

## MELLÁR TAMÁS

### Néhány megjegyzés az adósságdinamikához

---

A tanulmány az adósságfelhalmozódás Domar-féle alapképletének kibővítésére vállalkozik. Az alapképletben konstansként szereplő tényezők – a költségvetési deficit, a gazdasági növekedési ütem és kamatláb – több lépcsőben, fokozatosan kerültek dinamizálásra, és váltak a továbbfejlesztett modellek endogén változóivá. A három továbbfejlesztett modell lehetőséget nyújt az adósságállomány és ezen változók közötti kölcsönös (nem csak egyirányú) dinamikus kapcsolatok vizsgálatára, valamint az adósságstabilizáció kétféle stratégiájának bemutatására. A modellek alkalmasak a magyar adósságadatok értelmezésére és alapvető következtetések, értékelő megállapítások levonására.\*

Journal of Economic Literature (JEL) kód: H6

---

Az államadósság<sup>1</sup> felhalmozódásának időbeli alakulásával foglalkozó tanulmányok, cikkek és tankönyvek szinte kivétel nélkül négy tényező – a kiinduló adósság/GDP hányados, reálkamatláb, a reál-GDP növekedési üteme és a költségvetés elsődleges deficitje – közötti egyszerű dinamikus kapcsolatot leíró egyenletet tekintik meghatározó jelentőségű elemzési eszköznek. Matematikai alakját tekintve a következő formáról van szó:

$$\frac{db}{dt} \equiv \dot{b}(t) = (r - g)b(t) + x, \quad (1)$$

ahol  $b = \frac{B}{Y}$ ,  $x = \frac{D}{Y}$  az adósság/GDP hányados, illetve a költségvetési deficit GDP-hez viszonyított aránya, továbbá  $r$  a reálkamatláb és  $g$  a reálnövekedési ütem.<sup>2</sup> Az (1) differenciálegyenletből világosan kitűnik, hogy a kamatláb, a növekedési ütem és a deficit nagysága állandó, időben nem változik. Eppen ezért az adósság felhalmozódását csak az előre adott paraméterek mellett lehet vizsgálni, a dinamikus folyamat jellege már kezdetől adott, és nem is változhat, bármekkora időtávra is nézzük. Mindezek miatt bármennyire

\* A szerző ezúton szeretne köszönetet mondani Tallós Péternek, a tanulmányhoz fűzött értékes megjegyzéseiért és kiegészítő javaslataiért. Természetesen minden esetleges hibáért csak a szerzőt terheli felelősség.

<sup>1</sup> A tanulmány nem tesz különbséget a belső és a külső államadósság között, ezeket együttesen kezeli. Azokban a gazdaságokban, ahol fejlett pénzüpiacok vannak, feltételezhető, hogy a belső és a külső kamatláb mozgása nem válik teljesen el egymástól, hanem csak a várt leértékelési ütem szerint különböznek, tehát az együttes kezelés nem jelent túlzott leegyszerűsítést.

<sup>2</sup> Az összefüggés szülőatyjának Domar tekinthető, aki egy 1944-es cikkében foglalkozott az adósságteher és a nemzeti jövedelem alakulásával (lásd Domar [1944]). A jelenlegi formáját azonban a későbbi idők felhasználói által nyerte el. Ugyancsak tradicionális a probléma folytonos idő melletti kezelése és ezért a differenciálegyenletek használata, amely bizonyos tekintetben egyszerűbbé teszi a problémák kezelését, de a gyakorlati alkalmazás szempontjából nem mindig szerencsés.

paradox megfogalmazásnak tetszik is, az (1) differenciálegyenlet nagyon „statikus jellegű”, vagy pontosabban fogalmazva: túlzottan leegyszerűsített, és távolról sem aknázza ki a dinamikus kapcsolatok gazdag tárházát.

Az egyszerű statikus jelleg különösen közgazdasági szempontból jelent komoly korlátot, hiszen az adósságproblémát csak hosszabb időhorizonton van értelme vizsgálni, s itt viszont igen „heroikus feltételezés” a reálkamatláb, a növekedési ütem és az elsődleges deficit változatlanóságának kikötése. Éppen ezért sokkal tágabb vizsgálati lehetőségeket nyújt, ha az (1) egyenletet tovább dinamizáljuk, és a következő általános alakba fogalmazzuk át:

$$\frac{db}{dt} = [r(t) - g(t)]b(t) + x(t). \quad (1')$$

Az eddig konstansnak tekintett paraméterek változóként való kezelése – azon túl, hogy sokkal bonyolultabbá teszi a probléma kezelését – egy sor kérdést tesz fel, amelyek azzal kapcsolatosak, hogy ezek az új változók milyen tényezőktől és hogyan függenek, endogéneknek vagy exogéneknek kell-e kezelnünk, továbbra is egy- vagy két-, esetleg három-egyenletes modellfelírást alkalmazunk-e stb.

Ebben a cikkben az imént felvetett lehetőségek közül vizsgálunk meg néhányat, s próbálunk válaszolni az adósságdinamikával kapcsolatban felmerülő új kérdésekre. Ennek megfelelően a tanulmány felépítése a következőképpen alakul. A következő részben röviden a hagyományos adósságdinamikai közelítésmódot tekintjük át. Majd a reálkamatláb és a növekedési ütem együttes változásának hatását vizsgáljuk az adósság/GDP és az elsődleges egyenleg időbeli alakulásának folyamányaként. Az elsődleges deficit itt tehát végig exogén változóként szerepel. Ezután a reálkamatláb és a növekedési ütem endogén változók lesznek, amelyeket a többi endogén és exogén tényező határoznak meg. A felállított kétváltozós dinamikus modell endogén változói  $b$  és  $r$ , az  $x$  exogén változó marad. Végül egy olyan kétegyenletes modellel foglalkozunk, amelynek endogén változói a  $b$  és  $x$ , s amelyben az adósságkezelés különböző gazdaságpolitikai stratégiái is elemezhetővé válnak.

### A hagyományos közelítésmód

Az (1) differenciálegyenlet megoldása igen egyszerű, ráadásul közgazdaságilag is jól interpretálható. Vegyük először az egzakt matematikai megoldást:

$$b(t) = [b(0) - b^*]e^{(r-g)t} + b^* \quad \text{és} \quad b^* = -\frac{x}{r-g}. \quad (2)$$

Az adósság/GDP hányados akkor kerül egyensúlyi helyzetbe, ha a  $\dot{b} = 0$  lesz. Ezt a feltételt felhasználva kapjuk az egyensúlyi értékre, hogy  $b^* = -\frac{x}{r-g}$ . Annak megfelelő-

en, hogy az elsődleges deficit pozitív vagy negatív, illetve a kamatláb és a növekedési ütem különbsége milyen előjelű, négy esetet különböztethetünk meg.

1. eset:  $r > g$  és  $x < 0$ .

