

NAGY TAMÁS

## A villamos erőművek szén-dioxid-kibocsátásának modellezése reálopciók segítségével

A szerző egy, a szennyezőanyag-kibocsátás európai kereskedelmi rendszerében megfelelésre kötelezett gázturbinás erőmű szén-dioxid-kibocsátását modellezi négy termékre (völgy- és csúcsidejű áramár, gázár, kibocsátási kvóta) vonatkozó reálopciók segítségével. A profitmaximalizáló erőmű csak abban az esetben termel és szennyez, ha a megtermelt áramon realizálható fedezete pozitív. A jövőbeli időszak összesített szén-dioxid-kibocsátása megfeleltethető európai típusú bináris különbözetopciók összegének. A modell keretein belül a szén-dioxid-kibocsátás várható értékét és sűrűségfüggvényét becsülhetjük, az utóbbi segítségével a szén-dioxid-kibocsátási pozíció kockázatosított értékét határozhatjuk meg, amely az erőmű számára előírt megfelelési kötelezettség teljesítésének adott konfidenciaszint melletti költségét jelenti. A sztochasztikus modellben az alaptermékek geometriai Ornstein–Uhlenbeck-folyamatot követnek. Ezt illesztette a szerző a német energiatőzsdéről származó publikus piaci adatokra. A szimulációs modellre támaszkodva megvizsgálta, hogy a különböző technológiai és piaci tényezők *ceteris paribus* megváltozása milyen hatással van a megfelelés költségére, a kockázatosított értékére.

Journal of Economic Literature (JEL) kód: G13, C15, L94, Q54.

A szennyezőanyag-kibocsátás európai kereskedelmi rendszere (*EU emissions trading system, EU ETS*) a világ első nemzetközi, szén-dioxid-kibocsátási egységeket forgalmazó rendszere. Évente hozzávetőlegesen kétmilliárd tonna szén-dioxid-kibocsátását fedi le, 10 500 létesítményre vonatkozóan az Európai Unió 27 országában és a három társult államban (Izland, Liechtenstein, Norvégia). Az EU ETS-ben az államok évente felülről meghatározzák a kibocsátható mennyiséget, és ennek megfelelő számú kvótát juttatnak a résztvevőknek. A szén-dioxid-kibocsátási egység szabadon kereskedhető, ezzel biztosítható, hogy ott valósul meg a kibocsátáscsökkenés, ahol azt a legalacsonyabb költséggel lehet elérni. Ha egy cég a piacon többet kap a kvótáért, mint amennyit keres a szennyezést okozó tevékenységgel, csökkenti termelését, és eladja a feleslegessé váló kibocsátási egységet. Amennyiben a kvóta áránál több hasznot tud realizálni szennyezéssel járó tevékenységével, növeli termelését (s ezen keresztül szennyezését), és kvótát vásárol. A rendszer ala-

csony tranzakciós költségek és informált piaci szereplők esetén biztosítja a társadalmi optimum elérését.

A jelenlegi rendszerben a kezdeti kvótamennyiség túlnyomó részét a hatóság ingyenesen, minden év február végéig adja át a szereplőknek. A vállalat tényleges kibocsátásáról a következő év március 31-éig köteles jelentést tenni, egy hónapon belül (április 30-ig) pedig a megelőző év kibocsátásával megegyező mennyiségű kvótát kell visszaadnia az illetékes hatóságnak. Meg nem felelés esetén (a vállalat nem tudja kibocsátását lefedni kibocsátási egységekkel) egyrészt továbbgörgetik az adott évi hiányát (a következő évben levonják a rendelkezésre álló kvotáiból), másrészt tonnáként 100 euró büntetést (a próbaidőszakban 40 eurót) kell fizetnie.

A kibocsátáskereskedelmi rendszer legnagyobb iparága a szén-dioxid-kibocsátás közel 60 százalékáért felelős villamosenergia-szektor. A kvótaár a piaci viszonyok függvényében változik, a jövőbeli kibocsátás pedig több bizonytalan tényező függvénye. Az erőművek számára fontos, hogy megfelelően becsüljék várható kibocsátásukat, hogy dönthessenek az adott időpontban számukra szükséges kvótamennyiségről. A cikkben a témához kapcsolódó fontosabb hazai és nemzetközi publikációk áttekintését követően egy gázturbinás erőműre vonatkozó reálopciók modell segítségével előre jelezzük a kibocsátás várható értékét és sűrűségfüggvényét, valamint kiszámítjuk a megfelelési kötelezettség költségeinek az adott konfidenciaszint melletti maximális értékét (a kibocsátandó kvótapozíció kockáztatott értékét). A befejező részben megvizsgáljuk, hogy milyen hatással vannak a különböző technológiai és piaci tényezők változásai a kapott eredményekre.

## Szakirodalmi áttekintés

Magyar szerzők közül *Dobos* [2002] a kereskedhető szennyezési jogok rendszerének vállalatokra vonatkozó hatását vizsgálta standard mikroökonómiai (árelfogadó, profitmaximalizáló) komparatív statikai modellel. A modell alapján arra a következtetésre juthatunk, hogy a vállalat akkor éri el a legnagyobb nyereséget, ha hatékonyságnövelő és szennyezéscsökkentő beruházásokat egyaránt megvalósít. *Lesi-Pál* [2004] elsősorban a hatékony szabályozással és a szabályozás hazai erőművekre vonatkozó hatásával foglalkozott. A modell szerint a magyar vállalatok várhatóan nettó eladók lesznek: az európai kvótapiacra értékesítik ki nem használt kvotáikat évente 2,7–6,1 millió tonna mennyiségben. A befolyó bevételek lehetővé teszik, hogy finanszírozzák karbonberuházásaikat. Az államnak váratlan profitot nem okozó járadéksemleges allokáció alkalmazása révén évente 4–7 millió tonna szén-dioxid-kvótát kell visszatartania és értékesítenie, mellyel 2008 és 2012 között évente 5–35 milliárd forint többletbevételt érhet el. *Delarue és szerzőtársai* [2008] az üzemanyagváltással elérhető rövid távú kibocsátáscsökkentés lehetőségeit elemzi az európai villamosenergia-szektorban. Az elemzést az E-Simulate modellre támaszkodva végezték el a szerzők, amelyet a Leuveni Egyetemen fejlesztettek ki. A modell az egyes erőművek villamosenergia-termelését órákra bontva szimulálja egyéves ciklusra. A szimulációs eredményekből megállapítható, hogy a kibocsátáscsökkentés nemcsak

a kvóta áráról függ, hanem sokkal jelentősebb mértékben a rendszer terhelésének mértékétől és a gáz és szén árának arányától. A becslések alapján a szennyezőanyag-kibocsátás 2005-ben 35 millió, 2006-ban 19 millió tonnás csökkentése az alacsonyabb szénintenzitású tüzelőanyagra (gáz) való átállásnak volt köszönhető.

*Herbelot* [1994] reálopciók modellel vizsgálja az áramtermelő vállalat döntését. Az egyik példában egy széntüzelésű erőművet tételez fel, amelynek meg kell felelnie a tiszta levegő törvénye (*Clean Air Act*) kén-dioxid-kibocsátásra vonatkozó szabályozásának. A szerző binomiális modellel számította ki az alacsonyabb kéntartalmú szénre való áttérés, illetve csővégi kibocsátást megkötő berendezés telepítésének opcióárait. Megvizsgálta, hogy különböző tényezők milyen mértékben befolyásolják az opciók értékét. *Laurikka* [2006] sztochasztikus, reálopciót tartalmazó szimulációs modellt alkotott, amelyben az EU ETS hatását vizsgálja egy kombinált ciklusú (IGCC) erőműre. Megállapítja, hogy a *diszkontált cash flow* módszer nem alkalmas az ilyen típusú beruházások értékelésére, mivel az EU ETS jelentős mértékű kockázatot hordoz, és számos reálopciók szituációt tartalmaz. *Abadie–Chamorro* [2008] egy széntüzelésű erőművet elemez, amelynek lehetősége van arra, hogy befektessen szén-dioxid-megkötő (CCS) technológiába. Kétdimenziós binomiális modell segítségével elemzi az optimális befektetési döntést. *Hlouskova és szerzőtársai* [2005] liberalizált energiapiacra termelő erőmű reálopciók modellel az erőmű értékelésére, valamint az eredmény kockázati profiljának meghatározására szolgál. A szerzők modelljükben nem számoltak a kibocsátási kvóta költségeivel, viszont figyelembe vették a különböző technikai korlátozó tényezőket (minimális üzemelési és pihenési idő, alsó és felső kapacitáskorlát, indítási és leállítási idő, valamint költségek). Az optimális üzemelési naptár megoldásához dinamikus sztochasztikus programozást, valamint Monte-Carlo-szimulációt használtak fel.

Szintén a témához kapcsolhatók a reálopciók módszer külföldi (*Dixit–Pindyck* [1994] és magyar szerzőktől (*Bélyácz* [2011])) származó alapművei.

## A reálopciók modell

A továbbiakban tekintsünk egy áramtermelő vállalatot, amely gázt elégetve elektromos áramot termel, és a termelés során keletkező szén-dioxid-kibocsátása az EU ETS szabályozása alá tartozik. Továbbá tegyük fel, hogy:

- a vállalat technológiai paraméterei (alkalmazott fűtőanyag, hatékonyság, szénintenzitás) a vizsgált intervallumban állandók,
- a vállalat árelfogadó, azaz a termék (villamos energia) és erőforrás (gáz, kvóta) árak exogén tényezők, azokra a vállalatnak semmilyen hatása nincs,
- a piacok kellően likvidek és nulla tranzakciós költséűek,
- az elektromos áram ára az adott nap völgy- és csúcsidőszakán belül állandó,
- a vállalat a megtermelt energiát azonnal értékesíti, a szükséges erőforrást a vállalat az azonnali piacról szerzi be (tehát nem készletez),
- a technológiai korlátok hatása elhanyagolható, azaz a modellben többek között nem vesszük figyelembe a minimális terhelési szint, az erőmű hatékonysági görbéje,

a minimális üzemelési és minimális állási idő, a felfutási és kikapcsolási idő, valamint az indítási és leállítási költségek hatását,

– a vállalat szén-dioxid-kibocsátása a termelés egyenes, technológiai paraméterek által determinált következménye (a vállalat nem alkalmaz szabadon be-, illetve kikapcsolható csövégi tisztítási technológiát). Ha a vállalat termel, szén-dioxidot bocsát a légkörbe, ha áll, a kibocsátás nulla.

A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogyan döntenek egy racionális erőmű generátorának működtetéséről az áramár, a nyersanyagár és a technológiai paraméterek függvényében.

