad \delta = 1.$$

Ekkor az új életpálya-hasznosságfüggvény tömörebben is felírható:

$$v(d_0) = \tau_T u(y - \tilde{\beta} d_0, d_0) + (\tau_Z - \tau_T) u(y, d_0). \tag{$\tilde{9}$}$$

A belső optimumfeltétel:

$$0 = -\tau_T u_1'(y - \tilde{\beta} d_0, d_0)\tilde{\beta} + \tau_T u_2'(y - \tilde{\beta} d_0, d_0) + (\tau_Z - \tau_T)\, u(y, d_0). \tag{$\widetilde{10}$}$$

Parciálisan deriválva a CRRA hasznosságfüggvényt és behelyettesítve a kapott parciális deriváltakat az optimumfeltételbe (kihasználva, hogy $u_2' = -\kappa d_0^{-\gamma}$, függetlenül c vagy y értékétől):

$$\tau_T c^{-\gamma}\tilde{\beta} = \tau_Z \kappa d_0^{-\gamma}, \quad \text{azaz} \quad \tau_T d_0^{\gamma}\tilde{\beta} = \tau_Z \kappa c^{\gamma}.$$

Bevezetve a $\mu = 1/\gamma$ jelölést és μ-edik hatványra emelve mindkét oldalt, majd visszahelyettesítve $c = y - \tilde{\beta} d_0$-t:

$$\tau_T^{\mu} d_0 \tilde{\beta}^{\mu} = \tau_Z^{\mu}\kappa^{\mu} c = \tau_Z^{\mu}\kappa^{\mu}\left(y - \tilde{\beta} d_0\right).$$

Rendezéssel az ingatlanoptimum explicit alakban kifejezhető:

$$d_0^{\circ} = \frac{\tau_Z^{\mu}\kappa^{\mu} y}{\tilde{\beta}\tau_Z^{\mu}\kappa^{\mu} + \tilde{\beta}^{\mu}\tau_T^{\mu}}. \tag{$\widetilde{11}$}$$

3. példa

$Z = 60$ év, $y = 1$, $r = 1{,}02$, $\tilde{\beta} = 0{,}051$. Az *1. a) táblázatban* γ és κ kapcsolatát vizsgáljuk, rögzítve a következő táblázatbeli $d_0 = 3{,}885$ értéket. A kiválasztott sor adatait dőlt számokkal jelöljük.

1. a) táblázat
Kockázatkerülési és ingatlanpreferencia ($T = 25$ év, $\delta = 0{,}98$)

Kockázatkerülési	Ingatlan-
preferencia	
γ	κ
1	0,140
2	0,680
3	3,299
4	*16,000*
5	77,603
6	376,386

Az *1. b) táblázat* $\gamma = 4$ paraméterérték esetén mutatja κ paraméterérték hatását az ingatlanoptimum és az éves törlesztőrészlet értékére, az éves családi jövedelem arányában.

A folytatáshoz választ kell adnunk arra, hogy mennyivel csökkenti a család jólétét az optimálistól eltérő értékű ingatlan és fogyasztás. A jóléti gazdaságtanban megszokott módszert alkalmazva azt kérdezzük: $d_0 \neq d_0^{\circ}$ esetén mekkora $\eta < 1$ számmal kell beszorozni az eredeti y jövedelmet, hogy az $(\eta y, d_0^{\circ})$ optimumban a hasznosságfüggvény értéke lesüllyedjen a nem optimális d_0 ingatlan eredeti jövedelmi pálya melletti hasznosságára? Képletben:

$$\tilde{W}[y, d_0] = \tilde{W}[\eta y, d_0^{\circ}].$$

1. b) táblázat
Ingatlanpreferencia, optimális ingatlan és indexált törlesztőrészlet, az éves családi jövedelem arányában

Ingatlanpreferencia	Ingatlanoptimum	Törlesztőrészlet
κ	d_0°	b
8	3,374	0,173
12	3,666	0,188
16	*3,885*	*0,199*
20	4,062	0,208
24	4,210	0,216

Behelyettesítve ($\tilde{9}$) megfelelőjébe:

$$\tau_T u(y - \tilde{\beta} d_0, d_0) + (\tau_Z - \tau_T) u(y, d_0) = \tau_T u(\eta y - \tilde{\beta} d_0, d_0^\circ) + (\tau_Z - \tau_T) u(\eta y, d_0^\circ).$$