Az egyensúly ebben az esetben nem lesz stabil, és az egyensúlyi adósság/GDP hányados értéke pozitív lesz a (2) értelmében (lásd az 1. ábrán a jobb oldali egyenest). A növekedési ütemnél magasabb reálkamatláb egyre távolabb viszi az egyensúlytól a rendszert. Mivel a költségvetés elsődleges szinten szufficites, ezért az egyensúlyi értéknél kisebb szintről indulva, az adósság/GDP hányados folyamatosan csökkenni fog, ugyanis

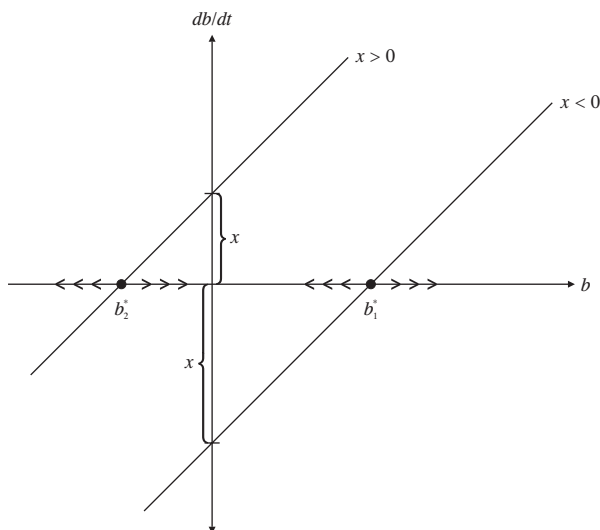
az adósság utáni kamatfizetési kötelezettséget megfelelően tudja ellensúlyozni. Ellenkező esetben, a magasabb szintről indítva viszont folyamatosan emelkedni fog a  $b$ , mert a kamatkiadások növekedését nem tudja ellensúlyozni a költségvetési többlet. Megfordítva a logikai láncot, következtetni lehet az adósságstabilizációs stratégia következményeire is. Adott induló  $b(0)$  és  $(r - g)$  mellett meghatározható a költségvetés elsődleges többletének az a szintje, amely mellett  $b^* > b(0)$  lesz, s ennek következtében az adósság csökkenni kezd.

2. eset:  $r > g$  és  $x > 0$ .

Továbbra sem stabil az egyensúly, hiszen a reálkamat nagyobb, mint a reálnövekedési ütem, viszont most az egyensúlyi érték negatív lesz (lásd az 1. ábrán a bal oldali egyenest). Közgazdasági szempontból ez úgy értelmezhető, hogy az állam nem adós, hanem hitelezői pozícióban van, s a költségvetési deficitet a kamatbevételeiből fedezi. Amennyiben az egyensúlyi szintnél kisebb induló hitelállománya van, akkor ez nem lesz képes az elsődleges deficitet finanszírozni, és az állam fokozatosan el fog adósodni. Ellenkező esetben viszont, ha az induló hitelezői pozíció nagyobb, mint az egyensúlyi szint, akkor nagyobb hitelezővé válik az állam.

1. ábra

Egyensúly és stabilitás a hagyományos közelítésmód esetében,  $r > g$  (1. és 2. eset)



3. eset:  $r < g$  és  $x < 0$ .

Az egyensúly ebben az esetben (aszimptotikusan) stabil, mert a növekedési ütem nagyobb, mint a kamatláb, az egyensúlyi érték viszont negatív lesz (lásd a 2. ábra baloldali egyenesét). A GDP nagyobb növekedési üteme miatt az adósságteher nem növekszik, a kamatkiadások relatív súlya egyre csökken, s lévén a költségvetés szufficites, ezért az adósságállomány elkerülhetetlenül felszámolódik és a kormány nettó hitelezői pozícióba kerül. Ha a kiinduló hitelezői pozíció nagyobb, mint az egyensúlyi szint, akkor ez csökkenni fog, mégpedig azért, mert az adós helyzetben pozitív elemként szereplő kamatlábnál magasabb növekedési ütem itt most negatív szerepet játszik: a kamatbevétel relatív csökkenése áll óhatatlanul elő.

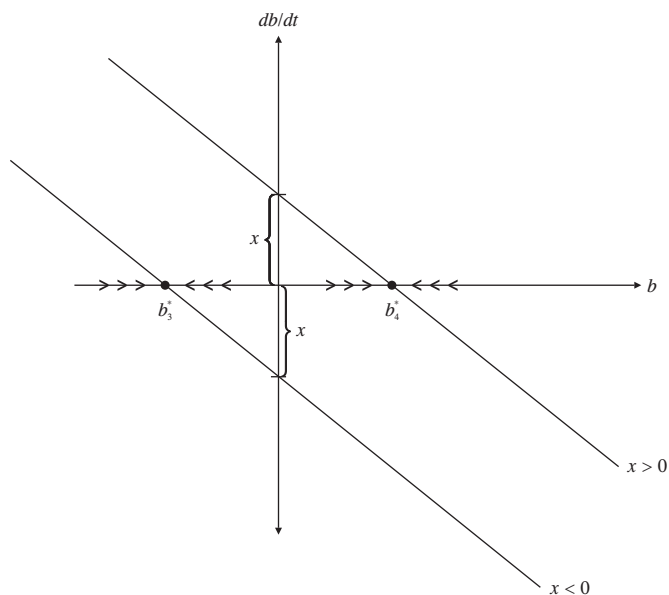
4. eset:  $r < g$  és  $x > 0$ .

Az egyensúly továbbra is stabil, viszont az egyensúlyi érték most pozitív lesz, vagyis

a kormányzat nettó adós pozícióba kerül (lásd a 2. ábra jobb oldali egyenesét). Az egyensúlyinál kisebb induló adósság/GDP hányados esetén a költségvetési deficit nagyobb lesz, mint a kamatkidadások feletti növekedésből eredő többlet, ezért a  $b$  növekedni fog. Fordított esetben viszont, az egyensúlyinál nagyobb  $b$  esetén a növekedési ütem dominál a deficit felett, s a gazdaság mintegy kinövi az adósságot.

2. ábra

Egyensúly és stabilitás a hagyományos közelítésmód esetében,  $r < g$  (3. és 4. eset)



A négy eset áttekintéséből egyértelműen kirajzolódik a hagyományos közelítésmód előnye és hátránya is. Az előnye, hogy viszonylag egyszerűen bemutatható az adósságdinamika problematikája, jól köthető az alapkategóriákhoz és azok egymás közötti nagyságrendi relációihoz, illetve segítségével világos és könnyen követhető gazdaságpolitikai ajánlásokat lehet megfogalmazni. A hátránya viszont az, hogy a túl leegyszerűsített kezelésmód könnyen teljesen hibás konklúziókhoz vezethet. A modell sebezhetősége a változók statikus és elszigetelt jellegéből következik. Gyakorlatilag nem sokat lehet kezdeni azokkal a következtetésekkel, amelyek arra épülnek, hogy az  $r$  és a  $g$  viszonya időben nem változik, illetve, hogy az  $x$  változtatásának semmilyen hatása sincs ezekre a változókra.

Illusztrációként érdemes megnézni, hogy a tényadatok tükrében mit mondhatunk az (1) összefüggés gyakorlati használhatóságáról. A rendszerváltás utáni magyar gazdaságra vonatkozó adatokat az 1. táblázat tartalmazza.

Az 1. táblázat első három oszlopa a vonatkozó tényszámokat tartalmazza, ahol  $b$  a konszolidált államadósságot,  $x$  pedig az államháztartás elsődleges (privatizációs bevétel nélküli) hiányát jelenti. A számított kamatláb egy átlagos kamatlábnak tekinthető, amely az államadósság utáni kamatfizetések alapján került kiszámításra. Az így kalkulált kamatláb és a GDP növekedési üteme segítségével az (1) képlet alapján kiszámítható az adósságfelhalmozódás üteme, amelyet az 1. táblázat 5. oszlopa tartalmaz.<sup>3</sup> Összevetve a

<sup>3</sup> A számítások során a kamatlábnál és a növekedésnél is a nominális értékekkel számoltunk, ez azonban nem befolyásolja számottevően az elméleti modellhez képest az eredményeket.