A villamos energiát termelő erőmű egy feltételes konverziós eszköz, ami termelési döntéstől függően – feltételesen működve – állít elő az inputokból (gáz és kibocsátási kvóta) outputot (villamos energia). A rövid távú profitmaximalizáló döntés szempontjából a fix költségek nem relevánsak. A lényegi változó költségeket a döntési modellben háromfelé bontottuk, a vállalati különbözet (spread, fedezet) a következők szerint számolható:

$$\begin{aligned} \text{KÜLÖNBÖZET} = & \text{MEGTERMELT ENERGIA ÁRBEVÉTELE} - \text{SZÜKSÉGES} \\ & \text{ENERGIAHORDOZÓ KÖLTSÉGE} - \text{SZÜKSÉGES KIBOCSÁTÁSI} \\ & \text{EGYSÉGEK KÖLTSÉGE} - \text{EGYÉB VÁLTOZÓ KÖLTSÉGEK} \end{aligned} \quad (1)$$

Legyen  $\eta$  az erőmű *termikus hatékonysága*, ami megmutatja, hogy az erőmű egységnyi bemenő fajhőből mennyi villamos energiát hoz létre. Ennek értéke nulla és egy közé esik (a magasabb érték mutatja a hatékonyabb erőművet, dimenziója: százalék). Mutassa  $\delta$  a tüzelőanyag *szénintenzitását*, azaz, hogy adott energiahordozó elégetése során mekkora mennyiségű szén-dioxid szabadul fel (dimenziója  $\text{tCO}_2/\text{MWh}$ ). Amennyiben az árakat  $S$  (pow: áram, gas: gáz, eua: kibocsátási egység), az *egyéb változó költség* tagot  $v$  jelöli, akkor az egységnyi megtermelt energiára jutó különbözet (*spread*) a következő lesz:

$$\text{Spread} = S_{\text{pow}} - S_{\text{gas}}/\eta - S_{\text{eua}} \times \delta/\eta - v. \quad (2)$$

Az árkülönbözet képletében az egységnyi megtermelt villamos energiára jutó tüzelőanyag-költséget úgy kaphatjuk meg, hogy a gázarat elosztjuk a termikus hatékonysággal. A kvóta esetében a  $\delta/\eta$  szorzó azt mutatja, hogy egységnyi output előállításához mekkora mennyiségű szén-dioxid kibocsátásával jár.

Az energiapiacra az árkülönbözet többféle fogalma terjedt el (részletesen lásd *Alberola-Chevallier-Cheze* [2008]). A megnevezések egyrészt abból a szempontból térnek el, hogy szén- vagy gáztüzelésű erőműre vonatkoznak (előbbi *dark*, utóbbi *spark*), másrészt abból, hogy figyelmen kívül hagyják, vagy számításba veszik a kibocsátás fedezéséhez szükséges kvótamennyiség beszerzésének költségeit (az utóbbi esetében az elnevezés kap egy *clean* előtagot). Így négy különböző fogalom terjedt el a szakmában: *dark spread*, *spark spread*, *clean dark spread*, *clean spark spread*. A levezetett különbözet a szükséges kvótamennyiség-beszerzési költségeket tartalmazó gáz (*clean spark*) *spreaddel* egyezik meg, annyi különbséggel, hogy egyrészt szerepel

benne egy egyéb változó költséget tartalmazó tag, másrészt adott technológiájú erőműre vonatkozik.

A haszonmaximalizáló vállalat csak abban az esetben termel, ha a realizálható különbözet pozitív, ellenkező esetben jobban jár, ha szünetelteti a termelését. Az egyéni megtermelt energiára vetített profitfüggvény ( $\pi$ ) a fedezetből származtatható:

$$\pi = \max(\text{spread}, 0) = \max(S_{\text{pow}} - S_{\text{gas}}/\eta - S_{\text{eua}} \times \delta/\eta - \nu, 0). \quad (3)$$

A feltételes érték az opciók kifizetésfüggvényével egyezik meg. Az opciós megfeleltetés lehetővé teszi számunkra, hogy a feltételes követelések árazására kidolgozott sztochasztikus pénzügyi eszköztár segítségével árazni tudjuk a reáleszközöket, valamint modellezni tudjuk a döntési helyzeteket.

A profitmaximalizáló módon üzemeltetett erőmű csak akkor termel, amennyiben a jövőbeli azonnali árak alapján számított árkülönbözet (*spread*) pozitív. A profitmaximalizáló működésre vonatkozó feltételből le tudjuk vezetni a vállalat emisszióját is. Hozzunk létre egy Bernoulli típusú kétértékű (0/1) termelési döntési változót ( $\Lambda$ ) a következők szerint:

$$\Lambda(\tau) := \begin{cases} 1, & \text{ha } \text{spread}(\tau) > 0 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}. \quad (4)$$

Ha az árkülönbözet pozitív, a vállalat termelésével profitot realizálhat, az erőmű működik ( $\Lambda = 1$ ) és szén-dioxidot bocsát a légkörbe; ha az árkülönbözet negatív, a vállalat termelés esetén veszteséget realizálna, emiatt kapacitásait nem működteti ( $\Lambda = 0$ ), és kibocsátása nulla. A  $\Lambda$  valószínűségi változó feltételes értéke megegyezik egy (a különbözetre vonatkozó) európai típusú bináris opció kifizetésfüggvényével ( $bno^{py}$ ), aminek  $\tau$  a lejárat és  $\nu$  a kötési árfolyama,  $S(0)$  vektorral az alaptermékek kiinduláskori árfolyamait jelöljük,  $\bar{w}$  vektorral pedig a súlyokat:

$$\Lambda(\tau) = bno^{py}(\bar{S}(0), \mathbf{w}, \nu, \tau) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \bar{w}'\bar{S}(\tau) > 0 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases},$$

$$\text{ahol } \bar{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/\eta \\ -\delta/\eta \end{bmatrix}, \quad \bar{S}(0) = \begin{bmatrix} S_{\text{pow}}(0) \\ S_{\text{gas}}(0) \\ S_{\text{eua}}(0) \end{bmatrix}. \quad (5)$$

A jövőbeli  $\tau$  időpontra vonatkozó termelés valószínűsége megegyezik annak a valószínűségével, hogy az akkori árrés pozitív:

$$E[\Lambda(t)] = P[\text{spread}(\tau) > 0] \times 1 + P[\text{spread}(\tau) \leq 0] \times 0 = P[\text{spread}(\tau) > 0]. \quad (6)$$

Az opciós analógia segítségével megadható a termelés valószínűsége (a termelési döntési változó várható értéke). Az opció értéke a várható kifizetés jelenértéke, emiatt a kifizetés várható értéke az opció árának jövőértéke. A termelési valószínűséget megkaphatjuk az opció árának ( $bno^{py}$ ) kamatokkal számított értékéből:

$$E[\Lambda(t)] = e^{r^*t} b n o^{pr} (\overline{S(0)}, \bar{w}, v, \tau). \quad (7)$$

Az opció kockázatmentes értékelése az arbitrázsmentes árazás elvein alapul. Amennyiben a feltételes követelés tökéletesen replikálható, előállítható egy kockázatmentes portfólió, amelynek hozama a kockázatmentes kamatláb. Ha a feltételek nem állnak fenn, akkor ez az elv nem használható, és a fizikai mérték segítségével kell a valószínűségeket számolni, valamint a kockázati preferenciáknak megfelelő kamatlábbal kell diszkontálni.<sup>1</sup> A szén-dioxid-kibocsátás mennyisége nem piacon kereskedett termék, ezért az arbitrázsmentes árazás feltételei nem állnak fenn. Emiatt a képletben a kockázati felárat tartalmazó kamatláb szerepel ( $r^*$ ).

A jövőbeli napra vonatkozó kibocsátás  $Q(\tau)$  mennyisége származtatható a  $\Lambda(\tau)$  döntési változó, a  $\Gamma$  napi maximális kapacitás, a  $\delta$  tüzelőanyag szénintenzitás és az  $\eta$  termikus hatékonyság segítségével:

$$Q(\tau) = \Lambda(\tau) \times \Gamma \times \delta / \eta. \quad (8)$$

#### Az alkalmazott négytermékes modell bemutatása

A valóságban a villamos energiát nem, illetve csak magas költségek mellett lehet tárolni. A termelést a gyakorlatban a várható és az aktuális kereslethez igazítják, az azonnali árat napon belül órás bontásban jegyzik. Erős szezonalitást figyelhetünk meg a villamos energia áralakulásában (*Marossy [2011]*). Az áramár napon belül a gazdasági aktivitás szerint változik: a nappali csúcsidőszakban a kiemelkedő fogyasztás miatt áremelkedés, az esti órákban az alacsony igénybevétel miatt jelentős mértékű árcsökkenés tapasztalható. Az alacsony keresletű völgyidőszakban jellemezően azok az erőművek üzemelnek, amelyek alacsonyabb fajlagos költséggel tudják előállítani az elektromos áramot. Hátrányuk, hogy ezek általában kevésbé rugalmasak (a be- és kikapcsolás jelentős időt és többletráfordítást igényel). A magas keresletű csúcsidőszakban a növekvő kereslet miatt azok az erőművek is bekapcsolódnak, amelyek magasabb költséggel, de igény szerinti ütemezésben tudják előállítani a villamos energiát. Ezek közé tartozik a modellezett gázturbinás erőmű.

A valóságos helyzet pontosabb közelítése érdekében a háromtermékes (áram, gáz, kibocsátási kvóta) modellt négytermékesre terjesztettük ki, amiben a napot két egyenlő részre osztottuk: a csúcsidőszak a legnagyobb keresletű és emiatt magasabb árú órákat tartalmazza 8 és 20 óra között, a völgyidőszak az alacsonyabb keresletű és ezért alacsonyabb árú időszakot fed le 20 és 8 óra között. A modellben a gáz és kibocsátási kvóta ára a napon belül állandó. A négytermékes modell előnye, hogy segítségével jobban közelíthetjük a gázturbinás erőmű valóságos döntési

<sup>1</sup> A fizikai és a kockázatmentes mértékkel kapcsolatos megfontolásokat részletesebben lásd *Medvegyev [2009]*.

helyzetét, amiben a jövőbeli piaci helyzet és erőforrások függvényében a völgyidőszakban jellemzően pihen, a csúcsidőszakban a magasabb áramár következtében működik.