Továbblépünk a CRRA-specifikáció behelyettesítésével ($\sigma = 1 - \gamma$):

$$\tau_T[(y - \tilde{\beta} d_0)^\sigma + \kappa\, d_0{}^\sigma] + (\tau_Z - \tau_T)[y^\sigma + \kappa\, d_0^\sigma] = \tau_T[(\eta y - \tilde{\beta} d_0^\circ)^\sigma + \kappa (d_0^\circ)^\sigma] +$$
$$(\tau_Z - \tau_T)[(\eta y)^\sigma + \kappa (d_0^\circ)^\sigma].$$

Numerikus módszerekkel az $\eta(d_0)$ kapcsolat közelítően kiszámítható. A $\kappa = 16$ preferenciaérték mellett az *ingatlanoptimum* 80, 90,…, 120 százaléka mellett vizsgáljuk a jóléti veszteséget. Lefelé 2, fölfelé 1,2 százalék a szélső veszteség *(2. táblázat).*

2. táblázat
Ingatlanérték és jóléti veszteség ($y = 1$)

Ingatlanérték	Relatív jólét
d_0	η
3,108	0,980
3,496	0,996
3,885	*1,000*
4,273	0,997
4,662	0,988

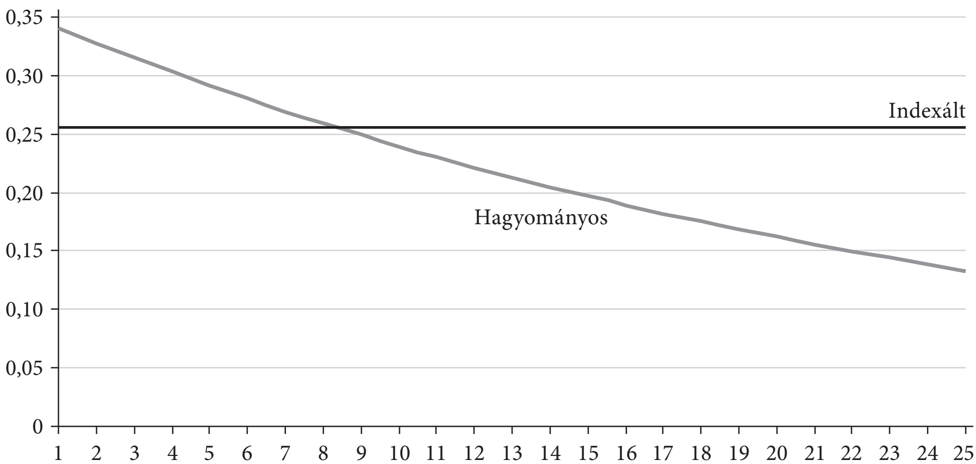
A *2. táblázat* is valószínűsíti, hogy az indexált jelzáloghitel jóléti többlete nem annyira az értékesebb ingatlanból, mint inkább a fogyasztás kisimításából származik.

A két törlesztési módszer összehasonlítása

Először visszatérünk a hagyományos kölcsön ingatlanoptimumának numerikus elemzésére $\kappa = 16$ preferencia esetén. Itt a változó reálértékű törlesztés miatt nem tudjuk kiemelni a leszámítolási együttható-hatványszorzókat – eleve numerikus megoldásra kényszerülünk. Ekkor már nincs szükségünk az állandó reáljövedelem feltevésére sem, helyette az $y_t = g^t$ feltevéssel élünk. Először $g = 1{,}03$ növekedési szorzóval, $p = 1{,}04$ inflációs indexszel és $\delta = 0{,}98$ leszámítolási együtthatóval számolunk, azután érzékenységi vizsgálatokat végzünk.

A hagyományos törlesztés ingatlanoptimuma, $D_0^\circ = 4{,}49$ jóval alacsonyabb az indexálténál: $d_0^\circ = 5$; az induló törlesztés pedig $b_0 = 0{,}34$. Az *1. ábra* a két pályát együtt mutatja. Az első magasabbról indul, és alacsonyabban ér véget, átlaga 0,221; ellentétben az indexálttal, amely reálértékben végig 0,256. Később megmutatjuk, hogy az indexált rendszer által biztosított jólét körülbelül 5 százalékkal nagyobb, mint a hagyományosé: ennyivel nagyobb jövedelemre lenne szükség a hagyományos törlesztési rendszerben, hogy elérjék az indexált jelzálog mellett az eredeti jövedelem által nyújtott jólétet.