1. táblázat  
A magyar adósságfelhalmozódási folyamat alapszámái  
(százalék)

Év	$b$	$db/dt$	$x$	$r$ (számított)	$db/dt$ (számított)	$r$ (implicit)
1991	74,57	7,04	0,9	3,72	-14,94	24,28
1992	78,99	4,41	2,65	7,12	-10,92	28,93
1993	90,43	11,45	2,99	5,54	-5,77	14,84
1994	88,24	-2,20	2,69	7,71	-10,61	17,83
1995	86,35	-1,88	-2,12	12,38	-10,81	15,40
1996	72,81	-13,54	-4,41	10,51	-16,15	16,58
1997	63,87	-8,94	-2,96	13,34	-13,36	26,06
1998	62,30	-1,57	0,63	11,45	-9,70	15,34
1999	61,21	-1,10	-2,68	11,60	-3,52	9,96
2000	56,70	-4,51	-1,51	9,73	-3,50	17,42

Forrás: PM.

tényleges és a számított adósságnövekményeket, igen jelentős és időben eltérő mértékű különbségeket lehet fellelni. Ennek alapvető oka az, hogy Magyarországon az elmúlt évtizedben elég gyakran történt a költségvetésen kívüli kötelezettségvállalás és ennek következtében államadósság-növelés. Az igen alacsony kamatlábak mellett, különösen a kilencvenes évek elején, az adósságállomány csökkenésének kellett volna bekövetkeznie, azonban azok mégis nőttek. A teljesség igénye nélkül<sup>4</sup> csak néhány fontos költségvetésen kívüli növelő tételt említünk ennek magyarázatásra: az adós- és bankkonszolidáció (1992–1993), a leértékelési veszteség elszámolása (az úgynevezett nullás állomány növekedése, 1991–1996), az MNB és a költségvetés közötti adósságcsere (1997), valamint a Posta-bank konszolidálása (1998).

Az irreálisan alacsony (az inflációtól messze elmaradó) nominális kamatlábak azért alakulhattak ki, mert az MNB a kilencvenes évek elején a költségvetéssel szemben nem érvényesítette az adósság utáni kamatlábakban a leértékelési veszteséget. A tényleges adósságállomány-változást alapul véve, könnyen kalkulálható egy *implicit* kamatláb, amelynek érvényesülése – adott növekedési ütem mellett – a második oszlopnak megfelelő  $db/dt$  sort produkálta volna. Ezt az *implicit* kamatlábat mutatja az 1. táblázat utolsó oszlopa. Jól látható, hogy a ténylegesen alkalmazott kamatlábaknál mennyivel magasabb kamatlábakra lett volna szükség. S még ezek a magas nominális kamatlábak sem jelentettek volna mindig pozitív reálkamatlábakat. Ez azért lehetséges, mert a *seigniorage*-bevétel, illetve a lakossági oldalon az inflációs adó fedezte a többletkiadások egy részét, s ezért azok nem teljes mértékben generáltak adósságot.

### Egy egyszerű, nemlineáris modell

Az adósságprobléma dinamizálására megfogalmazott általános alakú (1') egyenlet és annak megoldása nem vezet közelebb a dinamikus és a kölcsönhatásokat jobban figyelembe vevő modellekhez. Az (1') általános megoldása a következő:

<sup>4</sup> Ezt a problémakört részletesen tárgyalja Barabás–Hamecz–Neményi [1998], Borbély–Neményi [1995], Mellár [1997] és Oblath [1995] tanulmánya.

$$b(t) = e^{\int u dt} \left[ c + \int w e^{\int u dt} dt \right] \quad u(t) = (r - g), \quad w(t) = x_t,$$

ahol  $u(t)$  és  $w(t)$  integrálható függvények, és  $c$  konstans. Konkrét megoldást csak az  $u$  és a  $w$  függvények konkrét megadása után kaphatunk, vagyis a specifikáció nem kerülhető el, más szóval: mindenképp definiálni kell az  $(r - g)$  és az  $x$  időbeli alakulását.

A specifikációt a kamatláb és a növekedési ütem különbségével kezdjük. Az egyszerűség kedvéért csak a nagyságrendi relációval törődünk, az egyes elemek időbeli alakulásával nem foglalkozunk. Ennek megfelelően használjuk az  $u(t) = r_t - g_t$  változót, amely a nagyságrendi relációk változása következtében egyaránt lehet pozitív, zéró vagy negatív. Tétélezzük fel továbbá, hogy  $u$  értékét csak endogén tényezők, nevezetesen a költségvetési deficit és az adósság/GDP hányados nagysága befolyásolja. További egyszerűsítési feltétel, hogy mindkét változó vonatkozásában lineáris kapcsolatot tétélezzünk fel. Ennek megfelelően az  $u$ -ra vonatkozó összefüggés a következő alakot ölti:

$$u(t) = -\alpha x(t) + \beta b(t) \quad \alpha, \beta > 0. \quad (3)$$

A meghatározás első fele meglehetősen „keynesiánus ihletésű”, amely szerint a költségvetési többletkiadások hatékonyan segítik elő a gazdasági növekedést (vö. multiplikátorhatás), s az állami túlköltekezésnek nincs hatása a kamatlábra (vö. likviditási csapda), s mindezek következményeként az  $x$  növekedése csökkenti az  $u$ -t. A második elem azt az egyszerű összefüggést engedi érvényre jutni, hogy az eladósodás növekedésével emelkedik a kamatláb, és romlanak a növekedés feltételei.

Behelyettesítve a (3) definíciót az (1') alapösszefüggésbe, egy  $b$ -ben másodfokú, jobb oldalú differenciálegyenletet kapunk:

$$\frac{db}{dt} = \beta b^2(t) - \alpha x(t)b(t) + x(t). \quad (4)$$

A (4) differenciálegyenlet kezelésénél két komoly probléma is felmerül: egyfelől a másodfokú jelleg, másfelől pedig, hogy az egyenletnek két változója van, és ezek ráadásul szorzatként is szerepelnek.<sup>5</sup> Jelentősen leegyszerűsíthetjük azonban a problémát, ha  $x$ -et időben állandónak tétélezzük fel. Ezzel nem sokat veszítünk, hiszen az alapkérdésünk az  $u$  előjelének változása volt, amelyet jól tudunk tárgyalni abban az esetben is, ha  $x$ -re vonatkozóan csak a pozitív, negatív és nulla eseteket tekintjük át.

Amennyiben a költségvetési deficitet állandóként definiáljuk ( $x(t) = x$ ), akkor a (4) megoldása igen egyszerűvé válik. Az egyensúlyi értékek közvetlenül adódnak a  $\dot{b} = 0$  helyettesítés után:

$$b_{1,2}^* = \frac{\alpha x \pm \sqrt{\alpha^2 x^2 - 4\beta x}}{2\beta}. \quad (5)$$

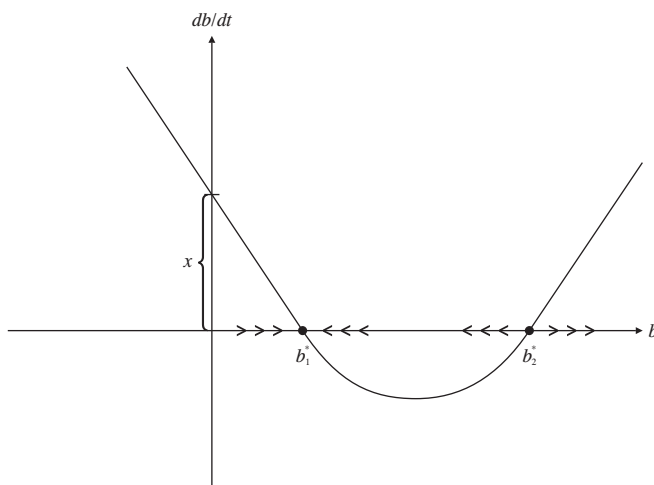
Ha  $x > 0$ , akkor attól függően, hogy a négyzetgyök alatti rész pozitív, nulla vagy negatív, két pozitív gyök, egy pozitív gyök, illetve komplex gyök lesz. A diszkrimináns pozitívításának feltétele, hogy  $x > \frac{4\beta}{\alpha^2}$ . Az (5)-ből nyilvánvaló, hogy mindkét egyensúlyi adósság/GDP ráta pozitív lesz, s a parabolaformából arra is kikövetkeztetni lehet, hogy a kisebbik egyensúlyi érték stabil, a nagyobbik pedig instabil helyzetet reprezentál (lásd a 3. ábrát). A költségvetési deficit növekedése növeli a két egyensúlyi érték közötti távolságot, mégpedig úgy, hogy a kisebb értéket folyamatosan csökkenti, a nagyobbat