Egy jövőbeli  $\tau$  naphoz kötődő árkülönbözet kifejezhető az  $S(\tau)$  jövőbeli azonnali árak függvényében. A négytermékes modellben a csúcsidőszaki (*peak*) és völgyidőszaki (*off-peak*) különbözete a következők lesznek:

$$\begin{aligned} \text{spread}_{\text{peak}}(\tau) &= S_{\text{peak}}(\tau) - S_{\text{gas}}(\tau)/\eta - S_{\text{eua}}(\tau)\delta/\eta - v. \\ \text{spread}_{\text{off-peak}}(\tau) &= S_{\text{off-peak}}(\tau) - S_{\text{gas}}(\tau)/\eta - S_{\text{eua}}(\tau)\delta/\eta - v. \end{aligned} \quad (9)$$

A  $\tau$  naphoz tartozó jövőbeli kibocsátás várható értéke a következő lesz:

$$\begin{aligned} E[Q(\tau)] &= \Gamma/2 \times \delta/\eta \times e^{r\tau} \left[ bno^{pr} \left( \overline{\mathbf{S}_{\text{off-peak}}(0)}, \mathbf{w}, v, \tau \right) + bno^{pr} \left( \overline{\mathbf{S}_{\text{peak}}(0)}, \mathbf{w}, v, \tau \right) \right], \\ \text{ahol } \overline{\mathbf{S}_{\text{off-peak}}(0)} &= \begin{bmatrix} S_{\text{pow}}^{\text{off-peak}}(0) \\ S_{\text{gas}}(0) \\ S_{\text{eua}}(0) \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{S}_{\text{peak}}(0)} = \begin{bmatrix} S_{\text{pow}}^{\text{peak}}(0) \\ S_{\text{gas}}(0) \\ S_{\text{eua}}(0) \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/\eta \\ -\delta/\eta \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

Egy hosszabb,  $T$  időpontig terjedő időszak várható teljes kibocsátása [jelölje  $Q_c(0, T)$ ] pedig a következő képlet szerint számolható:

$$\begin{aligned} E[Q_c(0, T)] &= \Gamma/2 \times \delta/\eta \times \sum_{\tau=1}^T e^{r\tau} \left[ bno^{pr} \left( \overline{\mathbf{S}_{\text{off-peak}}(0)}, \bar{\mathbf{w}}, v, \tau \right) + \right. \\ &\left. + bno^{pr} \left( \overline{\mathbf{S}_{\text{peak}}(0)}, \bar{\mathbf{w}}, v, \tau \right) \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

A reálopciók modelljét a kibocsátás származtatásán kívül használhatjuk erőmű-értékelési problémák megoldására, valamint választ kaphatunk arra a kérdésre, hogy milyen fedezeti ügyleteket kell év közben az erőműnek végrehajtania kockázatának minimalizálása érdekében. Ezeknek az eredményeknek az ismertetése meghaladja a cikk kereteit, a kapott összefüggések egy későbbi tanulmány tárgyai.

A várható kibocsátás számításához a különbözet- (*spread*) opciókat kell árazni, amik az európai vaníliavételi opciókhoz (részletesebben lásd Hull [1999] 301–303. o., Benedek [1999], valamint Száz–Király [2005]) képest további kérdések megoldását igénylik. A továbbiakban röviden áttekintjük a lehetséges árazási módszereket.

## A különbözetopciók árazása

A különbözetopciók széles körben elterjedt derivatív instrumentumok, egyaránt használják kockázatkezelési, eszközértékelési, spekulációs célokra. A legegyszerűbb különbözetopciót két eszköz árának különbségére (*spread*) írják ki. Tulajdonosának joga van arra, hogy az opció lehívása esetén a  $K$  kötési árfolyamot fizetve jusson hozzá a két eszköz árának különbségéhez. Másként megfogalmazva: az opció tulajdonosának joga van arra, hogy a két eszközt előre rögzített  $K$  kötési árfolyam mellett

elcserélje. A tengerentúli árutőzsdéken nagy tételben kereskedett származtatott termékek a szójaolaj és zsírtalanított szója, vagy a nyersolaj és benzin árának különbségére vonatkozó opciók. Az energiapiacra a spark spreadre, az elektromos áram és gázár különbségére szóló opciók kereskedése terjedt el.

A különbözetopciók árazásánál a legnagyobb probléma, hogy az általában logaritmikusan normálisnak feltételezett eszközárak összegének eloszlása nem lognormális, zárt analitikus formulával nem írható le. A téma (a lognormálisok összege) *Fenton* [1960] cikk publikálásától számítva több mint 50 éve a matematikusok, mérnökök és pénzügyi szakemberek érdeklődésének középpontjában áll. A mérnöktudományokban számtalan probléma leírása lognormális modellben történik (árnyékoló hatás, adótoronyok távolságarányos intenzitásának csökkenése). A pénzügyekben a lognormális eloszlású eszközökből álló portfólió eredő hozamára sokszor feltételeznek normalitást (például a modern portfólióelméletben *Markowitz* [1952]). A normális eloszlás feltételezése a korrelációs struktúrától és a súlyoktól függően a valószínűséghez képest jelentős mértékű torzítást eredményezhet.

Részen ennek a problémának tudható be, hogy a különbözet (és kosár) opciók árazása a sztochasztikus pénzügyek egyik legtöbb kihívást jelentő területe. Zárt képletet eddig csak arra az esetre tudtak adni, amikor két eszközt tételünk fel, és a kötési árfolyam nulla (*Margrabe* [1978]). Általánosabb esetekre nem rendelkezünk analitikus megoldással. A kutatók numerikus integrálási eljárásokkal, többdimenziós famódszerekkel, szimulációval és különféle analitikus közelítésekkel próbálják árazni a különbözetre szóló opciókat. A numerikus módszerek hátránya, hogy nem adnak zárt képletet az opció értékére. Erre egyrészt a gyorsaság miatt lenne szükségünk, másrészt a zárt képletből viszonylag könnyen (parciális deriválással) származtathatók a különböző tényezőkre vonatkoztatott érzékenységek (a görög *betűk*). Az egyik leggyakrabban hivatkozott és a kereskedők által gyakrabban használt módszer a *Kirk* [1995] által alkalmazott közelítés, ami két eszközből álló különbözetopció árára ad közelítő megoldást. *Carmona–Durrleman* [2003] egy viszonylag pontos árazási módszert fejlesztett ki, ami viszont többdimenziós nemlineáris egyenletrendszer numerikus megoldását igényli. Az eljárás alkalmazása viszonylag nehéz (a megoldást Newton–Raphson-algoritmussal oldották meg).

Egy másik típusú eljárás csoport a portfólió értékének eloszlását (lognormálisok összegének problémája) zárt képletű eloszlás alkalmazásával próbálja közelíteni. Az elméleti eloszlást momentumillesztéssel állapítják meg, majd a kapott közelítő eloszlásra alkalmazzák a zárt Black–Scholes-képletet. Az eljárások többsége csak pozitív portfóliósúlyok mellett működik, ezek nem alkalmasak a különbözetopciók árazására (mivel a spread felvehet negatív értéket is). *Milevsky–Posner* [1995] reciprok gamma-eloszlással közelítette a portfólió értékének sűrűségfüggvényét. *Borovkova–Permana–Weide* [2007] negatív irányba eltolt lognormális sűrűségfüggvényt használt, ami megengedi a negatív portfólióértékek felvételét, és így alkalmas a különbözetopciók árazására. A korai közelítő megoldások elsődleges problémája, hogy általában vagy csak két termékre szóló opcióra adnak megoldást, vagy kevés eszközből álló kosár esetén meglehetősen pontatlanok. *Deng–Li–Zhou* [2008] leve-

zetett egy olyan megoldást, ami több eszközre szóló különbözetopcióra vonatkozik, és viszonylag gyors és pontos eredményt ad.

A cikkben túlnyomórészt Monte-Carlo-szimulációt alkalmazunk, mert a várható értéken kívül a kibocsátás sűrűségfüggvényére is kíváncsiak vagyunk, ami ebben az esetben képlettel nem számolható. A gyorsabb futás érdekében a várhatóérték-számításoknál a *Deng-Li-Zhou* [2008] által bemutatott módszert némileg átalakított formában alkalmazzuk. A módosításra azért van szükség, hogy az eljárás alkalmazása váljon súlyozott árakra vonatkozó, bináris különbözetopciók árazására (az alapformula súlyok nélküli, vaníliavételi és -eladási opciókra vonatkozik).

A reálopciók modell ismertetése után áttérünk a völgy- és csúcsidőszaki áram, gáz és kibocsátási egység árának alakulását leíró sztochasztikus modellre.

## A különbözet (spread) modellezése

A részvények árfolyam-alakulására a leggyakrabban geometriai Brown-mozgást tételeznek fel. Ebben a modellben az egymást követő folytonos hozamok függetlenek, a jövőbeli árfolyamok eloszlása lognormális. A geometriai Brown-mozgás esetén a logaritmikusan eloszlásának szórása az idő négyzetgyökével arányosan növekszik, ahogy a modellezésében haladunk előre az időben, az eloszlás „kitágul”. A nagyobb valószínűségű lehetséges árfolyamértékek egyre nagyobb tartományt fednek le. Az árutőzsei termékek árfolyam-alakulásának modellezésére ezzel szemben leggyakrabban átlaghoz visszahúzó (*mean-reverting*) folyamatokat használnak. Ezekben a modellekben az árfolyam kilengés esetén „hajlamosabb” visszatérni egy hosszú távú átlaghoz. Az árfolyam eloszlása hosszabb távon stabilizálódik, a szórási állandósul. Az átlaghoz visszahúzó modellek alkalmazása mögötti gazdasági megfontolás szerint a nyersanyagok árát a kitermelési költségek (kínálati oldal) és a készterméken realizálható árrés (keresleti oldal) határozza meg. Mindkét oldal tényezői hosszabb távon viszonylag állandók, ezért a pillanatnyi keresleti és kínálati ingadozások miatt ugráló ár idővel egy állandó értékhez tér vissza.