1. ábra
A hagyományos és az indexált törlesztőrészletek, reálértékben (T = 25 év, Z = 60 év, $\gamma = 4$)



Legelőször azt számoljuk ki, hogy adott fix áras ingatlanérték mellett hogyan csökkenti a jólétet az infláció. A korábbiaknak megfelelően η jelöli a csökkent jólétet p inflációs szorzó esetén. Csak a $\left[c_t(p)\right]_{t=1}^{Z}$ fogyasztási pályák hasznosságát kell kiegyenlíteni:

$$\sum_{t=1}^{Z} \delta^t c_t(p)^\sigma = \sum_{t=1}^{Z} \delta^t \left[\eta c_t(1)\right]^\sigma = \eta^\sigma \sum_{t=1}^{Z} \delta^t c_t(1)^\sigma,$$

azaz

$$\eta = \left[\sum_{t=1}^{Z} \delta^t c_t(p)^\sigma\right]^{1/\sigma} \Bigg/ \left[\sum_{t=1}^{Z} \delta^t c_t(1)^\sigma\right]^{1/\sigma}.$$

Ennek alapján numerikusan kiszámíthatjuk a jólét–infláció függvényt. A *2. táblázatot* követve, a *3. táblázatban* az inflációs rátát 0 és 5 százalék között léptetjük, miközben a reáljövedelem növekedési üteme 3 százalék. Ha nincs infláció, akkor – ahogyan már láttuk – reálértékben az indexált törlesztést kapjuk vissza. Amint az infláció 0-ról 4 százalékra növekszik, a törlesztési együttható 5,1-ről 8,7 százalékra emelkedik, a relatív jólét pedig 1-ről 0,909-re süllyed. Itt és a többi táblázatban az irányadó paraméterértékek kimenetét dőlt számokkal jelöljük.

3. táblázat
Az inflációs ráta jóléti hatása a fogyasztási pályára, fix ingatlanérték mellett ($g = 1{,}03$, $\delta = 0{,}98$)

Inflációs ráta	Törlesztési együttható	Relatív jólét
$100(p-1)$	β	η
0	0,051	1,000
1	0,058	0,984
2	0,064	0,967
3	0,071	0,949
4	*0,079*	0,930
5	0,087	0,909

Érzékenységi vizsgálatainkban azt elemezzük, hogyan módosul a két eljárásban az ingatlanoptimum és a törlesztőrészlet reálértéke, illetve a hagyományos törlesztés értékvesztése.

Ahogy az inflációs ráta emelkedik, úgy csökken az ingatlanoptimum, 4 százalékos inflációnál már csak az éves reáljövedelem 4,5-szerese, és a törlesztőrészlet az idő múlásával 34-ről zuhan 13 százalékra, miközben az átlag 22 százalékra csökken.

4. táblázat
Az inflációs ráta hatása az ingatlanoptimumra és a hagyományos törlesztési pályára ($g = 1{,}03$, $\delta = 0{,}98$)

Inflációs ráta	Ingatlan-optimum	Kezdő	Átlagos	Záró
		törlesztőrészlet		
$100(p-1)$	D_0°	b_1°	$\mathbf{E}\, b^\circ$	b_T°
0	5,00	0,256	0,256	0,256
1	4,87	0,278	0,247	0,219
2	4,74	0,299	0,238	0,186
3	4,62	0,320	0,230	0,158
4	*4,49*	*0,340*	*0,221*	*0,133*
5	4,37	0,360	0,213	0,112

Mostantól kettéválasztva mutatjuk be a két törlesztési eljárást. Az *5. táblázatban* az inflációt 4 százalékon rögzítjük, a reáljövedelem növekedési ütemét 0-ról 4 százalékra léptetjük. Ha nincs növekedés, akkor a hagyományos ingatlanoptimum 3,8-szeres, és a törlesztési részlet reálértéke 29-ről 11 százalékra zuhan, miközben az átlag 19 százalék. Az indexált optimumok nagyobbak. Minél nagyobb a növekedési ütem, annál nagyobbak az ingatlanok és a reáltörlesztések optimumai, valamint az optimumok közti különbségek az indexált törlesztés javára. A táblázat utolsó oszlopában a változás egyik okát, az életpálya-jövedelem növekedését is feltüntetjük. Az életpálya-jövedelem látványosan növekszik, képlete $Y = T$, ha $g = 1$, és $Y = g(g^T - 1)/(g - 1)$, ha $g > 1$. A gyors reáljövedelem-növekedéssel már túllépünk modellünk keretein: ennyire felívelő pályán senki sem fog 60 évig ugyanabban az ingatlanban maradni.