<sup>5</sup> Az ilyen típusú differenciálegyenletek az úgynevezett Riccati-egyenletek, amelyekre nincs általános megoldóképlet. A Riccati-egyenletekről lásd bővebben *Abell-Braselton* [2001] 151. o.

pedig emeli. Az  $\alpha$  értékének növelése – eléggé nyilvánvaló okok miatt – ugyanilyen hatást vált ki. A közgazdasági magyarázat egyenesen következik a (4) definícióból: mivel a deficit növekedése csökkenti a kamatláb és a növekedési ütem közötti különbséget, ezért ez csökkentőleg hat az adósságfelhalmozódásra, s kivéve a nagyon kis, valamint a nagyon nagy  $b$  értékeket, ez a hatás domináns. A  $\beta$  értékének növekedése pedig az előzővel ellentétes irányú hatást fejt ki, egyre jobban közelíti egymáshoz a két egyensúlyi értéket. Amikor  $x = \frac{4\beta}{\alpha^2}$ , akkor a diszkrimináns nulla és csak egy egyensúlyi érték van, amely mindig pozitív, hiszen  $b^* = x \frac{\alpha}{2\beta}$ . Ez az egyensúlyi helyzet nem stabil (bár balról tart a trajektória az egyensúlyhoz, jobbról viszont nem).

3. ábra

Egyensúly és stabilitás az egyszerű, nemlineáris modellben:  $x > 0$  eset



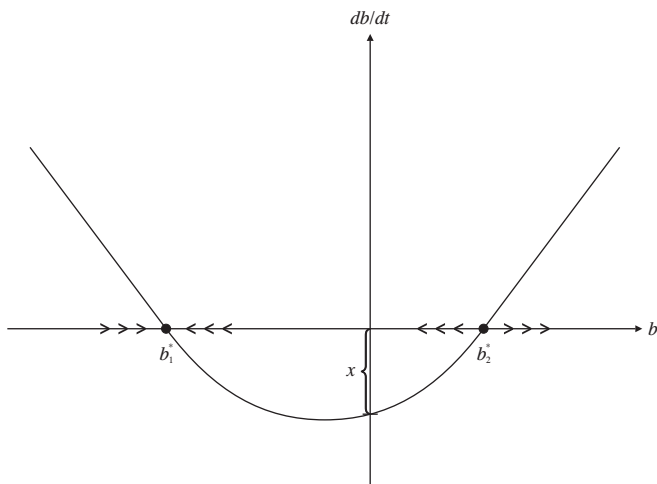
Ha  $x = 0$ , akkor  $b^* = 0$  csak a egyensúlyi érték adódik, mert az adósság/GDP hányados változása pozitív módon függ magától az állománytól. Az  $x < 0$  esetben a diszkrimináns mindig pozitív lesz, tehát két egyensúlyi érték adódik, mégpedig úgy, hogy az egyik mindig negatív, a másik pedig pozitív lesz. Továbbá az is kikövetkeztethető, hogy csak a negatív adósság/GDP egyensúlyi érték lesz stabil, a pozitív pedig instabil. A szufficites költségvetés hatására alacsony  $b$  értékek mellett az adós pozíciót fokozatosan felváltja a hitelezői pozíció, ahogy azt már az 1. alapeset tárgyalásánál is láttuk. Csak itt a folyamat nem vég nélkül halad a mínusz végtelen felé, mert a  $b$  negatívvá válása következtében egy idő után az  $u$  is negatív lesz, s ez a 3. alapesethez hasonlóan megakasztja a hitelezői pozíció további erősödését.

A magyar tényadatok alapján, pusztán illusztrációként érdemes lehet ennek az összefüggésnek a konkrét érvényesülését megnézni. Az adatsorok alapján a becsült egyenlet a következő paraméterértékeket tartalmazza:

$$\frac{db}{dt} = 0,0000047b^2 - 0,01349xb + 3,1997x.$$

A nagyon rövid idősor miatt nem lehet megalapozott következtetéseket levonni a paraméterek értékeiből. Mindazonáltal érdekes tendenciákat villant fel a becsült egyenlet. A

4. ábra

Egyensúly és stabilitás az egyszerű, nemlineáris modellben:  $x < 0$  eset

kilencvenes évtizedre jellemző magyar helyzet a 3. ábrának megfelelő kapcsolatformát tükröz. Állandó nagyságú költségvetési deficitet feltételezve, azt állapíthatjuk meg, hogy az adósságfelhalmozódási folyamat a 3,2 százalékos átlagos éves deficitel áll összhangban, vagyis ekkora lett volna, ha minden adósságeneráló tényező a költségvetésen keresztül ment volna. Az (5) összefüggés alapján könnyen kiszámíthatók az egyensúlyi értékek is. A két egyensúlyi adósság/GDP hányados ennek megfelelően 2609 százalék, illetve 262 százalék, amelyből ez utóbbi tekinthető stabilnak.

Összefoglalóként ennek a modellnek a kapcsán az állapítható meg, hogy az alapmodell egy, elméletileg nem túl jelentős változtatása is már komoly módosulást idéz elő az adósságdinamikában. Az egyszerű, monoton egyirányú mozgást a két egyensúlyi állapot léte miatt egy komplexebb és a valóságos viszonyokhoz közelebb álló mozgás váltja fel. Ugyanakkor az is elég szembetűnő, hogy a modell mennyire érzékenyen reagál a paraméterek változtatására: egészen kismértékű változtatások (s ez nemcsak matematikai, hanem közgazdasági értelemben is érvényes) igen komoly változásokat generálnak (például egy vagy két egyensúlyi helyzet). A modell további dinamizálását az  $x$  konstans voltának feloldásával lehetne folytatni. A későbbiekben érdemes lenne megvizsgálni, hogy hogyan változik a dinamikus modell viselkedése, amikor a költségvetési deficit egy véletlen változó adott várható értékkel és konstans szórással.

### Egy nemlineáris kétegyenletes modell, gazdaságpolitikai változóval

Az előbbi részben azt láttuk, hogy az adósságállomány változása  $b$ -től,  $u$ -tól és  $x$ -től függ, miközben  $u$  alakulása függővé tehető  $b$  és  $x$  változásától. Haladjunk tovább ezen a vonalon, és a korábbiakban alkalmazott lineáris specifikációt váltsuk fel egy nemlineáris, általánosabb specifikációval, valamint az exogén költségvetési deficitet tegyük a modell endogén változójává!

A tapasztalati tények alapján kézenfekvőnek látszik azt feltételezni, hogy az adósság/GDP hányados alacsony értékei mellett negatívan hat a kamatláb és a növekedési ütem különbségére (vagyis kedvezően a növekedési ütemre és nem növelően a kamat-

lábra).<sup>6</sup> Bizonyos szintű adósság/GDP hányados felett azonban megváltozik a helyzet, a  $b$  növekedésével egyre jobban fog emelkedni az  $u$  értéke. Nem a konkrét kapcsolat meghatározása, hanem csak az illusztráció kedvéért a következő típusú kapcsolat képezhető el:

$$u(t) = u^N + \alpha[b(t) - b^N]^3, \quad (6)$$

ahol  $u^N$  az  $(r - g)$  normál állapota, függetlenül az adóssághelyzettől,  $b^N$  pedig az adósság/GDP hányadosnak az az értéke, amelynél a negatív hatás átvált pozitívba.