### Geometriai Ornstein–Uhlenbeck-folyamat

A nullánál kisebb árak elkerülése érdekében *Schwartz* [1997] egyfaktoros modelljét használjuk,<sup>2</sup> amiben az árutőzsei termékek árfolyamának időbeli alakulása a (12) folyamatot követi:

$$dS = \lambda(\theta - \ln S)Sdt + \sigma Sdz. \quad (12)$$

A modell az Itô-lemma alkalmazásával megfeleltethető egy aritmetikai Ornstein–Uhlenbeck-folyamatnak:

<sup>2</sup> A modellt hívják logaritmikusan Ornstein–Uhlenbeck-, geometriai Ornstein–Uhlenbeck-folyamatnak, mások exponenciális Vasicek-modellnek nevezik (*Brigo és szerzőtársai* [2007]).

$$d\ln S = \lambda(\mu - \ln S) dt + \sigma dz$$

$$\mu = \theta - \sigma^2/(2\lambda). \tag{13}$$

A geometriai Ornstein–Uhlenbeck-folyamat paraméterei a diszkrét szimuláció lépéseiből kiindulva becsülhetők. Az aritmetikai Ornstein–Uhlenbeck-folyamatra vonatkozó eredményeket (Berg [2011]) módosítani kellett a  $\mu = \theta - \sigma^2/2\lambda$  taggal:

$$\ln(S_{t+\Delta}) = \ln(S_t)e^{-\lambda\Delta} + \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2\lambda}\right)(1 - e^{-\lambda\Delta}) + \sigma\sqrt{\frac{1 - e^{-2\lambda\Delta}}{2\lambda}}N_{0,1}. \tag{14}$$

A modell egy lineáris egyenletre illeszkedik:

$$\ln(S_{t+\Delta}\delta) = a\ln(S_t) + b + \varepsilon \tag{15}$$

A legkisebb négyzetek eljárással becsült együtthatók segítségével kifejezhetők a sztochasztikus alapmodell paraméterei:

$$\lambda = \frac{\ln(a)}{\Delta} \quad \sigma = \text{std}(\varepsilon)\sqrt{\frac{-2\ln(a)}{\Delta(1-a^2)}} \quad \Theta = \frac{b}{1-a} + \frac{\sigma^2}{2\lambda}. \tag{16}$$

A Wiener-tagok közötti korrelációs mátrixot a kapott  $\varepsilon$  maradéktagokból lehet kiszámítani.

### A felhasznált piaci adatok

Az egyes instrumentumokra az European Energy Exchange (EEX) áradatait használtuk a vizsgált 2008. február 28. és 2012. május 31. közötti időszakban. Az árakat csak azokra a napokra vettük figyelembe, amelyekre mind a négy termék rendelkezett árákkal. Mivel a kibocsátásiegység-árak csak a munkanapokra vonatkozóan szerepeltek, ezért a hétvégi áramárakat kihagytuk, a megfigyelési napok között eltelt időt 1/252 év értéknek tételezve fel. A logaritmusos modell természete miatt kisebb korrekciókra volt szükség: azokat a napokat, ahol az árak negatívak voltak (ilyen a völgyidőszaki áram esetében fordult elő néhány alkalommal), kizártuk az adatsorból.

### A regresszió eredménye

Az árfolyammodell illesztését a négy alaptermékre vonatkozó piaci adatok alapján a (15) képlet szerint végeztük el. Az illesztett lineáris regressziós modell eredményeit és a sztochasztikus modell paramétereit az 1. táblázat tartalmazza.

A regresszió determinációs együtthatójának értéke ( $R^2$ ) völgy- és csúcsidőszaki áram esetében meglehetősen alacsonynak mondható (rendre 0,3574 és 0,5303). A másik két alaptermék esetében viszont magas értékeket kaptunk (gáz: 0,9934, kibocsátási egység: 0,9929), emiatt a geometriai Ornstein–Uhlenbeck-folyamat feltételezését megtartottuk. Ezzel lehetővé vált analitikus közelítési képlet alkalmazása, ami bizonyos esetekben meggyorsította a számítás menetét. A kapott sztochasztikus modell alakja:

## 1. táblázat

A geometriai Ornstein–Uhlenbeck-folyamat regressziójának eredménye

	Völgy	Csúcs	Gáz	Kibocsátási egység
$a$	0,5979	0,7282	0,9967	0,9989
$b$	1,5005	1,1184	0,0097	0,0018
$R^2$	0,3574	0,5303	0,9934	0,9929
$S(0)$	38,8167	67,6667	23,4700	6,2600
$\text{Exp}(\mu)$	46,5685	68,0518	21,7829	6,8357
$\lambda$	129,6231	79,9205	0,8251	0,2804
$\sigma$	5,3291	4,1001	0,4545	0,4375

*Forrás:* az EEX 2008. február 28. és 2012. május 31. közötti áradatai alapján végzett saját számítás.

$$\begin{aligned}
 dS_{\text{pow}}^{\text{off-peak}} &= 129,6231(3,8409 - \ln S_{\text{pow}}^{\text{off-peak}})S_{\text{pow}}^{\text{off-peak}} dt + 5,3291S_{\text{pow}}^{\text{off-peak}} dz \\
 dS_{\text{pow}}^{\text{peak}} &= 79,9205(4,2203 - \ln S_{\text{pow}}^{\text{peak}})S_{\text{pow}}^{\text{peak}} dt + 4,1001S_{\text{pow}}^{\text{peak}} dz \\
 dS_{\text{gas}} &= 0,8251(3,0811 - \ln S_{\text{gas}})S_{\text{gas}} dt + 0,4545S_{\text{gas}} dz \\
 dS_{\text{eua}} &= 0,2804(1,9222 - \ln S_{\text{eua}})S_{\text{eua}} dt + 0,4375S_{\text{eua}} dz.
 \end{aligned} \tag{17}$$

A négy termék árváltozásai közötti összefüggéseket a maradéktagokra elvégzett korrelációmátrix-számítás segítségével képezhetjük le. A kapott eredményekre hipotézisvizsgálatot végeztünk, ahol a nullhipotézis szerint a tagok közötti korreláció nulla, az alternatív hipotézis szerint a korrelációs együttható nem egyenlő nullával. A 2. táblázat tartalmazza az eredményül kapott korrelációs együtthatókat és a statisztikai próba  $p$ -értékeit.

## 2. táblázat

A maradéktagok közötti korrelációs együtthatók és a statisztikai próba  $p$ -értékei

	Völgy	Csúcs	Gáz	Kibocsátási egység
Korreláció				
Völgy	1,0000	0,4830	0,0190	-0,0192
Csúcs	0,4830	1,0000	0,0275	-0,0051
Gáz	0,0190	0,0275	1,0000	0,1655
Kibocsátási egység	-0,0192	-0,0051	0,1655	1,0000
$p$ -érték				
Völgy	1,0000	0,0000	0,5481	0,5439
Csúcs	0,0000	1,0000	0,3845	0,8717
Gáz	0,5481	0,3845	1,0000	0,0000
Kibocsátási egység	0,5439	0,8717	0,0000	1,0000

*Forrás:* lásd az 1. táblázatot.

A völgy- és csúcsidőszaki áramár erősen korrelál (48,3 százalék,  $p: 0$ , a kapcsolat szignifikáns). Az erős pozitív kapcsolat arra utal, hogy az árat meghatározó keresleti és kínálati tényezők egy része adott napra vonatkozik, egyszerre befolyásolja mindkét napszak árat. A tökéletes korreláció hiánya ugyanakkor azt jelzi, hogy erős a napon belüli (akár órákra vonatkozó) piaci tényezők szerepe. A gázár és kibocsátási kvóta közötti korreláció szintén szignifikáns, de gyengébb, pozitív irányú a kapcsolat (16,55 százalék). Ha emelkedik a gáz ára, az növeli az egyéb, nagyobb szénintenzitású tüzelőanyagot használó erőművek termelési részesedését, emiatt a kibocsátás növekszik, a kvóta ára emelkedik. A többi összefüggés szignifikanciája kicsi, ezért az eredmények bizonytalanabbak, az értelmezés is kevésbé megbízható.

A gáz korrelációs együtthatója a csúcsidőszaki áramár esetében magasabb (2,75 százalék), mint a völgyidőszakinál (1,9 százalék). Ez arra utalhat, hogy sok gázerőmű jellemzően a csúcsidőszakra koncentrálja termelését. Az áram keresletének növekedését a rugalmasabb, de drágábban termelő gázerőművek elégítik ki, emiatt a gáz kereslete és ára növekszik. A kibocsátási kvóta enyhén negatív korrelációt mutat az áram árával. A magyarázat szintén a termelési kapacitás összetételében kereshető. A kínálat rövid távon fix, az áram árának emelkedése a gázerőművek részesedését növeli, amelyek tisztábban (kisebb szén-dioxid-kibocsátással) termelik az áramot, a gáz irányába történő eltolódás csökkenti a kvóta keresletét és árat. Ez a negatív hatás a völgyidőszakban (ahol nagyobb a szénerőművek aránya) erősebb (-1,92 százalék), a csúcsidőszak esetében gyengébb (-0,51 százalék).

## A várható szén-dioxid-kibocsátás reálopciók számítása

Amint arról már szó volt, hétvégekre csak a villamos áramra állnak rendelkezésre tényadatok, a gázra és kibocsátási egységre nem. Emiatt a szimulációban szintén kihagytuk a hétfégi napokat és a teljes évet 252 napra osztottuk, a lépésköz így 1/252 év lett. Az összesen 50 ezer darab realizáció lehetővé tette, hogy a szimulált valóságot az eredmény aszimptotikusan közelítse.

A modellben egy nyitott ciklusú gázturbinás erőművet (*open cycle gas turbine*) tételeztünk fel (Nagy [2010]), amelynek paraméterei a következők: termikus hatékonyság 38 százalék, a tüzelőanyagként hasznosított gáz szénintenzitása 0,2014 tCO<sub>2</sub>/MWh, az egyéb változó költség 3 euró/MWh, az erőmű 100 MW-os, a napi maximális kapacitás (naponta termelhető árammennyiség) 2400 MWh.