5. táblázat
A családi reáljövedelem növekedési ütemének hatása a két ingatlanoptimumra és a két törlesztési pályára ($p = 1,04$, $\delta = 0,98$)

Reáljövedelem növekedési üteme (százalék)	Hagyományos törlesztés				Indexált törlesztés		Életpálya-jövedelem
	ingatlan-optimum	kezdő	átlagos	záró	ingatlan-optimum	törlesztő-részlet	
		törlesztőrészlet					
$100(g-1)$	D_0°	b_1°	$\mathbf{E}\, b^\circ$	b_T°	d_0°	b°	Y
0	3,80	0,288	0,187	0,112	3,88	0,199	60,0
1	4,07	0,308	0,200	0,120	4,32	0,221	82,5
2	4,30	0,326	0,212	0,127	4,69	0,240	116,3
3	*4,49*	*0,340*	*0,221*	*0,133*	*5,00*	*0,256*	*167,9*
4	4,66	0,353	0,230	0,138	5,27	0,270	247,5

Ezen a ponton kitérünk arra az esetre, amikor a hitelfelvevő felülbecsüli a család jövedelmének reálnövekedési ütemét. Egyszerű számítással igazolható, hogy ekkor létezik egy kritikus tényleges növekedési ütem, amely fölött a keletkező növekedési különbség ellenére érvényesül az indexált törlesztés fölénye a hagyományossal szemben, de a kritikusnál lassabb növekedési ütem esetén annyira nagy a valódi jövedelempályához tartozó optimálisnál nagyobb ingatlan törlesztési terhe, hogy a teljes jóléti hatás negatív. Az évi 3 százalékos reálnövekedéshez tartozó (5,00; 4,49) ingatlanpár esetében a kritikus növekedési ütem 1,2 százalék; ekkor az indexált törlesztés optimumánál nagyobb ingatlan okozta kárt éppen ellensúlyozza a kiegyenlített fogyasztási pálya haszna.

A bevezetésben már utaltunk a reálbér ingadozása által okozott problémára. A *6. táblázatban* most egy négyéves jövedelemciklust modellezünk:

$$g_t = g_0 + \begin{cases} \Delta g, & ha\ t = 4k \\ 0, & ha\ t = 4k+1 \\ -\Delta g, & ha\ t = 4k+2 \\ 0, & ha\ t = 4k+3 \end{cases},$$

ahol $|\Delta g|$ a maximális kitérés, k pedig egy természetes szám. Ha $\Delta g > 0$, akkor a ciklus elején nő a reáljövedelem; ha $\Delta g < 0$, akkor a ciklus elején csökken a reáljövedelem. Az *5. táblázat* számításaihoz képest ciklikusan változó növekedési ütemre fölírva, a *6. táblázatban* érdekes képet kapunk. Minél alacsonyabb/magasabb az induló jövedelemdinamika, annál alacsonyabb/magasabb mindkét ingatlanoptimum és a hozzá tartozó törlesztési pálya. Még bonyolultabb lenne véletlen jövedelmi pályát modellezni.

6. táblázat
A családi reáljövedelem növekedési ciklusának hatása a két ingatlanoptimumra és a két törlesztési pályára ($p = 1{,}04$, $\delta = 0{,}98$, $g_0 = 1{,}03$)

Növekedési ütem ciklusa	Hagyományos törlesztés				Indexált törlesztés	
	ingatlan-optimum	kezdő	átlagos	záró	ingatlan-optimum	törlesztő-részlet
		törlesztőrészlet				
Δg	D_0°	b_1°	$\mathbf{E}\, b^\circ$	b_T°	d_0°	b°
–0,10	4,15	0,315	0,204	0,123	4,68	0,240
–0,05	4,33	0,328	0,213	0,128	4,86	0,249
0,00	*4,49*	*0,340*	*0,221*	*0,133*	*5,00*	*0,256*
0,05	4,61	0,349	0,227	0,136	5,10	0,261
0,10	4,70	0,356	0,231	0,139	5,15	0,264

A *7. táblázatban* a leszámítolás erősödésének hatását vizsgáljuk. Minél erősebb a leszámítolás (minél kisebb a leszámítolási együttható), annál kisebb mindkét ingatlanoptimum és a két törlesztőrészlet-sorozat. Például leszámítolás nélkül a két ingatlanoptimum rendre 4,88 és 5,44, erős, $\delta = 0{,}96$ leszámítolásnál csak 4,20 és 4,69 évnyi jövedelem.