Az  $u$  természetesen függ az  $x$ -től is, de nem a korábbi részben feltételezett „korlátlan” módon. A deficit növekedésével a kamatláb és a növekedési ütem különbsége csökken egy darabig, de aztán növekedni kezd, mert a  $g$ -re vonatkozó pozitív hatás egyre kisebb lesz (a deficit már nem tudja stimulálni a növekedést), miközben az egyensúlytalanságból következően a kamatlábra gyakorolt növelő hatás egyre erősebb lesz. Fordított esetben, amikor a költségvetés szufficites, akkor ez növeli  $u$ -t egy darabig, mert rontja a növekedési lehetőségeket, de egy ponton túl már a kamatlábra gyakorolt csökkentő hatás válik dominánssá, s ezért az  $u$  csökkenése következik be. Ismét csak illusztrációként a következő típusú kapcsolat fogalmazható meg:

$$\begin{aligned} u(t) &= u^N - \beta x(t), & x_{\min} \leq x(t) \leq x_{\max} \\ u(t) &= u^N + \gamma x(t), & \text{ha } x(t) > x_{\max} \text{ vagy } x(t) < x_{\min}, \end{aligned} \quad (7)$$

ahol  $\beta$ ,  $\gamma$  pozitív paraméterek.

A (6) és a (7) összefüggéseket figyelembe véve, és bekapcsolva az (1) definícióba, a következő általános összefüggés adható az adósság/GDP hányados változására:

$$\dot{b} = F(b, x) \quad F_b > 0, \quad \begin{aligned} F_x > 0, & \text{ ha } x > \bar{x} \text{ vagy } x < \underline{x} \\ F_x < 0, & \text{ ha } \underline{x} \leq x \leq \bar{x}. \end{aligned} \quad (8)$$

A függvénykapcsolat megfogalmazásában tekintettel kell lenni arra, hogy mind a  $b$ , mind az  $x$  változása egyfelől az  $u$ -n keresztül, másfelől pedig közvetlenül is megnyilvánul. A  $b$  esetében ez egyszerűbb, mert a két hatás mindig egyirányú és így egymást erősítő. Az  $x$  esetében azonban komplikáltabb a helyzet: az  $x$  növekedése esetén az  $u$  csökken, és ez csökkentőleg hat  $\dot{b}$ -re, ugyanakkor viszont a deficit növekedése közvetlenül növeli azt, ahogy az kiolvasható az (1) összefüggésből. Fordított esetben a költségvetési szufficit közvetve negatív (növelő) hatást gyakorol az adósság/GDP változására, mert az  $u$ -t növeli, viszont közvetlen hatása pozitív (csökkentő). Bizonyos korlátok között azonban a közvetett hatások erősebbek, mint a közvetlen hatások. Éppen ezért a (7)-ben adott korlátoktól eltérő, szűkebb határok között érvényesül a definiált hatás, vagyis  $\bar{x} < x_{\max}$  és  $\underline{x} > x_{\min}$ . Érdemes megjegyezni, hogy az alsó korlát lehet kisebb, mint nulla, vagyis a szufficites tartományba is eshet. Elképzelhető ugyanis olyan helyzet, amelyben egy bizonyos értéknél kisebb szufficit elérése javít a helyzeten, mert a költségvetési többlet csökkenéséből adódó veszteséget fedezi az  $u$  javulása (ami itt most csökkenést jelent). A fordulópont ott lesz, amikor a szufficit növekedéséből származó előny már nagyobb, mint az  $u$  növekedéséből származó hátrány.

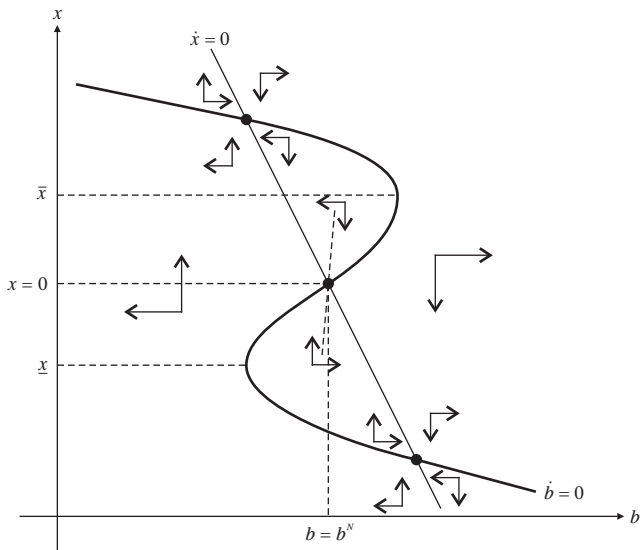
A dinamikus vizsgálat szempontjából fontos  $\dot{b} = 0$  esetben a (8) függvény konkrét alakjára vonatkozóan az állapítható meg, hogy az  $[x, \bar{x}]$  intervallumban pozitív meredekségű lesz, mivel  $F_x < 0$  és  $F_b > 0$ , az azon kívüli helyeken viszont negatív meredekségű lesz.

$$\left. \frac{dx}{db} \right|_{\dot{b}=0} = -\frac{F_b}{F_x} > 0, \quad \text{ha } F_x < 0.$$

<sup>6</sup> Missale-Blanchard [1994] tanulmányában a kamatláb helyett a várt infláció nagyságát tette függővé az adósság/GDP aránytól.

5. ábra

Egyensúly és stabilitás a nemlineáris, kétegyenletes modellben: kifogyni az adósságból eset



Az  $x = 0$  helynél szükségképpen  $b = b^N$  lesz, mivel ekkor  $b$ -nek nincs hatása az adósság/GDP arány változására, s ezért a definícióból következően  $x$ -nek sem lehet (lásd az 5. ábrát).

Adósság vagyunk még a másik változónk  $x$  dinamizálásával, amely most endogén változó lesz, mégpedig gazdaságpolitikai döntésű változó. Tegyük fel, hogy a kormányzat a  $b$  és  $x$  nagyságának ismeretében dönt a költségvetési egyenleg változásáról. Tételezzük fel továbbá azt, hogy a kormányzat elkötelezett a pénzügyi egyensúly helyreállításában, tehát az adósság/GDP arány növekedésére válaszként csökkenti a deficitet, illetve a magas deficit láttán is javítani próbálja a költségvetési egyensúlyt, vagyis a restriktív, az „adósságcsapdából kifogyni” politikát érvényesíti. Ezek alapján a következő általános formula határozható meg:

$$\dot{x} = H(b, x) \quad H_b < 0, H_x < 0. \quad (9)$$

Ennek egy alternatívája lehet a reálgazdasági egyensúlyi helyzet javítását célul kitűző politika, amely kevésbé érzékeny a pénzügyi egyensúlyra, s az adósságcsapdából előremene-külő módon próbál kilábalni a növekedési ütem költségvetési expanzió keresztüli javítása révén, vagyis „kinőni az adósságcsapdából”. Ekkor  $H_x > 0$  feltételt kell beírni a (9) összefüggésbe. Az  $\dot{x} = 0$  pontokat tartalmazó görbe az alapesetben negatív meredekségű lesz (lásd az 5. ábrát), az alternatív esetben viszont pozitív meredekségű lesz (lásd a 6. ábrát):