Érdekes egy pillantást vetni az árkülönbözet kiinduló értékeire, amelyeket az utolsó historikus áradatok alapján a technológiai paraméterek segítségével számítottunk:

$$spread_{\text{off-peak}} = 38,8167 - 23,4700/0,38 - 6,2600 \times 0,2014/0,38 - 3 = -29,2643 \text{ euró/MWh.}$$

$$spread_{\text{peak}} = 67,6667 - 23,4700/0,38 - 6,2600 \times 0,2014/0,38 - 3 = -0,4143 \text{ euró/MWh.}$$

A szimuláció kiindulási lépésében, az erőmű esetleges termelés esetén a völgyidőszakban -29 eurót veszítene megawattóránként. A csúcsidőszaki kezdő lépésben az

árrés szintén negatív, a termelés nullszaldóhoz közeli, veszteséges. Az átlaghoz visz-szahúzó sztochasztikus modell hosszú távú átlagaival  $[\exp(\mu)]$  számolva a kép nagy vonalaiban hasonló, a völgyidőszak esetén szintén veszteséges a termelés, a csúcsidő-szaki működtetés csekély mértékű nyereséget termel:

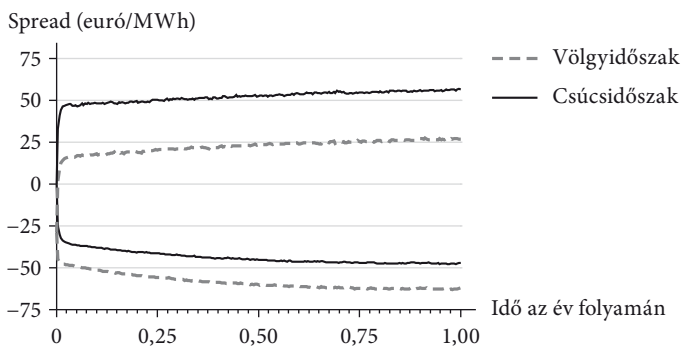
$$\text{spread}_{\text{off-peak}} = 46,5685 - 21,7829/0,38 - 6,8357 \times 0,2014/0,38 - 3 = -17,3778 \text{ euró/MWh.}$$

$$\text{spread}_{\text{peak}} = 68,0518 - 21,7829/0,38 - 6,8357 \times 0,2014/0,38 - 3 = 4,1055 \text{ euró/MWh.}$$

Az 1. ábrán láthatók a sztochasztikus árfolyammodellel szimulált 50 000 realizáci-óból számított, az árkülönbözetre vonatkozó 5 és 95 százalékos percentilisértékek a jövőbeli egy évre.

### 1. ábra

Az árkülönbözet szimulációja a jövőbeli egy évre, alsó 5 és felső 95 százalékos percentilisek



*Forrás:* az EEX 2008. február 28. és 2012. május 31. közötti áradatai alapján végzett saját számítás.

Az 1. ábrán látható, hogy a csúcsidőszaki árkülönbözet hosszabb távon széles hatá-rok, 55 és -50 euró/MWh között ingadozik, a völgyidőszaki percentilis sáv az alacsonyabb áramár miatt lejjebb kerül, értéke az esetek 90 százalékában hosszabb távon 25 és -60 euró/MWh között alakul. A szimulált árkülönbözetek áttekintése után térjünk át a termelés valószínűségének számítására.

### A termelés valószínűsége

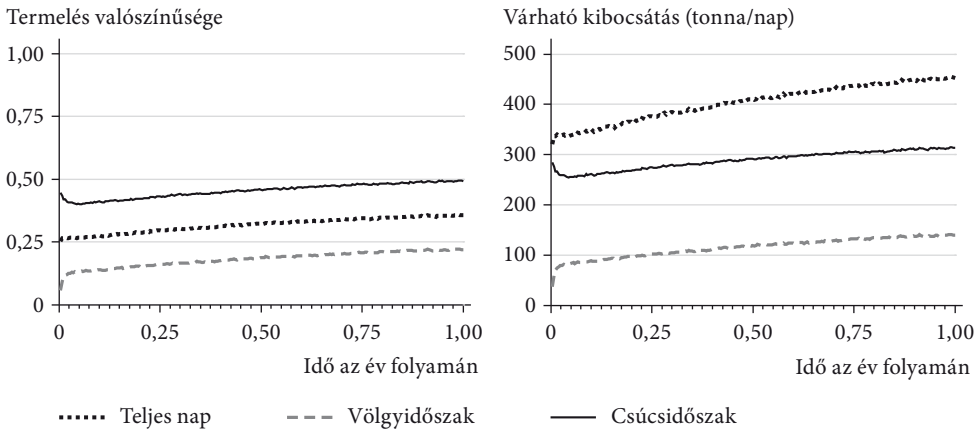
Amint a reálopciók modell ismertetésénél láthattuk, a profitmaximalizáló erőmű csak abban az esetben termel, ha az adott napszakra vonatkozó árkülönbözet érté-ke pozitív. A szimulált különbözetelek alapján meghatározhatók a bináris termelési döntési változó ( $\Delta$ ) realizációi. A  $\Delta$  változó adott jövőbeli naphoz tartozó átlaga, a várható értéke, megadja a termelés adott napra vonatkozó valószínűségét. Az erő-mű várható napi szén-dioxid-kibocsátása a termelés valószínűségéből egyszerűen származtatható: a kapott értéket meg kell szorozni az adott időszakhoz tartozó ma-

ximális szén-dioxid-kibocsátással, ami teljes nap esetén a  $\Gamma \times \delta/\eta$  formula alapján számolható, a napszakok esetén ennek fele.

A szimulációt a rendelkezésre álló piaci adatokra illesztett modell paramétereivel végzetük el, a kiinduló árak az utolsó piaci árak voltak. A futtatások alapján a termelés valószínűségére és a várható szén-dioxid-kibocsátásra vonatkozó eredményeket a 2. ábra mutatja.

## 2. ábra

Az adott nap termelésének valószínűsége (bal oldal) és várható szén-dioxid-kibocsátása (jobb oldal) az idő függvényében



Forrás: lásd az 1. ábrát.

Amint látható, a modellbeli erőmű a csúcsidőszakban 50 százalék körüli eséllyel termel. A völgyidőszak esetén a valószínűség ennél jóval alacsonyabb (15–25 százalék). Ennek az az oka, hogy a csúcsidőszakihoz képest az áram ára völgyidőszakban alacsonyabb, emiatt az árkülönbség kisebb eséllyel van zérus felett, mint csúcsidőszak esetén. Mivel a napot két egyenlő részre osztottuk, a teljes napra vonatkozó termelési valószínűséget a két érték átlagaként számolhatjuk. A nap egészére vonatkozó érték megmutatja, hogy várhatóan a 24 óra hány százalékában fog az erőmű működni és szén-dioxidot kibocsátani. Az ábrán az is megfigyelhető, hogy a szimuláció kezdeti lépéseiben a valószínűségek „korrigálnak”. Ez annak tudható be, hogy a legnagyobb visszatérési sebességű áramár (ezt a sztochasztikus modellben a  $\lambda$  paraméter mutatja) a kiindulási értékéről indulva gyorsan beáll a hosszú távú átlag körüli fluktuációra. A valószínűségek hosszabb távú enyhe emelkedése ugyanakkor elsősorban a lassabban visszahúzó gázárnak „köszönhető”, ami lassabban adaptálódik a hosszabb távú egyensúlyához. A szén-dioxid-kibocsátás várható értéke a termelés valószínűségével párhuzamos lefutású. Az erőmű csúcsidőszakban várhatóan naponta közel 300 tonna szén-dioxidot bocsát ki a légkörbe, a völgyidőszakhoz tartozó napi emisszió 100–150 tonna. A teljes napra vonatkozó várható kibocsátás a völgy- és csúcsidőszaki értékek összegeként számolható. Értéke az év eleji 320 tonnáról év végére 450 tonnára emelkedik.

A várható szén-dioxid-kibocsátás számbevétele után térjünk át a kockázatkezelési szempontból kiemelt szerepű szén-dioxid-kibocsátás sűrűségfüggvényére, ami megmutatja, hogy az erőmű mekkora eséllyel bocsát ki adott mennyiséget.

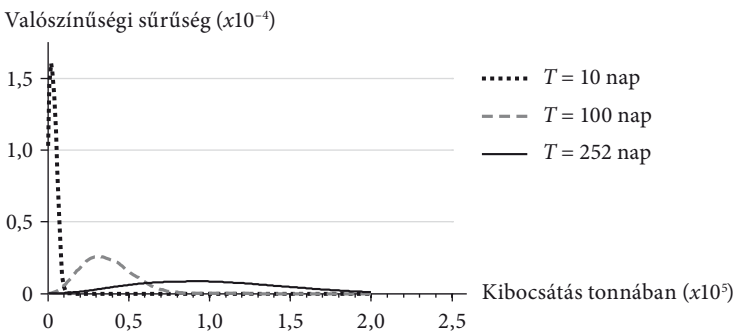
### A szén-dioxid-kibocsátás sűrűségfüggvénye

A  $\Delta$  napi döntési változók kumulált értéke, a  $\Omega$  halmozott termelés döntési változó. Értéke megmutatja, hogy adott időpontig hány teljes termelési napnak megfelelő ideig működött az erőmű. Mivel a napot két egyenlő részre osztottuk, a kapott  $\Delta$  értékeket a halmozásnál meg kell szorozni 0,5-tel. A teljes napra vonatkoztatva  $\Omega$  értéke az első szimulációs napon 0, 0,5 vagy 1 lehet, a másodikon  $\{0, 0,5, 1, 1,5, 2\}$  sorozat valamelyik értéke, a 252 szimulált napra vonatkozóan pedig egy 0 és 252 közötti szám (0,5 lépésközzel). A halmozott termelési döntési változó értékét a maximális szén-dioxid-kibocsátással megszorozva megkapható a  $Q_c$  halmozott szén-dioxid-kibocsátás mennyisége. Fontos hangsúlyozni, hogy míg a várható értékeket analitikus képlet segítségével is közelíthetjük, addig a sűrűségfüggvényt néhány kivételes eset-től eltekintve szinte kizárólag szimulációs úton tudjuk meghatározni.

A futtatások során számított 50 000 darab  $\Omega$  halmozott szén-dioxid-kibocsátás értékre hisztogramot illesztettünk, pontosabban annak normalizált és folytonos közelítését, a Kernel-sűrűségfüggvényt (Rosenblatt [1956]). A 3. ábra a 10., 100. és 252. naphoz tartozó halmozott szén-dioxid-kibocsátás értékekhez tartozó sűrűségfüggvényeket mutatja.

#### 3. ábra

A halmozott kibocsátás sűrűségfüggvénye eltérő hosszúságú időszakokra



Forrás: lásd az 1. ábrát.

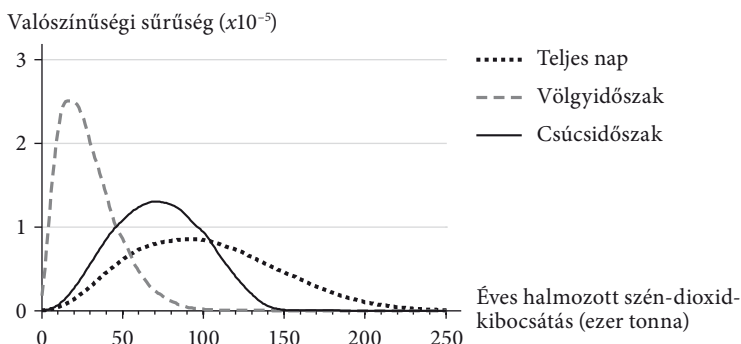
A 3. ábrán látható, hogy a 10. napon a halmozott kibocsátás sűrűségfüggvénye szélsőségesen balra ferde eloszlású: a zérus kibocsátás esélye a legmagasabb. Ennek oka az egymást követő napok kibocsátásainak összefüggésében keresendő. Amennyiben adott napon az árkülönbözet negatív, és az erőmű nem termel, akkor nagy valószínűséggel az azt követő napon is nulla alatti lesz az értéke, és a kapacitásait szintén szünetelteti. Emiatt a nulla kibocsátású napot nagy valószínűséggel követi további kibocsátás nélküli nap. Mivel a szimuláció kiindulási árai alapján a spread értékek

mindkét napszakra vonatkozóan kisebbek, mint nullák, ezért az első néhány lépésben a nulla kibocsátású napok dominálnak, a gyakorisági függvény a nulla körül csúcsosodik ki. Az idő előrehaladtával a pozitív kibocsátású napok valószínűsége növekszik, az eloszlás szimmetrikusabb lesz (ferdesége csökken) és ellapul.