7. táblázat
A leszámítolási együttható hatása a két ingatlanoptimumra és a két törlesztési pályára ($g = 1{,}03$, $p = 1{,}04$)

Leszámítolási együttható	Hagyományos törlesztés				Indexált törlesztés	
	ingatlan-optimum	kezdő	átlagos	záró	ingatlan-optimum	törlesztő-részlet
		törlesztőrészlet				
δ	D_0°	b_1°	$\mathbf{E}\, b^\circ$	b_T°	d_0°	b°
1,00	4,88	0,370	0,240	0,144	5,44	0,279
0,98	*4,49*	*0,340*	*0,221*	*0,133*	*5,00*	*0,256*
0,96	4,20	0,318	0,207	0,124	4,69	0,240

A *8. táblázatban* a reálkamatláb emelkedésének hatását vizsgáljuk. Az alapsorból indulva, 2 helyett 4 százalékos reálkamatláb esetén mindkét ingatlanoptimum észrevehetően csökken, és a törlesztőrészletek hasonlóan emelkednek.

8. táblázat
A reálkamatláb hatása a két ingatlanoptimumra és a két törlesztési pályára
($g = 1{,}03$, $p = 1{,}04$, $\delta = 0{,}96$)

Reálkamatláb *100*$(r-1)$ (százalék)	Hagyományos törlesztés				Indexált törlesztés	
	ingatlan-optimum	kezdő törlesztőrészlet	átlagos törlesztőrészlet	záró törlesztőrészlet	ingatlan-optimum	törlesztő-részlet
	D_0°	b_1°	$\mathbf{E}\,b^\circ$	b_T°	d_0°	b°
2	*4,49*	*0,340*	*0,221*	*0,133*	*5,00*	*0,256*
3	4,30	0,359	0,233	0,140	4,77	0,274
4	4,12	0,376	0,244	0,147	4,55	0,291

Végül a *9. táblázatban* a tervezési időtáv hatását vizsgáljuk. Látható, hogy amint alulról felfelé haladva rövidül az időtáv, úgy csökken mindkét eljárás ingatlanoptimuma és ennek megfelelően a törlesztőrészlet.

9. táblázat
A tervezési időtáv hatása a két ingatlanoptimumra és a két törlesztési pályára
($g = 1{,}03$, $p = 1{,}04$, $\delta = 0{,}98$)

Időtáv (év)	Hagyományos törlesztés				Indexált törlesztés	
	ingatlan-optimum	nyitó	átlagos	záró	ingatlan-optimum	törlesztés
Z	D_0°	b_1°	$\mathbf{E}\,b^\circ$	b_T°	d_0°	b°
30	4,14	0,314	0,204	0,122	4,59	0,235
40	4,30	0,326	0,212	0,127	4,78	0,245
50	4,41	0,334	0,217	0,130	4,91	0,251
60	*4,49*	*0,340*	*0,221*	*0,133*	*5,00*	*0,256*

Kézenfekvő, hogy a tanulmány továbbfejlesztésében meg kell vizsgálni, mennyire érzékenyek eredményeink további paraméterek változására, például a κ relatív ingatlanérték és a γ kockázatkerülési együtthatóra.