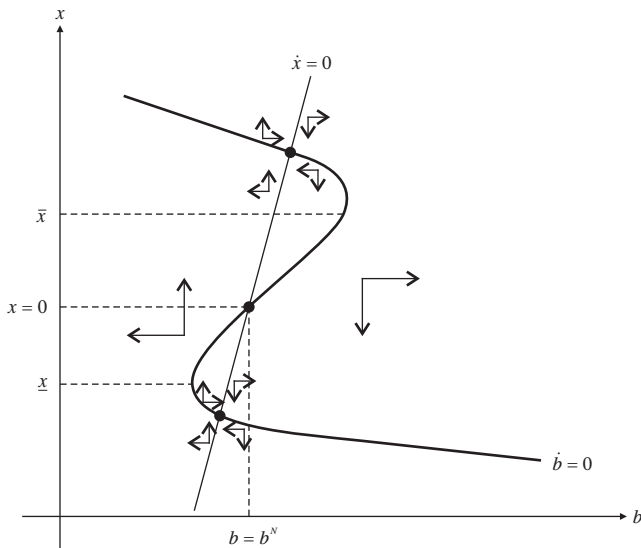
$$\left. \frac{dx}{db} \right|_{\dot{x}=0} = -\frac{H_b}{H_x} < 0, \quad \text{ha } H_x < 0.$$

A (8) és (9) által definiált nemlineáris modell elemzéséhez írjuk fel az egyensúlyi értékek közelében vett linearizált változatot:<sup>7</sup>

<sup>7</sup> A nemlineáris differenciálegyenletek megoldásának módszertani alapjai megtalálhatók például *Gandolfo* [1997] és *Kaplan–Glass* [1995] műveiben.

6. ábra

Egyensúly és stabilitás a nemlineáris, kétegyenletes modellben: kinőni az adósságból eset



$$\begin{bmatrix} \dot{b} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_b & F_x \\ H_b & H_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b - b^* \\ x - x^* \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Az intervallumok definíciója alapján három egyensúlyi helyzet lehetséges (lásd az 5. és 6. ábrát). Vegyük először a közbülső egyensúlyt, ami az  $[x, \bar{x}]$  intervallumba esik. A rögzített kiinduló feltételek alapján

$$\begin{aligned} \text{tr } J &= F_b + H_x < 0, & \text{ha } |H_x| > F_b \\ \det J &= F_b H_x - F_x H_b < 0, \end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy az egyensúly nem stabil, csak nyeregvonal melletti konvergencia állhat fenn. Közgazdaságilag ez úgy interpretálható, hogy csak speciális kiinduló  $b$  és  $x$  arányok mellett érhető el az egyensúly, feltéve ha a gazdaságpolitikai döntéshozók végig kontrollálják a folyamatot, és tartják a szükséges arányokat.

A másik két esetben, amelyek kívül esnek a meghatározott intervallumon, stabil egyensúlyi helyzet állhat fenn, ha

$$|F_x H_b| > F_b H_x,$$

mert a  $J$  (Jakobi-) mátrix determinánsa ekkor lesz pozitív (és természetesen továbbra is fennáll a  $\text{tr } J < 0$ ). A pontosság kedvéért érdemes megemlíteni, hogy az egyensúlyi trajektóriák spirálok lesznek (ahogy az az 5. ábráról is jól látszik), mert  $(\text{tr } J)^2 < 4 \det J$ . Közgazdaságilag ez a két egyensúlyi helyzet úgy értelmezhető, hogy az adósságfelhalmozódási folyamat viszonylag nagy deficit mellett csak kis adósság/GDP aránynál kerülhet nyugvópontra, illetve a viszonylag nagy adósság/GDP arány pedig csak jelentős költségvetési szüfficit mellett tartható stabilan.

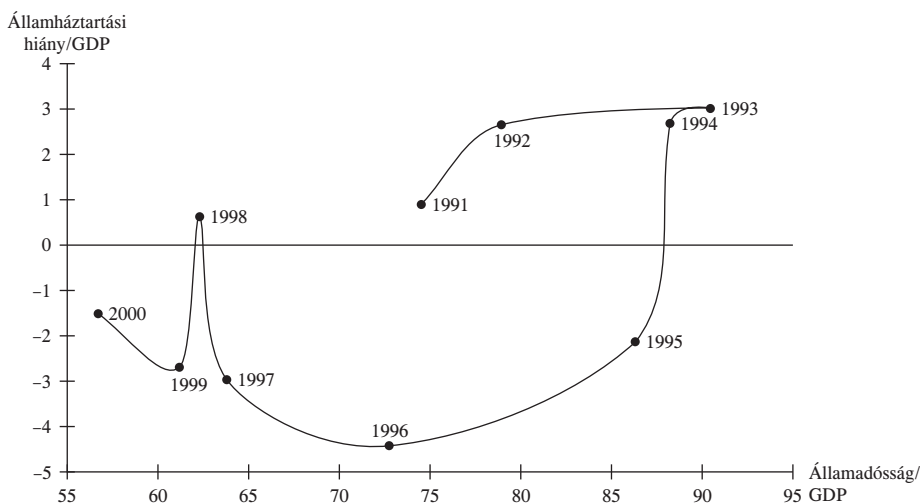
Az alternatív esetben, amikor előremenekülő gazdaságpolitikát tételezünk fel, akkor a közbülső egyensúly nem stabil, mert a  $H_x > 0$  miatt a  $\text{tr } J$  pozitívvá válik. Viszont ha  $F_x H_b > F_b H_x$  (vagyis, ha az  $\dot{x} = 0$  görbe meredeksége nagyobb, mint a  $\dot{b} = 0$  görbéé), akkor a

det  $J < 0$  lesz, amiből következően nyeregvonal-konvergencia lehetséges. A másik két egyensúly instabil lesz (pontosabban a trajektóriák instabil spirálok), mivel ekkor mind a  $\text{tr } J$ , mind a  $\det J$  pozitív lesz (lásd a 6. ábrát).

Az elméleti modell empirikus illusztrálásához a már korábbiakban is használt hazai adósságdinamikai adatokat vesszük ismét alapul. A 7. ábrán a  $b$  és az  $x$  évenként összetartozó értékeit ábrázoltuk egy közös koordináta-rendszerben. Jól látható, hogy 1990 és 1997 között egy, az óramutató járásával megegyező kört írt le a magyar gazdaság, mintegy visszaigazolv a modell spiráljait. Mivel a költségvetési hiány változása alapvetően negatív kapcsolatban van a korábbi időszak hiányával ( $dx_t = -0,53x_{t-1}$ ), ezért a modell első változata, az 5. ábra szerinti alkalmazkodás felel meg jobban a magyar gyakorlatnak. S itt is az alsó egyensúlyi helyzet, mert a nullánál kisebb elemek a dominánsak a költségvetési deficitnél (főként az időszak második felében és az egyensúly közelében). Mindez azt valószínűsíti, hogy a – más kérdésekben távolról sem egységes – egymást váltó hazai gazdaságpolitikai vezetések rendre a konzervatív pénzügyi stabilizáció, „a kifogyni az adósságból” stratégiáját választották.