Vizsgáljuk meg a völgy-, a csúcsidőszaki és a teljes napi halmozott kibocsátás sűrűségfüggvényének viszonyát! A szimuláció alapján az egy év alatt történő szén-dioxid-kibocsátás sűrűségfüggvényeit a 252 lépéshez tartozó halmozott szén-dioxid-kibocsátásra illesztett Kernel-függvényekkel közelítjük. A három időszakra vonatkozó eredményt a 4. ábra mutatja.

#### 4. ábra

A völgy-, csúcsidőszaki és a teljes napra vonatkozó éves halmozott szén-dioxid-kibocsátás sűrűségfüggvénye



Forrás: lásd az 1. ábrát.

A völgyidőszaki halmozott kibocsátás sűrűségfüggvénye balra ferde, a nagyon alacsony éves szennyezéskibocsátás valószínűsége magas (az erőmű nagy valószínűséggel völgyidőszakokban pihen). A csúcsidőszakban a magasabb kereslet miatt bekövetkező magasabb áramár miatt az erőmű termelésének esélye nagyobb, a kapott eloszlás ferdesége csökken, emiatt magasabb éves szennyezéskibocsátási szintek lesznek valószínűbbek.

A kapott sűrűségfüggvény nemcsak a várható szennyezéskibocsátás meghatározásában segít, hanem arra alapozva közelíthető az erőmű megfelelési kötelezettségének várható költsége is.

Az erőmű megfelelési kötelezettségének költsége, a kibocsátandó szén-dioxid kockázatosított értéke

Amint a bevezető részben láthattuk, az erőmű megfelelési kötelezettséggel rendelkezik. A teljes évi szén-dioxid-kibocsátásnak megfelelő mennyiségű kvótát kell visszaadnia a hatóságnak. Felmerülhet a kérdés, hogy várhatóan milyen mértékű költséget jelent a megfelelési kötelezettség a vállalat számára.

A megfelelési kötelezettséggel kapcsolatos költség e cikk keretein belül a szükséges kvóták értékével egyezik meg. Emellett az EU ETS rendszer költségeinek van egy má-

sik összetevője: a magas kvótaár csökkenti a termelés esélyét. Vannak olyan időszakok, amikor kizárólag a kvóta magas ára miatt nem termel az erőmű (nulla kvótaárat feltételezve a különbözet értéke pozitív lenne). Ezekben a napokban a „kieső” termelés miatt holtteher-veszteség keletkezik. Ennek mértéke hozzáadódik a rendszer társadalmi költségeihez. Természetesen a szén-dioxid-kibocsátásnak külső hatásokkal járó (externális) költségei is vannak: társadalmi szinten a kieső termelés és szennyezéskibocsátás csökkenti a környezeti károkat, és ezen keresztül növeli a jólétet (a kérdéshez kapcsolódóan lásd Kocsis [1998]). A továbbiakban üzemgazdasági oldalról vizsgáljuk a megfelelési kötelezettség költségét, a holtteher-veszteségtől eltekintünk, kizárólag a kibocsátás lefedéséhez szükséges kibocsátási egységek értékét vesszük számításba.

A kockázatkezelés területén elterjedt mérőszám a kockázatott érték (*Value at Risk, VaR*), ami megmutatja, hogy adott konfidenciaszint ( $c$ ) mellett maximum mekkora veszteség keletkezhet a pozícióján (*Jorion* [1999] 97. o.):

$$P(|\text{Porfólión realizálható veszteség}| < \text{VaR}) < 1 - c. \quad (18)$$

Például ha egy portfólió értékének eloszlásfüggvényét normálisnak tételezzük fel 1 millió euró várható értékkel és 200 ezer euró szórással, akkor 1 év múlva 95 százalékos eséllyel legalább  $\Phi^{-1}(1 - 0,95, 1\,000\,000, 200\,000) = 671\,029$  eurót fog érni, a veszteség legfeljebb 328 971 euró lesz, ahol  $\Phi^{-1}(P, \mu, \sigma)$  a  $\mu$  várható értékű és  $\sigma$  szórású normális eloszlás inverz eloszlásfüggvényének értékét jelenti  $P$  valószínűség mellett.

A jövőbeli szén-dioxid-kibocsátás lefedésének költsége a szennyezéskibocsátás mennyiségétől és a kvótaártól függ: jelentős mennyiségű kibocsátás magas árral párosulva jelentős terhet jelent a vállalat számára; amennyiben a kibocsátás és/vagy az kibocsátási egység ára alacsony, a megfelelési kötelezettség várhatóan alacsony költségek mellett teljesíthető. A kibocsátott üvegházhatású gáz lefedésének értékét a  $Q(\tau)$  jövőbeli szén-dioxid-kibocsátási értékek és az  $S_{\text{EUA}}(\tau)$  jövőbeli árak szorzatösszegeként kaphatjuk meg, annyi megkötéssel, hogy az eltérő időhöz köthető értékeket az év végére számított jövőértékek szerint összesítjük:

$$\sum_{\tau=1}^{252} \frac{A_{\text{off-peak}}(\tau/252) + A_{\text{peak}}(\tau/252)}{2} \times \Gamma \times \delta / \eta \times S_{\text{EUA}}(\tau/252) \times e^{r(1-\tau/252)}. \quad (19)$$

A jövőérték számításánál konstans kockázatmentes kamatlábat ( $r$ ) tételeztünk fel, amelynek értékét 0,928 százaléknak vettük fel a 6 hónapos Euribor alapján.<sup>3</sup>

A kockázatott érték számításához néhány lényeges megállapítás köthető. Amint láthattuk, az EU ETS-ben a megfelelési kötelezettség mindig az előző év teljes kibocsátásra vonatkozik, aminek a következő év április 30-áig kell eleget tenni (meg egyező mennyiségű kibocsátási egység átadásával). Az év végén a teljes kibocsátott mennyiség ismert. Ezért első közelítésként belátható, hogy a kockázatminimalizáló erőműnek legkésőbb év végén rendelkeznie kell az április 30-ai kötelezettség rendezését fedező kvótamennyiséggel (vagy azzal egyenértékű származtatott termékkel). Ellenkező esetben nyitott (árfolyamváltozásnak kitett, kvótával le nem fedett) po-

<sup>3</sup> 2012. július 2-ai adat forrása: euribor-rates.eu.

zíciónal rendelkeznek, és spekulációt hajjt végre (árfolyamesés esetén nyer, árfolyamemelkedés esetén veszít).

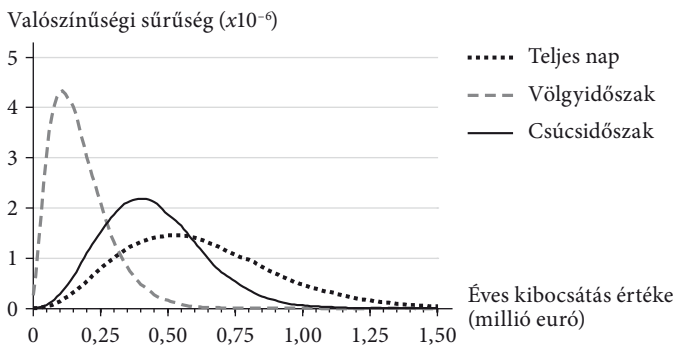
A feltételt tovább szűkítve az is megállapítható, hogy év közben az idő előrehaladtával egyre nagyobb mennyiségű kibocsátás lesz tényszerű (ismert). Emiatt év közben legalább az adott évhez tartozó múltbeli kibocsátásának megfelelő mértékű kibocsátásiegyeség-pozíciót szükséges felvennie. Végül a feltételt még tovább szűkítve az is megállapítható, hogy a jövőbeli kibocsátása is részben (sztochasztikus modell keretében) ismert. A jövőbeli kibocsátás fedezése érdekében (kicsit pontatlanul fogalmazva) a várható kibocsátásának megfelelő mértékű kibocsátási egységet célszerű a vállalatnak birtokolnia a kockázat minimalizálása érdekében. Pontosabban: adott pillanatban a jövőbeli árrésnek megfeleltetett különbözetopciók kibocsátási egységre vonatkozó *Delta* paramétereinek<sup>4</sup> megfelelő mennyiségű kvótát kell birtokolniuk a jövőbeli kibocsátásának fedezése érdekében, valamint rendelkezniük kell az adott évi múltbeli, tényszerű kibocsátásának megfelelő mennyiségű kvótával. Teljes fedezést az erőmű úgy tud megvalósítani, hogy a négy alaptermékre (völgy- és csúcsidőszaki áramra, gázra, kibocsátási kvótára) vonatkozó összesített *Delta* paramétereiket teszi nullává, ami négy termékre vonatkozó fedezeti ügyletekkel valósítható meg.

A továbbiakban a jövőbeli kibocsátás lefedésének költségére vonatkozó kockázattott értéket számítjuk ki fedezeti ügyletek nélkül.

A szimuláció alapján a kockázattott érték meghatározásához szükséges éves várható kvótopozíció jövőértékének eloszlását az 5. ábra mutatja.

### 5. ábra

Az éves kibocsátás jövőértékének sűrűségfüggvénye



Forrás: lásd az 1. ábrát.

A kapott függvények alakja nagyon hasonló a halmozott kibocsátásra illesztett hisztogramokéhoz, annyi kiegészítéssel, hogy azok meg vannak szorozva a mindenkori kvótaárral. A völgyidőszak esetében az alacsonyabb szén-dioxid-kibocsátású esemé-

<sup>4</sup> A *Delta* a pénzügyi kockázatkezelésben elterjedt mérőszám, ami a származtatott termék árának az alaptermék árfolyama szerinti parciális deriváltja. Értéke megmutatja, hogy egységnyivel növelve az alaptermék árát, mennyivel változik a származtatott termék (esetünkben az opció) ára.