Következtetések

Minimodellünkben visszatértünk a Király Júliával korábban vizsgált kérdésre: hogyan érdemes a hagyományos hiteltörlesztési pályát hozzáilleszteni az inflációhoz? Számos egyszerűsítő feltevést tettünk: nullának vettük az önrészesedést, figyelmen kívül hagytuk az egyéb megtakarításokat, elfeledkeztünk az ingatlan és az egyéb fogyasztás kölcsönhatásáról. További megszorítás: állandó inflációt és kamatlábat feltételeztünk; ha ezt feloldjuk, akkor a banknak időnként módosítania kell a törlesztőrészletnek akár a nominális, akár a reálértékét. Gyorsan növekvő reáljövedelem esetén elkerülhetetlen az ingatlancsere modellezése. Hasonlóan vizsgálni kell a reáljövedelem vártnál lassabb növekedését, sőt váratlan csökkenését is. Úgy érzem, hogy minden hiányossága ellenére modellünk valószínűsíti az indexált jelzálogtörlesztés gyakori fölényét a hagyományossal szemben. Persze óvatlan alkalmazása visszaüthet, de még mindig jobbnak tűnik, mint a devizaalapú hitelek vagy a kamattámogatás. A költségvetés szerepe közömbösnek tűnik.

Hivatkozások

Banai, Á., Berlinger, E., & Dömötör, B. (2022). *Adjustable-rate mortgages in the era of global reflation: How to model additional default risk?* PLOS One. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0263599

Berlinger, E. (2009). An efficient student loan system: Case study of Hungary. *Higher Education in Europe, 34*(2), 257–267. https://doi.org/10.1080/03797720902867542

Berlinger, E. (2019). The risks of variable interest rates: A case study of mortgage lending in Hungary from 2004–2018. In B. Bodzási (Ed.), *Foreign currency lending in Hungary: A legal and economic analysis of foreign currency lending* (pp. 35–54). Corvinus University of Budapest.

Berlinger, E., & Walter, Gy. (2013). Egy unortodox javaslat a deviza- és forintalapú jelzáloghitelek rendezésére. *Hitelintézeti Szemle, 12*, 469–494.

Bodzási, B. (Ed.) (2019). *Foreign currency lending in Hungary: A legal and economic analysis of foreign currency lending.* Corvinus University of Budapest.

Boutros, M., Clara, N., & Kartashova, K. (2025). *The value of mortgage choice: Payment structure and contract length.* Mimeo. https://www.michaelboutros.com/papers/MortgageChoiceModel.pdf

Buckley, R., Lipman, B., & Persaud, T. (1993). Mortgage design under inflation and real wage uncertainty: The use of a dual index instrument. *World Development, 21*(3), 455–464. https://doi.org/10.1016/0305-750x(93)90157-5

Campbell, J. Y., & Cocco, J. F. (2003). Household risk management and optimal mortgage choice. *Quarterly Journal of Economics, 118*(4), 1449–1494. https://doi.org/10.1162/003355303322552847

Campbell, J. Y., & Cocco, J. F. (2015). A model of mortgage default. *Journal of Finance, 70*(4), 1495–1554. https://doi.org/10.1111/jofi.12252

Incze, Zs. (2025). Alternatíva a jövőbeli hitelezésben: Jövedelmi pályákhoz igazodó törlesztőrészletek. *Hitelintézeti Szemle, 24*(3), 98–124. https://doi.org/10.25201/HSZ.24.3.98

Király, J., & Simonovits, A. (2015). Jelzáloghitel-törlesztés forintban és devizában – egyszerű modellek. *Közgazdasági Szemle, 62*(1), 1–26. https://www.kszemle.hu/tartalom/cikk.php?id=1531

Kovács, L., & Nagy, E. (2020). Életciklus és törlesztőrészlet: A reálértékben állandó törlesztőrészlet és életciklus-jövedelem alkalmazhatósága a lakáshitelezésben. *Közgazdasági Szemle, 67*(10), 1029–1056. https://doi.org/10.18414/KSZ.2020.10.1029

Kovács, L., & Pásztor, Sz. (2018). A globális jelzálogpiac helyzete és kihívásai. *Közgazdasági Szemle, 65*(12), 1225–1256. https://doi.org/10.18414/ksz.2018.12.1225

Lessard, D., & Modigliani, F. (Eds.) (1975). *New mortgage designs for stable housing in an inflationary environment.* Federal Reserve Bank of Boston Conference, January 1975.
Modigliani, F. (1974). Some economic implications of the indexing of financial assets with special reference to mortgages. In M. Monti (Ed.), *The "New Inflation" and Monetary Policy.* Palgrave Macmillan.
Simonovits, A. (1991). Az 1991. évi lakáshitel-törlesztés matematikája. *Közgazdasági Szemle, 38*(7-8), 755–763.