7. ábra

A GDP-arányos államadósság és államháztartási hiány alakulása



### Egy nemlineáris modell, az exogén változók endogenizálásával

Induljunk ki ismét az (1') alapösszefüggéssből, és próbáljunk meg definíciót adni a három változóra,  $x$ -re,  $g$ -re és  $r$ -re, lehetőleg az adott változókörön belül maradván. Tekintsük tehát a következő definíciós egyenleteket:<sup>8</sup>

$$\dot{b}(t) = [r(t) - g(t)]b(t) + x(t) \quad (1')$$

<sup>8</sup> Igen fontos kihangsúlyozni, hogy a *mainstream* közgazdaságtan nem a Domar-modellből kiindulva kezdte az exogén változók endogenizálását, hanem a neoklasszikus növekedési modellek és a fogyasztás dinamikusan optimalizálásának felhasználásán keresztül, lásd erről bővebben *Diamond* [1965] és *Blanchard* [1985] tanulmányait.

$$x(t) = \gamma b(t) - \delta b^2(t) \quad (11)$$

$$g(t) = g^p - \omega b(t) \quad (12)$$

$$\dot{r}(t) = \beta [b(t) - k(t)] \quad (13)$$

$$k(t) = k^s + \alpha [r(t) - r^f],$$

ahol  $k$  a kölcsöntőke kínálata (vagy tőkebeáramlás), az  $\alpha, \beta, \delta, \gamma, \omega > 0$  paraméterek és  $g^p, k^s, r^f > 0$  konstansok. A (11) egyenlet azt fogalmazza meg, hogy az eladósodottság növekedése előbb vagy utóbb kiváltja a költségvetési restriktiót, egy bizonyos szint feletti adósság/GDP nagyság után már minden gazdaságpolitikai kurzus szufficitre fog törekedni. A (12) összefüggés értelmében a gazdasági növekedés üteme automatikusan igazodik a potenciális növekedési ütemhez ( $g^p$ ), az adósságállomány léte és kiterjedése azonban csökkenti ezt a potenciális ütemet. A kamatláb változása a kölcsöntőke iránti kereslet ( $b$ ) és kínálat ( $k$ ) viszonya alapján határozódik meg, ahogy ez a (13) első egyenletéből jól látszik. A kölcsöntőke kínálata pedig a (13) második egyenlete szerint – egy rögzített alapkínálaton ( $k^s$ ) túl – a hazai kamatláb ( $r$ ) és a külföldi kamatláb ( $r^f$ ) viszonya alapján változik, amely utóbbit konstansnak tételeztünk az egyszerűség kedvéért.

A (11)–(13) összefüggéseket figyelembe véve az (1')-hez, a következő két egyenletes differenciálegyenlet-rendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} \dot{b}(t) &= (\gamma - g^p)b(t) + (\omega - \delta)b^2(t) + r(t)b(t) \\ \dot{r}(t) &= \beta b(t) - \alpha\beta r(t) + \alpha\beta r^f - \beta k^s. \end{aligned} \quad (14)$$

Az egyensúlyi helyzetek meghatározásához a  $\dot{b}_t = \dot{r} = 0$  helyettesítéssel élve adódik, hogy

$$\begin{aligned} \dot{b}(t)[(\gamma - g^p) + (\omega - \delta)b(t) + r(t)] &= 0 \\ b(t) - \alpha r(t) + \alpha r^f - k^s &= 0. \end{aligned}$$

Ebből a formából már közvetlenül meghatározhatók az egyensúlyi egyenesek egyenletei, és ábrázolhatóvá válnak a  $[b, r]$  koordináta-rendszerben (lásd a 8. és 9. ábrákat). Meghatározhatók továbbá az egyensúlyi helyzetek és a stabilitás kritériumai is. Két esetet különböztetünk meg ennek megfelelően:

1. eset:

$$g^p - \gamma > r^f - \frac{1}{\alpha} k^s \quad \text{és} \quad \frac{1}{\alpha} > \delta - \omega.$$

2. eset:

$$g^p - \gamma < r^f - \frac{1}{\alpha} k^s \quad \text{és} \quad \frac{1}{\alpha} < \delta - \omega.$$

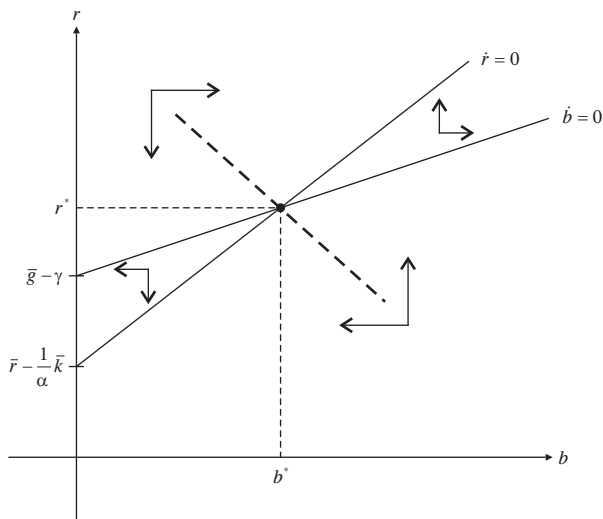
Az első esetben az egyensúly nem stabil, csak nyeregvonal melletti konvergencia valósulhat meg (lásd a 8. ábrát). A második esetben az egyensúly stabil lesz (lásd a 9. ábrát).

A (14) alapján felírható az egyenletrendszer linearizált változata az egyensúlyi értékek közelében:

$$\begin{bmatrix} \dot{b} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\omega - \delta)b^* & b^* \\ \beta & -\alpha\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b - b^* \\ r - r^* \end{bmatrix}.$$

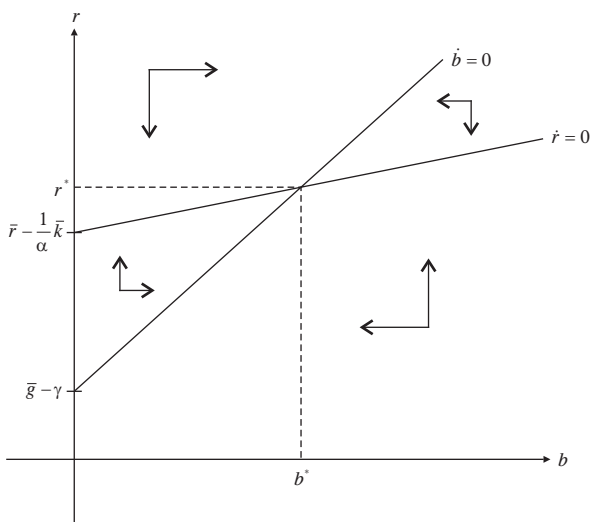
8. ábra

Egyensúly és stabilitás az exogén változók endogenizálása esetén: nyeregvonal-konvergencia



9. ábra

Egyensúly és stabilitás az exogén változók endogenizálása esetén: stabil egyensúly



Ekkor a stabilitás feltételei a következők lesznek:

$$\begin{aligned} \text{tr } J &= (\omega - \delta)b^* - \alpha\beta < 0 \\ \det J &= -\beta b^*(\alpha(\omega - \delta) + 1) > 0. \end{aligned}$$

Ha  $\delta > \omega$ , akkor az első feltétel teljesül, s amennyiben  $1/\alpha < \beta - \omega$  is fennáll, akkor a második feltétel is teljesül (ez az imént említett 2. eset, amelyet a 9. ábra mutat). Ellenkező esetben csak nyeregvonal melletti konvergencia képzelhető el (az 1. esetnek és a 8. ábrának megfelelően).

A két eset közgazdasági magyarázata viszonylag egyszerű. A modellnek lényegében három kulcsparamétere van, az  $\alpha$ ,  $\delta$  és  $\omega$ . Az  $\alpha$  a tőkebeáramlás (vagy a tőkemobilitás) erősségét mutatja. Ha kicsi a tőkemobilitás, akkor alacsony lesz az értéke, s ennek megfelelően a reciproka viszont nagy lesz. S, ha  $1/\alpha > \delta - \omega$ , akkor a rendszer instabil lesz, ahogy azt a matematikai feltételek mutatják. Ez a helyzet azért következik be, mert az adósság finanszírozására nem lesz elég forrás, s ezért a kamatláb emelkedni fog. A kamatláb emelkedése pedig tovább emeli az adósságot, amely aztán újabb finanszírozási-forrás-hiányt generál, és így tovább. Ha magas a tőkemobilitás, akkor a kamatkülönbség alapján lesz elég tőkebeáramlás, amely megakadályozza a további kamatláb-emelkedést, s az emiatti további adósságnövekedést.