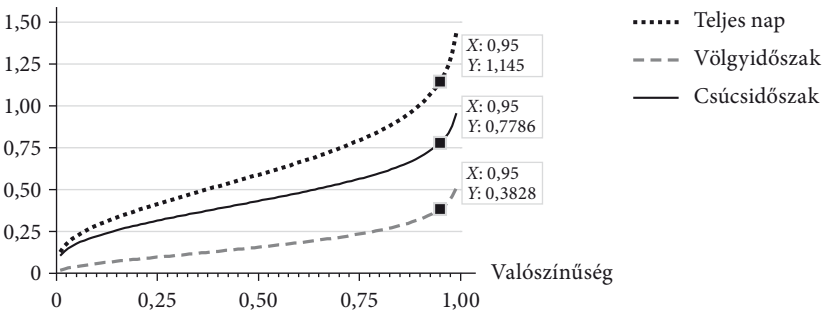
nyek nagyobb valószínűséggel következnek be, a sűrűségfüggvény balra ferde. A csúcsidőszakban a magasabb várható áramár magasabb spread értéket implikál, ennek következtében a sűrűségfüggvény módusza jobbra tolódik. A teljes napra vonatkozó érték sűrűségfüggvénye laposabb. Az erőmű által az egy évre vonatkozó összes szén-dioxid-kibocsátás nagyobb valószínűséggel 0,25 és 1 millió euró közötti értéket vesz fel.

A sűrűségfüggvényből integrálás segítségével meghatározható az eloszlásfüggvény. A kockázatos érték az inverz eloszlásfüggvényből egyszerűen leolvasható (6. ábra).

### 6. ábra

Az éves kibocsátás jövőértékének inverz eloszlásfüggvénye és a 95 százalékos valószínűséghez tartozó pontok

Éves kibocsátás értéke (millió euró)



Forrás: lásd az 1. ábrát.

A 95 százalékos valószínűség mellett a napi 2400 MWh előállítására képes erőműnek a megfelelési kötelezettség jövőértékén számítva kevesebb mint 1 millió 145 ezer eurójába kerül.

## Érzékenységvizsgálat

A kockázatos érték számításának bemutatása után vizsgáljuk meg, hogy különböző modellparaméterek megváltozása hogyan módosítja a kapott eredményeket! Az érzékenységvizsgálatot három forgatókönyvre végeztük el:

- esetleges hatékonyságnövelő beruházások hatása, eltérő hatékonyságú erőművek összehasonlítása (a termikus hatékonyság szerepe),
- a gázár változásának hatása,
- kvótapiaci árváltozások.

### A termikus hatékonyság változásának hatása

Az erőmű technológiai paramétereinek jelentős szerepük van a különbözet és azon keresztül a termelés és szennyezéskibocsátás meghatározásában. A  $\eta$  paraméter modellbeli változtatásával egyrészt összemérhető, hogy azonos tüzelő-

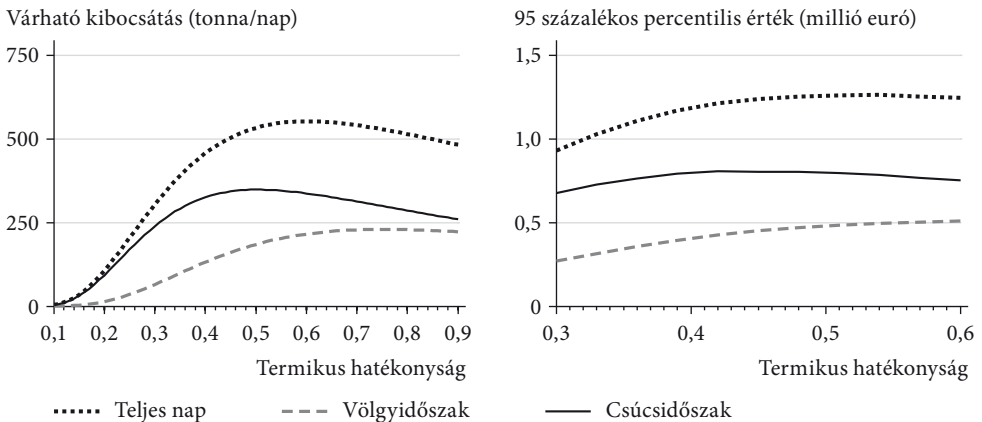
anyagot felhasználó, azonos egyéb változó költség mellett üzemelő, de eltérő hatékonyságú erőművek várhatóan mennyi szén-dioxidot bocsátanak a légkörbe, másrészt támpontot ad egy esetleges hatékonyságnövelő beruházás környezeti hatásainak becsléséhez.

A termikus hatékonyság értéke meghatározza, hogy egységnyi energia előállításához mennyi erőforrás szükséges, valamint azt is, hogy a napi maximális termeléshez kötődően legfeljebb mennyi szén-dioxidot bocsáthat ki a légkörbe.

A napi maximális szén-dioxid-kibocsátás mennyisége ( $\Gamma \times \delta/\eta$ ) fordítottan arányos a hatékonysággal. A termikus hatékonyság javulása tehát, úgy tűnik, csökkenti a vállalati kibocsátást. A reálopciók modellben azonban könnyen megfigyelhető egy ezzel ellentétes hatás is: a növekvő hatékonyság növeli a spread értékét az egységnyi energia megtermelésének csökkenő erőforrásigénye miatt. Emiatt megnő a termelés valószínűsége, ami *ceteris paribus* növeli a szén-dioxid-kibocsátást. A termelés valószínűségének (a  $\Delta$  napi döntési változók várható értékének) és a kibocsátás lefedési költségének alakulása a hatékonyság változására a 7. ábrán látható.

7. ábra

A várható kibocsátás (bal oldal) és a jövőbeli kibocsátás lefedésének költségére vonatkozó 95 százalékos VaR érték (jobb oldal) alakulása a termikus hatékonyság függvényében



Forrás: lásd az 1. ábrát.

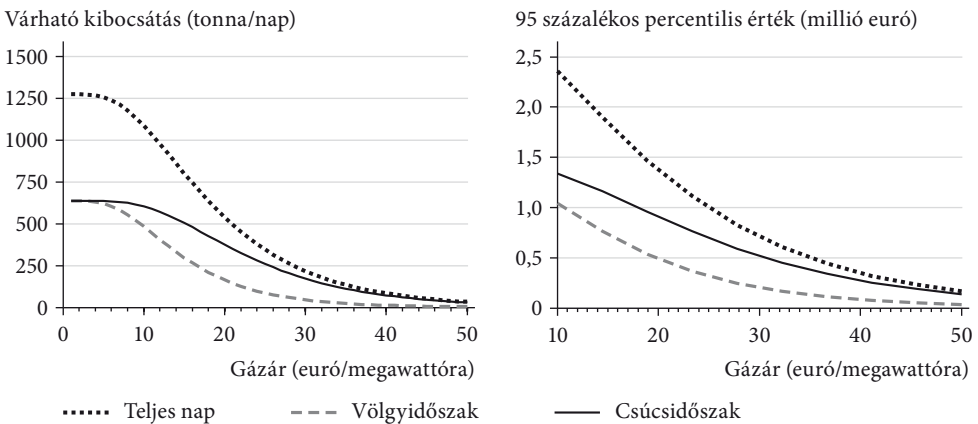
A szemléltetés kedvéért a bal oldali ábrán a valóságosnál szélesebb intervallumon vizsgáljuk a termikus hatékonyság hatását. Alacsonyabb  $\eta$  érték mellett a hatékonyság növekedésével a szén-dioxid-kibocsátás emelkedik (ekkor a spread növekedésének hatása dominál), magasabb értékek mellett a kibocsátás csökkenni kezd (a maximális kibocsátást csökkentő hatás az erősebb). A csúcsidőszak esetében ez a „visszafordulás” hamarabb bekövetkezik, mert az eleve magasabb különbözetértékek növekedése kevésbé növeli a termelés valószínűségét. A termikus hatékonyság emelkedése a völgyidőszaki 95 százalékos kockázatotott értéket emeli, a csúcsidőszaki kockázatotott érték tetőpontja 42 százalék körül van, ezután csökkenni kezd.

## A hosszú távú gázár hatása

Az energiapiacra jelentős mértékű árváltozások figyelhetők meg. A gáz kínálatának csökkenése jelentős mértékben emeli az árát (jó példa erre az ellátásban bekövetkező probléma hatása). Új kitermelési technológiák megjelenésével viszont jelentős mennyiségű gázkészlet válhat gazdaságosan kitermelhetővé, ami áresést eredményezhet. A modell keretein belül a gázár hatását az átlaghoz visszahúzó ármodell kiindulási és hosszú távú átlag-paraméterének együttes változtatásán keresztül vizsgáltuk. A várható szén-dioxid-kibocsátás és a megfelelés költségének kockázatosított értéke a 8. ábra szerint alakul.

### 8. ábra

A gázár változásának hatása az erőmű várható szén-dioxid-kibocsátására és a jövőbeli kibocsátás lefedésének 95 százalékos konfidenciaszint mellett számított legmagasabb költségére



Forrás: lásd az 1. ábrát.

A gázár emelkedése a spread csökkenése miatt csökkenti a várható kibocsátást. A völgyidőszaki esetben az alacsonyabb áramár miatt a hatás gyorsabb. A szén-dioxid-kibocsátás csökkenése miatt a megfelelési kötelezettség költsége is csökken. A két napszakra vonatkozó inverz eloszlásfüggvényből számított kockázatosított érték függvényének lefutása hasonló, de szintjeiben eltérő.