Függelék

1. függelék: Két időszakos elemzés

Talán nem felesleges a legegyszerűbb két időszakos ($T=2$) modellben bemutatni az alapösszefüggéseket, mindenekelőtt azt, hogy az infláció fix reáljövedelem esetén is csökkenti a hagyományos törlesztés nyújtotta életszínvonalat. Föltesszük, hogy a reálkamatláb nulla: $r=1$, azaz a nominális kamatláb egyenlő az inflációs rátával: $R-1=p-1$. Először rögzítjük a D_0 ingatlanértéket. A hagyományos törlesztés (amely függ az árindextől) és az inflációtól független indexált törlesztés képlete rendre

$$B(p)=\frac{D_0p^2}{p+1} \quad \text{és} \quad B(1)=\frac{D_0}{2}.$$

Áttérve a reálértékre:

$$b_1(p)=\frac{D_0p}{p+1} \quad \text{és} \quad b_2(p)=\frac{D_0}{p+1}<b_1(p).$$

Összeadva a két reáltörlesztést, a nulla reálkamat miatt visszakapjuk az ingatlan értékét: $b_1(p)+b_2(p)=D_0$, maga után vonva a $b_2'(p)=-b_1'(p)$ összefüggést.
Elegendő csak a fogyasztás életpálya-hasznosságára szorítkoznunk:

$$v(p)=u\big(y-b_1(p)\big)+u\big(y-b_2(p)\big).$$

Belátjuk, hogy $v'(p)<0$, tehát $v(p)<v(1)$, ha $p>1$.

Valóban, $v'(p)=-u'\big(y-b_1(p)\big)b_1'(p)-u\big(y-b_2(p)\big)b_2'(p)$.

Tudjuk, hogy $c_1(p)<c_2(p)$, tehát $u'\big(c_1(p)\big)>u'\big(c_2(p)\big)$, ebből adódik, hogy $v'(p)<0$.

Ha D_0 értéke is választható, akkor a hagyományos törlesztés ingatlanoptimumát kicsit emelve, az indexált törlesztésnél kicsit csökkentve az optimális fogyasztást, mind a fogyasztás, mind az ingatlan hasznossága nagyobb marad, mint a hagyományosé.

2. függelék: Egzogén időbeli változások kezelése

A főszövegben feltettük, hogy az inflációs ráta időben állandó. Most feloldjuk ezt a feltevést (Simonovits, 1991). Legyen p_t a t-edik év inflációs szorzója, $P_t = P_{t-1}\, p_t$ pedig a t-edik év árszintje a 0. évhez képest. Bevezetve az $R_t - 1$ változó kamatlábat, amelyet egy évre a bank előre lát, a hagyományos törlesztés két alapegyenlete:

$$D_t = R_t D_{t-1} - B_t, \qquad t = 1, 2, \ldots, T, \tag{1'}$$

ahol D_t a t-edik év végi tartozás, a t-edik időszaki törlesztés pedig a naiv várakozáson alapuló

$$B_t = \beta_t D_t, \quad \text{ahol} \quad \beta_t = \frac{R_t - 1}{1 - R_t^{-T+t}}, \qquad R_t > 1. \tag{2'}$$

Kitérő: 1991-ben a Magyarországon terjesztett világbanki szakértői anyagban, amelyet az OTP akkori szakértői megmutattak nekem is, tökéletes előrelátás szerepelt, s ez jogosan csökkentette az anyag vonzerejét.

A reálváltozók definíciója értelemszerűen módosult:

$$b_t = \frac{B_t}{P_t} \quad \text{és} \quad d_t = \frac{D_t}{P_t}, \qquad t = 1, 2, \ldots, T, \tag{3'}$$

és

$$d_t = \frac{R_t}{p_t} \frac{D_{t-1}}{P_{t-1}} - \frac{B_t}{P_t}, \qquad t = 1, 2, \ldots, T.$$

Általánosítva a reálkamatszorzó $r = R_t / p_t$ képletét, a reáldinamika:

$$d_t = r d_{t-1} - b_t, \qquad t = 1, 2, \ldots, T. \tag{4'}$$

A valóságban a reálkamatláb is változik, de sokkal lassabban, mint a nominális, ezért ettől a bonyodalomtól eltekintünk. Az indexált törlesztés egyenletei változatlanok. Fel kell adnunk azonban a reáljövedelmek állandó növekedési ütemének feltevését.