Ha a  $\delta$  értéke magas, akkor az azt jelenti, hogy jelentős negatív visszacsatolás érvényesül a gazdaságban: a növekvő és magas adósság/GDP hányados a költségvetési deficit erőteljes csökkentését, sőt szufficitbe való átcsapását idézi elő. Az  $\omega$  paraméter a  $b$  növekedésével csökkenti a növekedési ütemet, tehát a stabilitás szempontjából negatív hatású. Éppen ezért szükséges, hogy a  $\delta - \omega$  értéke legyen magas, pontosabban szólva: magasabb, mint  $\frac{1}{\alpha}$ , mert csak így működik a stabilitást fenntartó mechanizmus.

\*

A klasszikus adósságdinamikai összefüggés alapvetően úgy tehető még dinamikusabbá, és ezáltal vihető közelebb a gyakorlati alkalmazáshoz, ha a növekedési ütemet és a reálkamatlábát időben változóknak tételezzük fel. Az első modellváltozatban a különbségét tekintettük változóknak, mégpedig az adósság/GDP hányados és a költségvetési deficit értékétől lineárisan függő változóknak. Ez a módosítás már több vonatkozásban is árnyaltabbá tette a rendszer dinamikus működésének a leírását, még úgy is, hogy közben az  $x$  költségvetési deficit exogén jellegét megtartottuk.

A második modellváltozatban az  $u$  továbbra is az adósság/GDP és a deficittől függően változott, de már nem lineáris módon. A másik módosítás, hogy az  $x$  itt endogén változóvá vált – mégpedig ugyanezen alapváltozók által meghatározottan. A függés jellegében két gazdaságpolitikai változatot vettünk figyelembe: a konzervatív, egyensúlyra törő és az előremenekülő, „kinövünk az adósságcsapdából” változatot. A rendszer dinamikus működése sokkal bonyolultabbá és összetettebbé vált, mint a korábbiakban. Több egyensúlyi helyzet jött létre, amelyek tulajdonsága egymástól is különböző. Szinte az összes elvileg szóba jöhető eset előadódott: a stabil és instabil egyensúly, nyeregponnal melletti konvergencia, spirális trajektória stb.

A harmadik modellváltozatban mind a növekedési ütem, mind a kamatláb alapvetően az adósság/GDP hányados alakulásától függött, de emellett figyelembe vettünk exogén tényezőket is. A növekedés esetében a potenciális növekedési ütemet, a reálkamatláb esetében pedig a külső kamatlábát, valamint a tőkepiaci viszonyokat, ahol a kölcsöntőke kereslete az államadósság szerint, a kínálat pedig a külső és a belső kamatláb alapján alakult. Így viszont már kétváltozós lett a modellünk, mert a  $b$  mellett az  $r$  is endogén változóvá lépett elő. Az adott feltételrendszer mellett stabil egyensúlyi helyzet, illetve nyeregponnal megoldás jöhet létre.

A magyar adósságfelhalmozódási folyamat elemzésére alkalmazva a modelleket, mindenekelőtt azt kell rögzíteni, hogy a költségvetésen kívüli igen nagy arányú kötelezettségvállalások nem teszik lehetővé az alapmodell „egy az egybeni” felhasználását. A számított és a tényleges adósságfelhalmozódás közötti különbség azonban jól mutatja a külső kötelezettségvállalások valódi adósságnövelő szerepét. Ugyanezt mutatja az első modellváltozatnak megfelelő állandó nagyságú költségvetési deficit feltételezése alapján

végzett számítás is, amely a tényleges átlagos 0,9 százalékos szufficittal szemben 3,2 százalékos deficitet adott. Az adósságcsapdából való kimenekülés kétféle stratégiáját megfogalmazó modellváltozat szembesítése a tényadatokkal pedig azt valószínűsítette, hogy a magyar gyakorlat alapvetően „a kifogyni az adósságból” konzervatív pénzügyi stratégiájának felel meg.

Az adósságdinamikai alapösszefüggés továbbfejlesztésének útjai természetesen sokféle lehetnek, a fejlesztő kutatók érdeklődésének és a gyakorlat oldaláról feszítő problémáknak megfelelően. Mindazonáltal két fejlesztési irány a jelen tanulmány eredményei alapján elég kézenfekvőnek tűnik: egyrészt érdemes lehet a költségvetési deficit exogén jellegét fenntartva, de determinisztikus jellegét nem, különféle alternatív forgatókönyvek mellett végigkövetni a rendszer működését. Másrészt pedig a növekedési modellek irányába bővíteni a modellt, úgy hogy az aktuális növekedési ütem teljes egészében endogén változó legyen. Ennek megfelelően egy többváltozós dinamikus modell jönne létre, amelyben nemcsak annak tanulmányozására nyílna mód, hogy hogyan alakul az adósság/GDP hányados, hanem hogy ennek milyen hatása van a reálgazdaság növekedését alapvetően befolyásoló változókra.

### Hivatkozások

- ABELL, M.–BRASELTON, J. P. [2001]: *Modern Differential Equations*, Harcourt, Inc. London.
- BARABÁS GYULA–HAMECZ ISTVÁN–NEMÉNYI JUDIT [1998]: A költségvetés finanszírozási rendszerének átalakítása és az eladósodás megfékezése. Magyarország tapasztalatai a piacgazdasági átmenet időszakában, I–II. *Közgazdasági Szemle*, 7–8., 9. sz.
- BLANCHARD, O. J. [1985]: Debt, Deficits, and Finite Horizons, *Journal of Political Economy*, Vol. 93, 2. április, 223–247. o.
- BORBÉLY LÁSZLÓ ANDRÁS–NEMÉNYI JUDIT [1995]: Eladósodás, a külső és belső államadósság alakulása az átmenet gazdaságában (1990–1993), Megjelent: *Mellár Tamás* (szerk.): *Rendszerváltás és stabilizáció. A piacgazdasági átmenet első évei*. Magyar Trendkutató Központ, Budapest, 123–166. o.
- DIAMOND, P. A. [1965]: National Debt in a Neoclassical Growth Model. *American Economic Review*, Vol. 55, 5. december, 1126–1150. o.
- DOMAR, D. E. [1944]: The „Burden of the Debt” and the National Income. *American Economic Review*, Vol. 34, 4. december. 798–827. o.
- GANDOLFO, G. [1997]: *Economic Dynamics*. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg.
- KAPLAN, D.–GLASS, L. [1995]: *Understanding Nonlinear Dynamics*. Springer-Verlag, New York.
- MELLÁR TAMÁS [1997]: A költségvetési deficit és az államadósság felhalmozódása. *Bankszemle*, Vol. 39. 10. sz. 17–25. o.
- MISSALE, A.–BLANCHARD, O. J. [1994]: The Debt Burden and Debt Maturity. *American Economic Review*, Vol. 84, 1. március, 309–319. o.
- OBLATH GÁBOR [1995]: A költségvetési deficit makrogazdasági hatásai Magyarországon. *Külgazdaság*, Vol. 39, 7–8. sz. 22–33. o.
- SEATER, J. J. [1993]: Ricardian Equivalence, *Journal of Economic Literature*, Vol. 31, 1. március, 142–190. o.
- SIMONOVITS ANDRÁS [1998]: *Matematikai módszerek a dinamikus közgazdaságban*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.
- TALLÓS PÉTER [1999]: *Dinamikai rendszerek alapjai*. Aula Kiadó, Budapest.