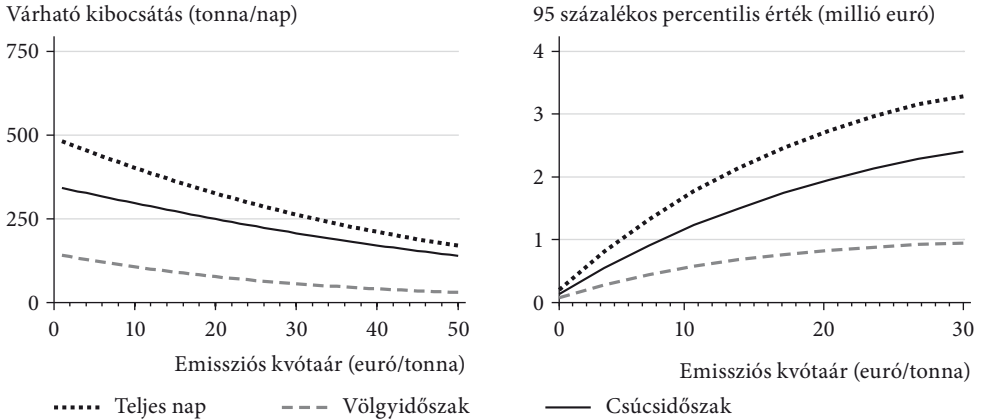
## A kibocsátási kvóta hosszú távú átlagának hatása

A kibocsátásikvóta-piacra mindkét kereskedési szakaszban jelentős mértékű, hosszabb távra szóló árváltozások voltak tapasztalhatók. Az első szakaszban a túlosztás nyilvánosságra kerülésével a kvótaár gyakorlatilag értéktelenné vált. A második szakaszban a szabályozó hatóság szűkítette a kibocsátható mennyiséget, ennek következtében a kvótapiacra kezdetben 20 euró felett volt egy tonna szén-dioxid-kibocsátásának az ára. A pénzügyi és gazdasági válság a villamos energia igényét is visszavetette, ami csökkenő energiatermelést és csökkenő szén-dioxid-kibocsátást

eredményezett. A reálopciók modellre támaszkodva megvizsgáltuk, hogy a szén-dioxid-kibocsátási egység kiindulási és hosszabb távú átlagárának együttes változása hogyan hat a kibocsátásra és a jövőbeli kibocsátás lefedésének költségére (9. ábra).

9. ábra

A várható kibocsátásnak (bal oldal) és a jövőbeli kibocsátás 95 százalékos konfidenciaszint melletti lefedési költségének (jobb oldal) alakulása a kvóta árának függvényében



Forrás: lásd az 1. ábrát.

A kibocsátás várható értéke a gázárhoz viszonyítva kevésbé érzékeny a kvótaárra. Míg a gáz esetében az erőforrás ára a termikus hatékonyság reciprokával szorozódik (38 százalékos  $\eta$  esetén a szorzó értéke: 2,63), addig a kvótaár esetén ezt az értéket ezenkívül meg kell szorozni a tüzelőanyag szénintenzitásával (a szorzó összesen  $\delta/\eta$  lesz). Ez annyit jelent, hogy 0,2014 tonna  $CO_2/MWh_{in}$  esetén a kvótaár emelkedésének költségnövelő hatása a gázár hatásának közel ötöde, az effektív szorzó 0,53. A kockázatotott érték számítása során a szén-dioxid-kibocsátás mennyiségét szorozzuk a kvótaárral. A magasabb kvótaár költségnövelő hatása jóval erősebb, mint a várható kibocsátást csökkentő hatás, a kockázatotott érték csökkenő mértékben növekszik.

Következtetések

Az EU ETS-ben szereplő gáztüzelésű villamos erőmű döntési helyzetének komplexitása a szén-dioxid-kibocsátási egység figyelembevétele miatt jelentősen növekedett. Az energiatermelő vállalatnak szükséges megbecsülnie várható kibocsátását, valamint év közben kezelnie kell kvótapozícióját. A cikkben egy – völgy- és csúcsidőszaki áramot, gázt, valamint kibocsátási kvótát tartalmazó – négytermékes reálopciók modell segítségével bemutattuk, hogyan lehet meghatározni a jövőbeli kibocsátás mennyiségét, valamint a kvótával való lefedés költségét.

A német energiátözsde árait illetett modell segítségével teszteltük a termikus hatékonyság és a gáz-, valamint a kvótaár szén-dioxid-kibocsátásra és a megfelelő költségére gyakorolt hatását. A termikus hatékonyság javulása először növeli

a jövőbeli kibocsátás lefedésének költségét, ennek okát abban kell keresni, hogy a realizálható árkülönbözet magasabb lesz, ami növeli a termelés esélyét és a széndioxid-kibocsátást. Magasabb hatékonyság esetében a hatás iránya megfordul: a napi lehetséges maximális kibocsátás csökkenése erőteljesebben hat, ezért a várható kibocsátás és lefedésének költsége csökken. A gázár *ceteris paribus* növekedése a spread értékének csökkenése miatt csökkenti a várható kibocsátást és a számított megfelelési költséget. A kibocsátási kvóta áremelkedése szintén csökkenti a termelés valószínűségét és a várható kibocsátást, de a gázárhoz viszonyítva kisebb mértékben. A jövőbeli kibocsátás lefedésének költsége a széndioxid-kibocsátási egység árának növekedésével emelkedik.

A reálopciók modellt a kibocsátás és a megfelelés költségének meghatározásán kívül további döntési és erőmű-értékelési problémák megoldására is használhatjuk. Többek között választ kaphatunk arra a kérdésre is, hogy milyen fedezeti ügyleteket kell év közben az erőműnek végrehajtania kockázatának minimalizálása érdekében. Ezek ismertetése egy későbbi cikk tárgya.

## Hivatkozások

- ABADIE, L. M.–CHAMORRO, J. M. [2008]: European CO<sub>2</sub> prices and carbon capture investments. *Energy Economics*, Vol. 30. No. 6. 2992–3015. o.
- ALBEROLA, E.–CHEVALLIER, J.–CHEZE, B. [2008]: Price drivers and structural breaks in European carbon prices, 2005–2007. *Energy Policy*, Vol. 36. No. 2. 787–797. o.
- BÉLYÁ CZ IVÁN [2011]: Stratégiai beruházások és reálopciók. Aula kiadó, Budapest.
- BENEDEK GÁBOR [1999]: Opcióárazás numerikus módszerekkel. *Közgazdasági Szemle*, 46. évf. 11. sz. 905–929. o.
- BERG, T. VAN DEN [2011]: Calibrating the Ornstein-Uhlenbeck (Vasicek) model. <http://www.sitmo.com/article/calibrating-the-ornstein-uhlenbeck-model/>.
- BOROVKOVA, S.–PERMANA, F. J.–WEIDE, H. V. D. [2007]: A Closed Form Approach to the Valuation and Hedging of Basket and Spread Options. *The Journal of Derivatives*, Vol. 14. No. 4. 8–24. o.
- BRIGO, D.–DALESSANDRO, A.–NEUGEBAUER, M.–TRIKI, F. [2007]: A Stochastic Processes Toolkit for Risk Management, elérhető: <http://www.damianobrigo.it/toolboxweb.pdf>.
- CARMONA, R.–DURRLEMAN, V. [2003]: Pricing and hedging spread options. *SIAM Review*, Vol. 45. No. 4. 627–685. o.
- DELARUE, D.–ELLERMAN, D.–D’HAESELEER, W. D. [2008]: Short-term CO<sub>2</sub> Abatement in the European Power Sector. Working Paper, június, <http://tisiphone.mit.edu/RePEc/mee/wpaper/2008-008.pdf>.
- DENG, S.–LI, M.–ZHOU, J. [2008]: Closed-form approximations for spread option prices and greeks. *Journal of Derivatives*, Vol. 16. No. 4. 58–80. o.
- DIXIT, R. K.–PINDYCK, R. S. [1994]: *Investment under Uncertainty*. Princeton University Press, Princeton, N J.
- DOBOS IMRE [2002]: Szennyezési jogok hatása a vállalati termelési stratégiára. BKÁE Vállalatgazdaságtan Tanszék Műhelytanulmány sorozat, 25. Budapest.
- FENTON, L. [1960]: The sum of log-normal probability distributions in scatter transmission Systems. *IRE Transactions on Communication Systems*, Vol. 8. No. 1. 57–67. o.

- HERBELOT, O. [1992]: Option Valuation of Flexible Investments: The Case of Environmental Investments in the Electric Power Industry. PhD-disszertáció, Massachusetts Institute of Technology, <http://dspace.mit.edu/handle/1721.1/13217>.
- HLOUSKOVA, J.–KOSSMEIER, S.–OBERSTEINER, M.–SCHNABL, A. [2005]: Real options and the value of generation capacity in the German electricity market. *Review of Financial Economics*, Vol. 14. No. 3–4. 297–310. o.
- HULL, J. C. [1999]: Opciók, határidős ügyletek és egyéb származtatott termékek. Panem-Prentice Hall, Budapest.
- JORION, P. [1999]: A kockáztatott érték. Panem, Budapest.
- KIRK, E. [1995]: Correlation in the energy markets, in managing energy price risk. *Risk Publications and Enron*, London.
- KOCSIS TAMÁS [1998]: Szennyezéselhárítás és technológiai fejlődés a környezetgazdaságban – mikroökonómiai elemzés. *Közgazdasági Szemle*, 45. évf. 10. sz. 954–970. o.
- LAURIKKA, H. [2006]: Option value of gasification technology within an emissions trading scheme. *Energy Policy*, Vol. 34. No. 18. 3916–3928. o.
- LESI MÁRIA–PÁL GABRIELLA [2004]: Az üvegházhatású gázok kibocsátásának szabályozása és a szabályozás hatása a villamosenergia-termelő vállalatokra Magyarországon. PhD-értekezés. Budapesti Közgazdaságtudományi és Államigazgatási Egyetem, Budapest.
- MARGRABE, W. [1978]: The value of an option to exchange one asset for another. *Journal of Finance*, Vol. 33. No. 1. 177–186. o.
- MARKOWITZ, H. M. [1952]: Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, Vol. 7. No. 1. 77–91. o.
- MAROSSY ZITA [2011]: A villamos energia áralakulásának egy új modellje. *Közgazdasági Szemle*, 58. évf. 3. sz. 253–274. o.
- MEDVEGYEV PÉTER [2009]: A származtatott termékek árazása és annak problémái az egyensúlyelmélet szempontjából. *Közgazdasági Szemle*, 56. évf. 9. sz. 769–789. o.
- MILEVSKY, M. A.–POSNER, S. E. [1995]: Asian options, the sum of lognormals and the reciprocal gamma distribution. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 33. No. 3. 409–422. o.
- NAGY TAMÁS [2010]: Effect of price uncertainty to power sector innovations. *Springwind 2010*, konferenciakötet, Pécs, 408–414. o.
- ROSENBLATT, M. [1956]: Remarks on some nonparametric estimates of a density function. *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 27. No. 3. 832–837. o.
- SCHWARTZ, E. S. [1997]: The Stochastic Behavior of Commodity Prices: Implications for Valuation and Hedging. *The Journal of Finance*, Vol. 52. No. 3. 923–973. o.
- SZÁZ JÁNOS–KIRÁLY JÚLIA [2005]: Derivatív pénzügyi termékek árdinamikája és az új típusú kamatlábmódellek. *Sigma*, Vol. 36. No. 1–2. 31–60. o.